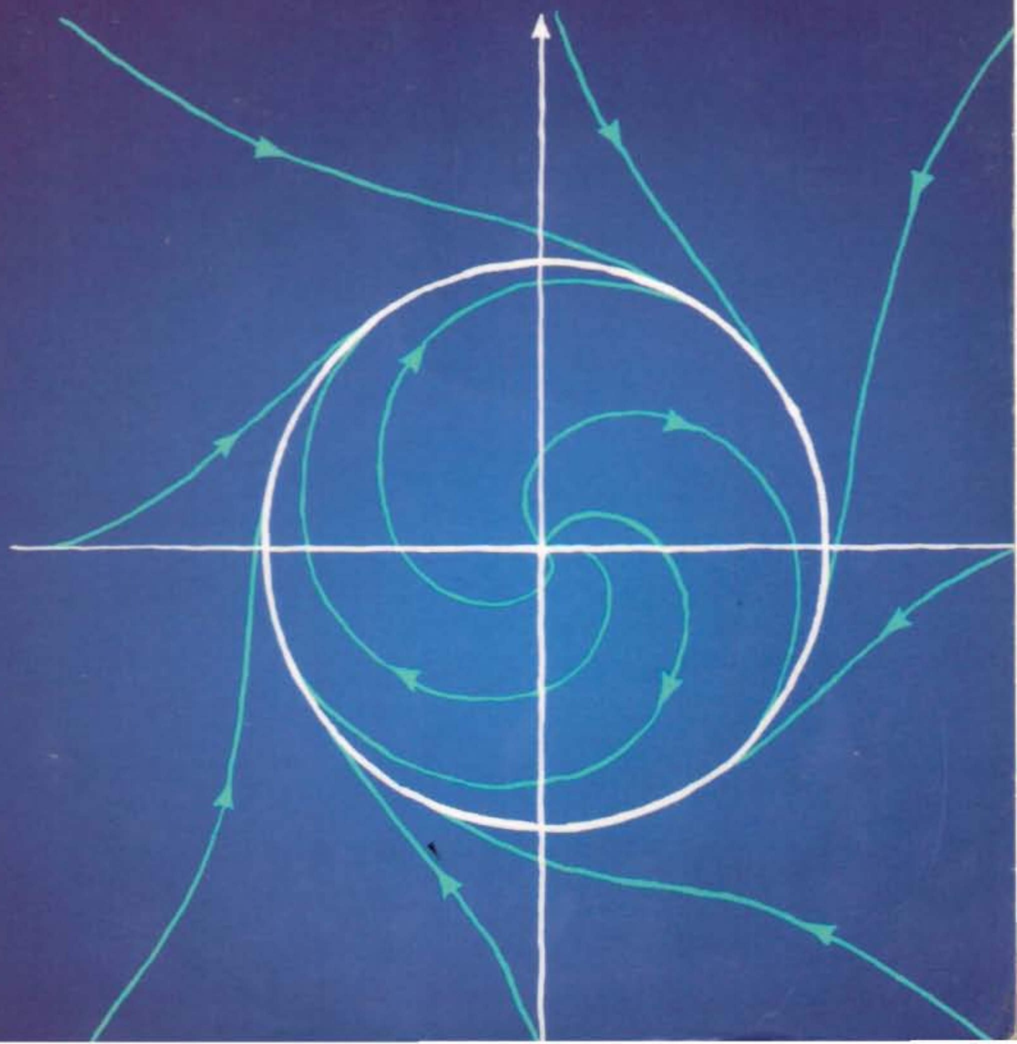
Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno

WILLIAM E. BOYCE
RICHARD C. DIPRIMA

OITAVA EDIÇÃO



LTC

Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno



CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO-NA-FONTE
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ.

B784e

Boyce, William E., 1930-
Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno / William E. Boyce, Richard C. DiPrima ; tradução de Valéria de Magalhães Iorio. - Rio de Janeiro : LTC, 2006

Tradução de: Elementary differential equations and boundary value problems, 8th ed
Apêndices
Inclui exercícios e respectivas respostas
ISBN 85-216-1499-3

1. Equações diferenciais. 2. Problemas de valores de contorno. I. DiPrima, Richard C. II. Título.

06-0653. CDD 515.35
CDU 517.9

LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
Travessa do Ouvidor, 11
Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040
Tel.: 21-3970-9480
Fax: 21-2221-3202
ltc@ltceditora.com.br
www.ltceditora.com.br

Para Elsa e Maureen
Para Siobhan, James, Richard, Jr., Carolyn e Ann
E para a próxima geração:
Charles, Aidan, Stephanie, Veronica e Deirdre

Os Autores

William E. Boyce recebeu bacharelado (B.A.) em Matemática pelo Rhodes College e seu mestrado (M.S.) e doutorado (Ph.D.) em Matemática pela Universidade Carnegie-Mellon. É membro da American Mathematical Society, da Mathematical Association of America e da Society for Industrial and Applied Mathematics. É, atualmente, Professor Emérito de Educação em Ciência Edward P. Hamilton (Departamento de Ciências Matemáticas) em Rensselaer. É autor de diversos artigos técnicos sobre problemas de valores de contorno e equações diferenciais aleatórias e suas aplicações. É autor de diversos livros-textos e co-autor (com M. H. Holmes, J. G. Ecker e W. L. Siegmann) de um texto usando o *Maple* para explorar o Cálculo. Também é co-autor (com R. L. Borelli e C. S. Coleman) de *Differential Equations Laboratory Workbook* (Wiley, 1992), que recebeu o prêmio EDUCOM de Melhor Inovação Curricular em Matemática em 1993. Professor Boyce foi, também, um membro do CODEE (Consórcio para Experiências em Equações Diferenciais Ordinárias), patrocinado pelo NSF (*National Science Foundation*) e que gerou *ODE Architect*, muito recomendado. Atuou, também, na inovação e reforma dos currículos. Entre outras coisas, começou o projeto "Computadores em Cálculo", em Rensselaer, com auxílio parcial do NSF. Recebeu, em 1991, o prêmio William H. Wiley Distinguished Faculty Award, dado por Rensselaer.

Richard C. DiPrima (falecido) recebeu seu bacharelado (B.S.), seu mestrado (M.S.) e seu doutorado (Ph.D.) em Matemática pela Universidade de Carnegie-Mellon. Juntou-se ao corpo docente do Instituto Politécnico Rensselaer depois de ter tido posições de pesquisa no MIT, em Harvard e em Hughes Aircraft. Teve a posição Eliza Ricketts Foundation Professorship of Mathematics em Rensselaer, foi membro da American Society of Mechanical Engineers, da American Academy of Mechanics e da American Physical Society. Foi, também, membro da American Mathematical Society, da Mathematical Association of America e da Society of Industrial and Applied Mathematics. Serviu como Chefe do Departamento de Ciências Matemáticas em Rensselaer, como Presidente da Society for Industrial and Applied Mathematics e como Presidente do Comitê Executivo da Divisão de Mecânica Aplicada da ASME. Recebeu, em 1980, o prêmio William H. Wiley Distinguished Faculty Award, dado por Rensselaer. Recebeu bolsas da Fullbright em 1964-1965 e uma bolsa Guggenheim em 1982-1983. Foi autor de diversos artigos técnicos sobre estabilidade hidrodinâmica e teoria de lubrificação, e de dois livros sobre equações diferenciais e problemas de valores de contorno. O professor DiPrima faleceu em 10 de setembro de 1984.

PREFÁCIO

Audiência e Pré-requisitos

Esta edição, como as anteriores, foi escrita do ponto de vista do matemático aplicado, cujo interesse em equações diferenciais pode ser algumas vezes altamente teórico, outras vezes intensamente prático e, com freqüência, algo no meio. Procuramos combinar uma exposição correta e precisa (mas não abstrata) da teoria elementar das equações diferenciais com bastante material sobre métodos de solução, análise e aproximação que tenham se mostrado úteis em uma ampla gama de aplicações.

O livro foi escrito, principalmente, para o aluno de graduação em matemática, ciência ou engenharia, o qual, tipicamente, faz um curso sobre equações diferenciais durante seu primeiro ou segundo ano de estudo. O principal pré-requisito para se ler este livro é saber trabalhar com cálculo, o que pode ser obtido através de uma seqüência de dois ou três semestres ou o equivalente. Alguma familiaridade com matrizes também será útil nos capítulos sobre sistemas de equações diferenciais.

Um Ambiente de Aprendizagem em Mudança

O ambiente no qual os professores ensinam e os estudantes aprendem equações diferenciais mudou muito nos últimos anos e continua a mudar em ritmo acelerado. Estão disponíveis equipamentos computacionais de alguma espécie, sejam calculadoras gráficas, computadores portáteis ou estações de trabalho, para a maioria dos alunos de equações diferenciais. Esses equipamentos tornam relativamente fácil a execução de cálculos numéricos grandes para gerar gráficos de alta qualidade e, em muitos casos, para executar manipulações simbólicas complexas. Uma conexão com a Internet de alta velocidade abre um leque imenso de outras possibilidades.

O fato de tantos alunos terem, agora, essas capacidades permite aos professores, se desejarem, modificarem, substancialmente, a apresentação do assunto e suas expectativas do resultado dos alunos. Não é de surpreender que os instrutores tenham opiniões altamente divergentes sobre como uma disciplina de equações diferenciais deve ser ensinada nessas condições. Apesar disso, as disciplinas de equações diferenciais em faculdades e universidades estão se tornando mais visuais, mais qualitativas, mais orientadas para projetos e menos dependentes de fórmulas do que no passado.

Uma Abordagem Flexível

Para ter uma utilidade ampla, um livro-texto tem de poder ser adaptado a diversas estratégias. Isso implica, pelo menos, duas coisas. Primeiro, que os professores devem ter flexibilidade máxima para escolher tanto os tópicos particulares que querem cobrir, como a ordem em que querem cobri-los. Segundo, o livro deve ser útil para estudantes com diversas capacidades tecnológicas.

Capítulos Modulares

Em relação ao conteúdo, fornecemos essa flexibilidade fazendo com que, na medida do possível, os capítulos individuais sejam independentes uns dos outros. Assim, após completar as partes básicas dos três primeiros capítulos (basicamente as Seções de 1.1 a 1.3, de 2.1 a 2.5 e de 3.1 a 3.6), a seleção de tópicos adicionais e a ordem e profundidade com que serão tratados depende da escolha do professor. Por exemplo, um professor que deseja enfatizar uma abordagem sistêmica às equações diferenciais pode tratar o Cap. 7 (Sistemas Lineares) ou talvez o Cap. 9 (Sistemas Não-Lineares Autônomos) logo depois do Cap. 2. Ou, muitos professores combinaram a apresentação da teoria básica de equações lineares no contexto de uma única equação de segunda ordem (Cap. 3) com o tratamento correspondente de equações de ordem mais alta (Cap. 4) ou de sistemas lineares (Cap. 7). Ou, enquanto a discussão principal sobre métodos numéricos está no Cap. 8, o professor que deseje enfatizar essa abordagem pode apresentar parte desse material juntamente com o Cap. 2. Muitas outras escolhas e combinações também são possíveis e têm sido usadas, efetivamente, com edições anteriores deste livro.

Tecnologia

Com relação à tecnologia, observamos, repetidamente, que computadores são extremamente úteis para se investigar equações

diferenciais e suas soluções, e muitos problemas devem ser feitos com assistência computacional. Apesar disso, o livro pode ser adaptado para disciplinas com diferentes níveis de envolvimento computacional, variando de pouco ou nenhum até intenso. O texto é independente de qualquer plataforma computacional ou programa. Mais de 450 problemas estão marcados com o símbolo para indicar que o consideramos particularmente apropriado para utilização de tecnologia computacional. Esses problemas podem pedir um gráfico, ou podem precisar de cálculos numéricos intensos ou extensa manipulação simbólica, ou uma combinação dessas coisas. Naturalmente, a designação de um problema como sendo particularmente apropriado para utilização de computadores é um julgamento um tanto subjetivo, e o objetivo do símbolo é o de servir como guia. Muitos dos problemas marcados assim podem ser resolvidos, pelo menos em parte, sem ajuda computacional, e um computador pode ser usado de maneira eficaz em muitos dos problemas que não estão marcados.

Problemas de Casa

Do ponto de vista de um aluno, os problemas atribuídos para casa e que aparecem nas provas é que determinam a disciplina. Acreditamos que a característica mais marcante deste livro é o número e, acima de tudo, a variedade e amplitude dos problemas que contém. Muitos problemas são exercícios simples, mas muitos outros são desafios, e alguns podem servir como base para projetos de estudos independentes. Existem muito mais problemas do que qualquer professor pode usar em uma disciplina específica, e isso lhes dá muitas possibilidades de escolha ao adaptar o curso aos seus objetivos e às necessidades dos alunos.

Uma das escolhas que o professor tem de fazer está relacionada ao uso de computação. Por exemplo, muitos problemas mais ou menos rotineiros, tais como resolver um problema de valor inicial de primeira ou segunda ordem, são fáceis de resolver usando-se um sistema computacional simbólico. Esta edição inclui uma boa quantidade de tais problemas, como as edições anteriores. Não dizemos, nesses problemas, como eles devem ser resolvidos, já que acreditamos que o professor é que deve especificar se seus alunos devem resolver os problemas a mão, com auxílio computacional, ou das duas maneiras. Além disso, existem problemas que pedem um gráfico como solução. O professor pode especificar se quer um gráfico preciso gerado por computador, um esboço a mão, ou ambos.

Modelagem Matemática

Construindo Modelos Básicos

A principal razão para se resolver muitas equações diferenciais é tentar aprender alguma coisa sobre o processo físico subjacente que, acredita-se, a equação modela. Uma das razões básicas da importância das equações diferenciais é que mesmo as equações mais simples correspondem a modelos físicos úteis, como o crescimento e decaimento exponenciais, os sistemas massa-mola ou os circuitos elétricos. A compreensão de um processo natural complexo é obtida, em geral, através da compreensão, ou construção, de modelos mais simples e básicos. Assim, um conhecimento profundo desses modelos, das equações que os descrevem e suas soluções é o primeiro passo indispensável na direção da solução de problemas mais complexos e realistas. Descrevemos a modelagem de processos em detalhe nas Seções 1.1, 1.2 e 2.3. Construções cuidadosas de modelos aparecem também nas Seções 2.5 e 3.8 e nos apêndices ao Cap. 10. As equações diferenciais resultantes do processo de modelagem aparecem freqüentemente ao longo do livro, especialmente nos conjuntos de problemas.

Uma Combinação de Ferramentas — Analíticas e Numéricas

Problemas mais difíceis precisam, em geral, de uma variedade de ferramentas, tanto analíticas quanto numéricas. Acreditamos fortemente que métodos com lápis e papel têm de ser combinados com o uso eficaz de computadores. Resultados qualitativos e gráficos produzidos, muitas vezes, por computador, servem para ilustrar e clarificar conclusões que podem ficar obscurecidas por expressões analíticas complicadas. Por outro lado, a implementação de um procedimento numérico eficiente se apóia, tipicamente, em uma boa dose de análise preliminar — para determinar as características qualitativas da solução como um guia para os cálculos, para investigar casos-limite ou especiais, ou para descobrir os intervalos de valores onde as variáveis ou parâmetros podem precisar, ou merecer, atenção especial. Um estudante deve compreender, portanto, que a investigação de um problema difícil pode necessitar tanto de análise, quanto de computação; que pode ser necessário bom senso para se determinar qual a ferramenta mais adequada para uma tarefa particular; e que resultados podem ser apresentados, muitas vezes, de diversas formas.

Obtendo Percepção sobre o Comportamento de um Processo

Acreditamos que é importante que os estudantes saibam que (com exceção, talvez, de cursos específicos sobre equações diferenciais) a finalidade de se resolver uma equação diferencial raramente é a de se obter simplesmente a solução. Em vez disso, há interesse na solução para que se possa obter uma percepção sobre o comportamento do processo que a equação diferencial se propõe a modelar. Em outras palavras, a solução em si mesma não é a finalidade. Assim, incluímos no texto um grande número de problemas, bem como alguns exemplos, que pedem conclusões a serem extraídas da solução. Algumas vezes isso é feito indagando-se para que valor da variável independente a solução possui uma certa propriedade ou pedindo-se para determinar o comportamento de longo termo da solução. Outros problemas indagam sobre efeitos da variação de um determinado parâmetro ou pedem a determinação de um valor crítico de um parâmetro para o qual a solução apresenta uma

mudança substancial. Esses problemas são típicos dos que surgem em aplicações das equações diferenciais e, dependendo dos objetivos do curso, o professor tem a opção de considerar alguns ou muitos desses problemas.

Mudanças Importantes na Oitava Edição

Leitores familiarizados com a edição precedente vão notar que a estrutura geral do livro permanece a mesma. As revisões feitas nesta edição visaram a diversos objetivos: ampliar a gama das aplicações consideradas, tornar a apresentação mais visual pelo acréscimo de figuras e melhorar a explanação, incluindo exemplos novos ou de maior abrangência. Mais especificamente, as alterações mais importantes foram as seguintes:

1. Há aproximadamente 65 novos problemas espalhados ao longo do livro. Há também cerca de 15 novas figuras e 8 exemplos novos ou modificados.
2. A Seção 2.1, "Equações Lineares; Método dos Fatores Integrantes", foi substancialmente reescrita, com dois novos exemplos, para reduzir a repetição.
3. A Seção 2.5, "Equações Autônomas e Dinâmica Populacional", foi modificada para dar maior destaque à linha de fase como auxílio para esboçar soluções.
4. Na Seção 3.9 foi considerado o caso geral de vibrações amortecidas antes do caso particular de vibrações não-amortecidas, invertendo a ordem de apresentação das edições anteriores. A apresentação é mais detalhada e há três figuras novas.
5. Foi reescrita a demonstração do teorema de convolução na Seção 6.6 e foram incluídos seis novos problemas sobre equações integrais e íntegro-diferenciais.
6. Para ilustrar a ocorrência de sistemas de ordem superior à segunda foi adicionado, na Seção 7.6, um novo exemplo sobre osciladores acoplados, acompanhado de três figuras e diversos problemas relacionados a esse assunto.
7. Na Seção 7.9 foi incluído um exemplo para demonstrar o uso de transformadas de Laplace em sistemas lineares não-homogêneos.
8. Há diversos problemas novos nas Seções 2.5, 9.4 e 9.7 para ilustrar a ocorrência de bifurcações em sistemas não-lineares em uma e em duas dimensões.
9. Há novos problemas na Seção 10.6 sobre condução de calor em presença de fontes térmicas externas, na Seção 10.7 sobre ondas dispersivas e na Seção 10.8 sobre o fluxo através de um aqüífero.

À medida que o assunto, equações diferenciais, continua a crescer, à medida que as novas tecnologias tornam-se comuns, à medida que velhas áreas de aplicação são estendidas e novas áreas aparecem no horizonte, o conteúdo e o ponto de vista dos cursos e seus livros-textos têm, também, que evoluir. Esse é o espírito que tentamos expressar neste livro.

William E. Boyce
Grafton, Nova York
Fevereiro de 2004

Comentários e Sugestões

Apesar dos melhores esforços dos autores, da tradutora, do editor e dos revisores, é inevitável que surjam erros no texto. Assim, são bem-vindas as comunicações de usuários sobre correções ou sugestões referentes ao conteúdo ou ao nível pedagógico que auxiliem o aprimoramento de edições futuras. Encorajamos os comentários dos leitores, que podem ser enviados à LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. no endereço: Travessa do Ouvidor, 11, Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040-040 ou ao endereço eletrônico ltc@ltceditora.com.br

Para o Professor

Os professores que adotarem o livro podem solicitar à LTC materiais suplementares de apoio pedagógico, em inglês. O pedido deve ser encaminhado a:
LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.
A/C Editorial Técnico
Travessa do Ouvidor, 11
Rio de Janeiro, RJ — CEP 20040–040
Tel.: 21–3970-9480
Fax: 21–2221-3202
ltc@ltceditora.com.br
www.ltceditora.com.br

AGRADECIMENTOS

É um prazer oferecer meus agradecimentos às muitas pessoas que ajudaram de diversas maneiras, generosamente, na preparação deste livro.

As pessoas listadas a seguir revisaram o manuscrito e deram muitas sugestões valiosas para melhorá-lo:

Deborah Brandon, Carnegie Mellon University
James R. Brannan, Clemson University
Philip Crooke, Vanderbilt University
Dante DeBlassie, Texas A&M University
Juan B. Gil, Penn State Altoona
Moses Glasner, Pennsylvania State University
Murli M. Gupta, The George Washington University
Donald Hartig, California Polytechnic State University, San Luis Obispo
Thomas Hill, Lafayette College
Richard Hitt, University of South Alabama
Melvin D. Lax, California State University, Long Beach
Gary M. Lieberman, Iowa State University
Rafe Mazzeo, Stanford University
Diego A. Murio, University of Cincinnati
Martin Nakashima, California Polytechnic State University, Pomona
David Nicholls, University of Notre Dame
Bent E. Petersen, Oregon State University
Chris Schneider, University of Missouri — Rolla
Avy Soffer, Rutgers University
Steve Zelditch, Johns Hopkins University

A meus colegas e alunos do Rensselaer, cujas sugestões e reações através dos anos contribuíram muito para aprofundar meus conhecimentos de equações diferenciais e minhas idéias de como apresentar o assunto.

A James Brannan (Clemson University), Bent Petersen (Oregon State University) e Josef Torok (Rochester Institute of Technology), que deram muitas sugestões de problemas novos, principalmente orientados para aplicações.

Aos leitores das edições anteriores, que apontaram erros ou omissões, e, especialmente, a George Bergman (Universidade da Califórnia em Berkeley), por sua lista detalhada de comentários e correções.

A Lawrence Shampine (Southern Methodist University), por suas consultas, e a William Siegmann (Rensselaer), que arranjou tempo para muitas conversas longas sobre o assunto deste livro sob um ponto de vista pedagógico.

A Charles Haines (Rochester Institute of Technology), que, mais uma vez, reviu o Manual de Soluções para o Aluno* e, nesse processo, verificou as soluções de muitos problemas.

A Josef Torok (Rochester Institute of Technology), que atualizou o Manual de Soluções para o Professor.*

A David Ryeburn (Simon Fraser University), que leu cuidadosamente as provas de página e foi responsável por diversas correções e vários esclarecimentos.

Ao corpo editorial e de produção da John Wiley & Sons e da Techsetters, Inc., que sempre estiveram prontos para ajudar e mostraram um altíssimo padrão de profissionalismo.

Finalmente, e mais importante, agradeço à minha esposa Elsa por muitas horas gastas corrigindo e verificando detalhes, por levantar e discutir questões tanto matemáticas quanto de estilo, e, acima de tudo, por seu apoio e encorajamento constantes durante o processo de revisão. Em um sentido bastante prático, este livro é um trabalho em conjunto.

William E. Boyce

*Esses materiais se referem à edição original, em inglês, e não constam da edição em português. (N.E.)

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

Introdução

Tentamos, neste capítulo, olhar nosso estudo de equações diferenciais sob diversos ângulos diferentes, de modo a obter uma boa perspectiva. Usamos, primeiro, dois problemas para ilustrar algumas das idéias básicas a que retornaremos com freqüência e que serão aprofundadas ao longo deste livro. Indicamos, mais tarde, diversos modos de classificar equações, com o objetivo de fornecer uma estrutura organizacional para o livro. Finalmente, fazemos um esboço das tendências principais no desenvolvimento histórico desse campo e mencionamos alguns dos matemáticos extraordinários que contribuíram para ele. O estudo das equações diferenciais atraiu a atenção dos maiores matemáticos do mundo durante os três últimos séculos. Apesar disso, continua sendo uma área de pesquisa dinâmica hoje em dia, com muitas questões interessantes em aberto.

1.1 Alguns Modelos Matemáticos Básicos; Campos de Direção

Antes de começar um estudo sério de equações diferenciais (lendo este livro ou partes substanciais dele, por exemplo), você deve ter alguma idéia de como isso pode auxiliá-lo. Para alguns estudantes, o interesse intrínseco do assunto é motivação suficiente, mas, para a maioria, as possíveis aplicações importantes em outros campos é o que faz com que tal estudo valha a pena.

Muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Expressas em linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas. Equações contendo derivadas são **equações diferenciais**. Portanto, para compreender e investigar problemas envolvendo o movimento de fluidos, o fluxo de corrente elétrica em circuitos, a dissipação de calor em objetos sólidos, a propagação e detecção de ondas sísmicas, ou o aumento ou diminuição de populações, entre muitos outros, é necessário saber alguma coisa sobre equações diferenciais.

Uma equação diferencial que descreve algum processo físico é chamada, muitas vezes, de **modelo matemático** do processo, e muitos desses modelos são discutidos ao longo do texto. Começamos esta seção com dois modelos que nos levam a equações fáceis de resolver. Vale a pena observar que mesmo as equações diferenciais mais simples fornecem modelos úteis de processos físicos importantes.

Exemplo 1

Um Objeto em Queda

Suponha que um objeto está caindo na atmosfera, perto do nível do mar. Formule uma equação diferencial que descreva o movimento.

Começamos usando letras para representar as diversas quantidades de interesse nesse problema. O movimento ocorre durante um determinado intervalo de tempo, logo vamos usar t para denotar o tempo. Além disso, vamos usar v para representar a velocidade do objeto em queda. A velocidade deve variar com o tempo, de modo que vamos considerar v como uma função de t; em outras palavras, t é a variável independente e v é a variável dependente. A escolha de unidades de medida é um tanto arbitrária e não há nada no enunciado do problema que sugira unidades apropriadas, de modo que estamos livres para escolher unidades que nos pareçam razoáveis. Especificamente, vamos medir o tempo t em segundos (s) e a velocidade v em metros por segundo (m/s). Além disso, vamos supor que a velocidade v é positiva quando o sentido do movimento é para baixo, isto é, quando o objeto está caindo.

A lei física que governa o movimento de objetos é a segunda lei de Newton, que diz que a massa do objeto vezes sua aceleração é igual à força total atuando sobre o objeto. Em linguagem matemática, essa lei é expressa pela equação

$$F = ma, \tag{1}$$

onde m é a massa do objeto, a sua aceleração e F a força total agindo sobre o objeto. Para manter nossas unidades consistentes, mediremos m em quilogramas (kg), a em metros por segundo ao quadrado (m/s^2) e F em newtons (N). É claro que a e v estão relacionadas por $a = dv/dt$, de modo que podemos reescrever a Eq. (1) na forma

$$F = m(dv/dt). \tag{2}$$

A seguir, considere as forças que agem sobre um objeto em queda. A gravidade exerce uma força igual ao peso do objeto, ou mg, onde g é a aceleração devida à gravidade. Nas unidades de medida que escolhemos, g foi determinada experimentalmente como sendo aproximadamente igual a 9,8 m/s^2 próximo à superfície da Terra. Existe, também, uma força devido à resistência do ar, que é mais difícil de modelar. Este não é o local para uma discussão aprofundada da força de resistência do ar; basta dizer que se supõe, muitas vezes, que a resistência do ar é proporcional à velocidade e faremos essa hipótese aqui. Dessa forma, a força de resistência do ar tem tamanho (ou módulo) γv, onde γ é uma constante chamada de coeficiente de resistência do ar. O valor numérico do coeficiente de resistência do ar varia muito de um objeto para outro; objetos lisos com formato aerodinâmico têm coeficientes de resistência do ar muito menores do que objetos rugosos com formatos não-aerodinâmicos.

Ao escrever uma expressão para a força total F, precisamos lembrar que a gravidade sempre age para baixo (no sentido positivo), enquanto a resistência do ar age para cima (no sentido negativo), como ilustrado na Fig. 1.1.1. Logo,

$$F = mg - \gamma v \tag{3}$$

e a Eq. (2) torna-se

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v. \tag{4}$$

A Eq. (4) é um modelo matemático de um objeto caindo na atmosfera, próximo do nível do mar. Note que o modelo contém as três constantes m, g e γ. As constantes m e γ dependem bastante do objeto particular que está caindo e serão diferentes, em geral, para objetos diferentes. É comum referir-se a essas constantes como parâmetros, já que podem tomar um conjunto de valores durante um experimento. Por outro lado, o valor de g é o mesmo para todos os objetos.



FIG. 1.1.1 Diagrama de forças agindo sobre um objeto em queda livre.

Para resolvermos a Eq. (4), precisamos encontrar uma função $v = v(t)$ que satisfaça a equação. Isso não é difícil de fazer, e vamos mostrar como na próxima seção. Entretanto, vamos ver o que podemos descobrir sobre soluções sem encontrar, de fato, qualquer uma delas. Nossa tarefa pode ser ligeiramente simplificada se atribuirmos valores numéricos para m e γ, mas o procedimento é o mesmo, independentemente dos valores escolhidos. Vamos supor, então, que $m = 10$ kg e $\gamma = 2$ kg/s. Se as unidades de γ parecem estranhas, lembre-se de que γ tem que ter unidades de força, isto é, kg·m/s^2. A Eq. (4) fica, então,

$$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5}. \tag{5}$$

Exemplo 2

Um Objeto em Queda (continuação)

Investigue o comportamento das soluções da Eq. (5) sem resolver a equação diferencial.

Vamos proceder analisando a Eq. (5) de um ponto de vista geométrico. Suponha que v tem um determinado valor. Então, calculando a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (5), encontramos o valor correspondente de dv/dt. Por exemplo, se $v = 40$, então $dv/dt = 1{,}8$. Isso significa que a inclinação[1] de uma solução $v = v(t)$ tem o valor 1,8 em qualquer ponto onde $v = 40$. Podemos apresentar essa informação graficamente no plano tv desenhando pequenos segmentos de reta com coeficiente angular 1,8 em diversos pontos ao longo da reta $v = 40$. Analogamente, se $v = 50$, então $dv/dt = -0{,}2$, logo desenhamos segmentos de reta com coeficiente angular $-0{,}2$ em diversos pontos ao longo da reta $v = 50$. Procedendo da mesma maneira com outros valores de v, obtemos a Fig. 1.1.2, que é um exemplo do que é chamado de um **campo de direções**.

A importância da Fig. 1.1.2 é que cada segmento de reta é tangente ao gráfico de uma solução da Eq. (5). Assim, mesmo não tendo encontrado qualquer solução e não aparecendo o gráfico de nenhuma solução na figura, podemos fazer deduções qualitativas sobre o comportamento das soluções. Por exemplo, se v for menor do que certo valor crítico, então todos os segmentos de reta têm coeficientes angulares positivos, e a velocidade do objeto em queda aumenta enquanto ele cai. Por outro lado, se v for maior do que o valor crítico, então os segmentos de reta têm coeficientes angulares negativos, e o objeto em queda vai diminuindo a velocidade à medida que cai. Qual é esse valor crítico de v que separa os objetos cuja velocidade está aumentando daqueles cuja velocidade está diminuindo? Referimo-nos, novamente, à Eq. (5), e perguntamos quais os valores de v que farão com que dv/dt seja zero. A resposta é $v = (5)(9{,}8) = 49$ m/s.

De fato, a função constante $v = 49$ é uma solução da Eq. (5). Para verificar essa afirmação, substitua $v(t) = 49$ na Eq. (5) e note que as expressões dos dois lados do sinal de igualdade são iguais a zero. Como essa solução não varia com o tempo, $v(t) = 49$ é chamada de **solução de equilíbrio**. Essa é a solução que corresponde a um equilíbrio entre a gravidade e a resistência do ar. Mostramos, na Fig. 1.1.3, a solução de equilíbrio superposta no campo de direções. Dessa figura podemos chegar a uma outra conclusão, a saber, que todas as outras soluções parecem estar convergindo para a solução de equilíbrio quando t aumenta.

[1] Isto é, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico. (*N. T.*)

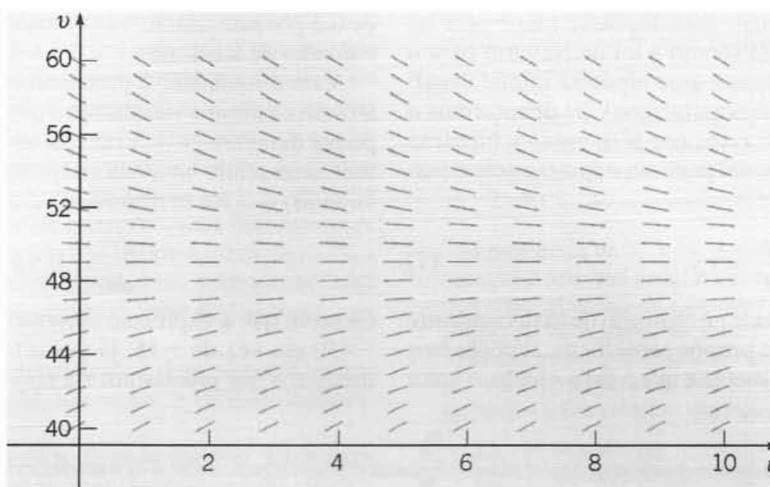


FIG. 1.1.2 Um campo de direções para a Eq. (5).

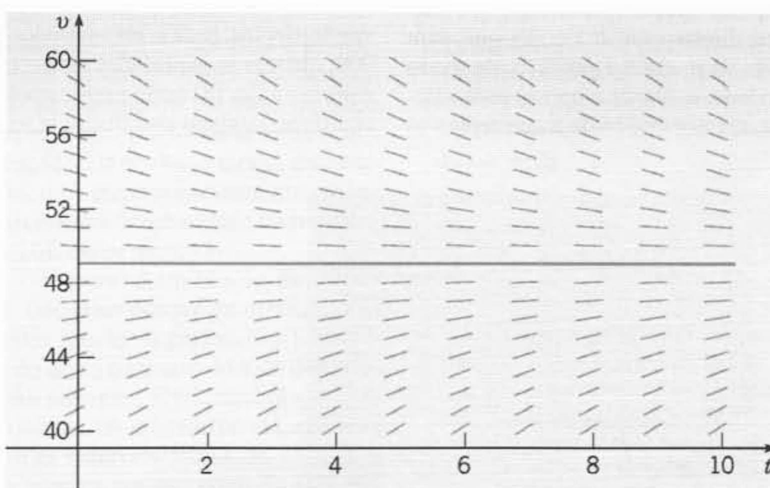


FIG. 1.1.3 Campo de direções e solução de equilíbrio para a Eq. (5).

A abordagem ilustrada no Exemplo 2 pode ser igualmente aplicada à Eq. (4), mais geral, onde os parâmetros m e γ são números positivos não especificados. Os resultados são, essencialmente, idênticos aos do Exemplo 2. A solução de equilíbrio da Eq. (4) é $v(t) = mg/\gamma$. Soluções abaixo da equação de equilíbrio aumentam de velocidade com o tempo, soluções acima diminuem de velocidade e todas as soluções se aproximam da solução de equilíbrio quando t fica muito grande.

Campos de Direções. Campos de direções são ferramentas valiosas no estudo de soluções de equações diferenciais da forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \tag{6}$$

onde f é uma função dada de duas variáveis, t e y, algumas vezes chamada de **função taxa de variação**. Um campo de direções útil para equações da forma (6) pode ser construído calculando-se f em cada ponto de uma malha retangular consistindo em, pelo menos, algumas centenas de pontos. Então, em cada ponto da malha desenha-se um pequeno segmento de reta cujo coeficiente angular é o valor da função f naquele ponto. Dessa forma, cada segmento de reta é tangente ao gráfico de uma solução contendo aquele ponto. Um campo de direções desenhado em uma malha razoavelmente fina fornece uma boa idéia do comportamento global das soluções de uma equação diferencial. A construção de um campo de direções é, muitas vezes, um primeiro passo bastante útil na investigação sobre uma equação diferencial.

Vale a pena fazer duas observações. A primeira é que, para construir um campo de direções, não precisamos resolver a Eq. (6), bastando calcular a função $f(t, y)$ dada muitas vezes. Dessa forma, campos de direção podem ser construídos com facilidade mesmo para equações muito difíceis de resolver. A segunda é que cálculos repetidos de uma função dada é uma tarefa para a qual um computador é particularmente apropriado e você deve, em geral, usar um computador para desenhar um campo de direções. Todos os campos de direção mostrados neste livro, como o da Fig. 1.1.2, foram gerados em um computador.

Ratos do Campo e Corujas. Vamos olhar, agora, um exemplo bem diferente. Considere uma população de ratos do campo que habitam uma certa área rural. Vamos supor que, na ausência de predadores, a população de ratos cresce a uma taxa

proporcional à população atual. Essa hipótese não é uma lei física muito bem estabelecida (como a lei de Newton para o movimento no Exemplo 1), mas é uma hipótese inicial usual[2] em um estudo de crescimento populacional. Se denotarmos o tempo por t e a população de ratos por $p(t)$, então a hipótese sobre o crescimento populacional pode ser expressa pela equação

$$\frac{dp}{dt} = rp, \tag{7}$$

onde o fator de proporcionalidade r é chamado de **taxa constante** ou **taxa de crescimento**. Para sermos específicos, suponhamos que o tempo seja medido em meses e que a taxa r tenha o valor de 0,5 por mês. Então, cada uma das expressões na Eq. (7) tem unidades de ratos/mês.

Vamos aumentar o problema supondo que diversas corujas moram na mesma vizinhança e que elas matam 15 ratos do campo por dia. Para incorporar essa informação ao modelo, precisamos acrescentar uma outra expressão à equação diferencial (7), de modo que ela se transforma em

$$\frac{dp}{dt} = 0{,}5p - 450. \tag{8}$$

Observe que a expressão correspondente à ação do predador é -450 em vez de -15, já que o tempo está sendo medido em meses e o que precisamos é a taxa predatória mensal.

Exemplo 3

Investigue graficamente as soluções da Eq. (8).

A Fig. 1.1.4 mostra um campo de direções para a Eq. (8). Pode-se observar da figura, ou mesmo diretamente da Eq. (8), que, para valores suficientemente grandes de p, dp/dt é positivo, de modo que a solução cresce. Por outro lado, acontece o oposto para valores pequenos de p. Novamente, o valor crítico de p que separa as soluções que crescem das que decrescem é o valor de p para o qual dp/dt é igual a zero. Fazendo dp/dt igual a zero na Eq. (8) e resolvendo, depois, para p, encontramos a solução de equilíbrio $p(t) = 900$, quando as expressões para o crescimento e para a ação predatória na Eq. (8) estão perfeitamente equilibradas. A solução de equilíbrio também está ilustrada na Fig. 1.1.4.

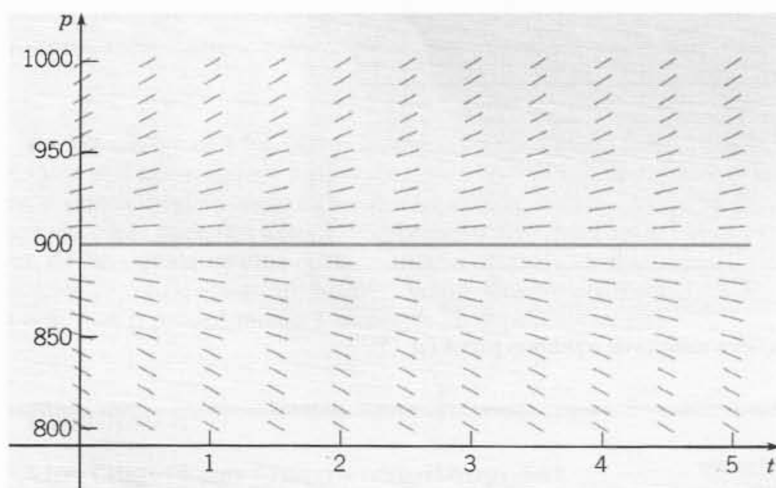


FIG. 1.1.4 Campo de direções e solução de equilíbrio para a Eq. (8).

Comparando os Exemplos 2 e 3, vemos que, em ambos os casos, a solução de equilíbrio separa as soluções crescentes das decrescentes. No Exemplo 2, as outras soluções convergem para a solução de equilíbrio ou são atraídas para ela, de modo que, depois de o objeto cair tempo suficiente, um observador o verá se movendo próximo à velocidade de equilíbrio. Por outro lado, no Exemplo 3 as outras soluções divergem da solução de equilíbrio ou são repelidas por ela. Em ambos os problemas, no entanto, a solução de equilíbrio é muito importante para a compreensão do comportamento das soluções da equação diferencial dada.

Uma versão mais geral da Eq. (8) é

$$\frac{dp}{dt} = rp - k, \tag{9}$$

onde a taxa de crescimento r e a taxa predatória k não estão especificadas. As soluções dessa equação mais geral comportam-se de maneira bem semelhante às soluções da Eq. (8). A solução de equilíbrio da Eq. (9) é $p(t) = k/r$. As soluções acima da solução de equilíbrio crescem, enquanto as que estão abaixo decrescem.

Você deve manter em mente que ambos os modelos discutidos nesta seção têm suas limitações. O modelo (5) do objeto em queda é válido apenas enquanto o objeto está caindo livremente, sem encontrar obstáculos. O modelo populacional (8) prevê a existência, após um longo tempo, de um número negativo (se $p < 900$) ou de um número imenso (se $p > 900$) de ratos. Essas previsões não são realistas, de modo que esse modelo se torna inaceitável após um período de tempo razoavelmente curto.

[2] Um modelo de crescimento populacional um pouco melhor é discutido na Seção 2.5.

A Construção de Modelos Matemáticos. Para se usar as equações diferenciais nos diversos campos em que são úteis é preciso, primeiro, formular a equação diferencial apropriada que descreve, ou modela, o problema em questão. Consideramos, nesta seção, dois exemplos desse processo de modelagem, um vindo da física e outro da ecologia. Ao construir modelos matemáticos futuros, você deve reconhecer que cada problema é diferente e que a arte de modelar não é uma habilidade que pode ser reduzida a uma lista de regras. De fato, a construção de um modelo satisfatório é, algumas vezes, a parte mais difícil de um problema. Apesar disso, pode ser útil listar alguns passos que fazem, freqüentemente, parte do processo:

1. Identifique as variáveis independente e dependente e atribua letras para representá-las. Muitas vezes, a variável independente é o tempo.

2. Escolha as unidades de medida de cada variável. Essa escolha é, de certa forma, arbitrária, mas algumas escolhas podem ser mais convenientes do que outras. Por exemplo, escolhemos medir o tempo em segundos, no caso de um objeto em queda, e em meses no problema populacional.

3. Use o princípio básico subjacente ou a lei que rege o problema em investigação. Isso pode ser uma lei física amplamente reconhecida, como a lei do movimento de Newton, ou pode ser uma hipótese um tanto especulativa baseada na sua própria experiência ou observações. De qualquer modo, essa etapa não será, provavelmente, uma etapa puramente matemática, mas uma em que será necessário familiaridade com o campo de aplicação, onde o problema se originou.

4. Expresse o princípio ou lei do passo 3 em função das variáveis escolhidas no passo 1. Isso pode não ser muito fácil, pois pode necessitar de constantes físicas ou parâmetros (como o coeficiente de resistência do ar no Exemplo 1) e da determinação de valores apropriados para eles. Pode, também, envolver o uso de variáveis auxiliares, ou intermediárias, que têm que estar relacionadas com as variáveis primárias.

5. Certifique-se de que cada parcela em sua equação está nas mesmas medidas físicas. Se isso não acontecer, sua equação está errada e você deve tentar consertá-la. Se as unidades são as mesmas, então sua equação está, pelo menos, consistente do ponto de vista dimensional, embora possa conter outros erros que esse teste não revela.

6. Nos problemas considerados neste texto, o resultado do passo 4 é uma única equação diferencial que constitui o modelo matemático desejado. Lembre-se, no entanto, que, em problemas mais complexos, o modelo matemático resultante pode ser muito mais complicado, podendo envolver, por exemplo, um sistema com várias equações diferenciais.

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Determine o comportamento de y quando $t \to \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y em $t = 0$, descreva essa dependência.

1. $y' = 3 - 2y$
2. $y' = 2y - 3$
3. $y' = 3 + 2y$
4. $y' = -1 - 2y$
5. $y' = 1 + 2y$
6. $y' = y + 2$

Em cada um dos problemas de 7 a 10, escreva uma equação diferencial da forma $dy/dt = ay + b$ cujas soluções têm o comportamento descrito quando $t \to \infty$.

7. Todas as soluções tendem a $y = 3$.
8. Todas as soluções tendem a $y = 2/3$.
9. Todas as outras soluções se afastam de $y = 2$.
10. Todas as outras soluções se afastam de $y = 1/3$.

Nos problemas de 11 a 14, desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando $t \to \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y em $t = 0$, descreva essa dependência. Note que, nesses problemas, as equações não são da forma $y' = ay + b$, e o comportamento de suas soluções é um pouco mais complicado do que o das soluções das equações no texto.

11. $y' = y(4 - y)$
12. $y' = -y(5 - y)$
13. $y' = y^2$
14. $y' = y(y - 2)^2$

Considere a lista a seguir de equações diferenciais, algumas das quais produziram os campos de direção ilustrados nas figuras de 1.1.5 até 1.1.10. Em cada um dos problemas de 15 a 20, identifique a equação diferencial que corresponde ao campo de direções dado.

(a) $y' = 2y - 1$	(b) $y' = 2 + y$
(c) $y' = y - 2$	(d) $y' = y(y + 3)$
(e) $y' = y(y - 3)$	(f) $y' = 1 + 2y$
(g) $y' = -2 - y$	(h) $y' = y(3 - y)$
(i) $y' = 1 - 2y$	(j) $y' = 2 - y$

15. O campo de direções da Fig. 1.1.5.
16. O campo de direções da Fig. 1.1.6.
17. O campo de direções da Fig. 1.1.7.
18. O campo de direções da Fig. 1.1.8.
19. O campo de direções da Fig. 1.1.9.
20. O campo de direções da Fig. 1.1.10.
21. Um pequeno lago contém, inicialmente, 1.000.000 de galões (aproximadamente 4.550.000 litros) de água e uma quantidade desconhecida de um produto químico indesejável. O lago recebe água contendo 0,01 grama dessa substância por galão a uma taxa de 300 galões por hora. A mistura sai à mesma taxa, de modo que a quantidade de água no lago permanece constante. Suponha que o produto químico esteja distribuído uniformemente no lago.
(a) Escreva uma equação diferencial para a quantidade de produto químico no lago em um instante qualquer.
(b) Qual a quantidade do produto químico que estará no lago após um período muito longo de tempo? Essa quantidade-limite depende da quantidade presente inicialmente?
22. Uma gota de chuva esférica evapora a uma taxa proporcional à sua área de superfície. Escreva uma equação diferencial para o volume de uma gota de chuva em função do tempo.
23. A lei do resfriamento de Newton diz que a temperatura de um objeto varia a uma taxa proporcional à diferença entre a temperatura do objeto e a temperatura do meio em que está inserido (a temperatura do ar ambiente, na maior parte dos casos). Suponha que a temperatura ambiente é 70°F (cerca de 21°C) e que a taxa é de 0,05 por minuto. Escreva uma equação diferencial para a temperatura do objeto em qualquer instante t.
24. Um determinado remédio é injetado na veia de um paciente de hospital. O líquido, contendo 5 mg/cm^3 do remédio, entra na corrente sangüínea do paciente a uma taxa de 100 cm^3/h. O remédio é absorvido pelos tecidos do corpo, ou deixa a corrente sangüínea de outro modo, a uma taxa proporcional à quantidade presente, com um coeficiente de proporcionalidade igual a 0,4 h^{-1}.
(a) Supondo que o remédio é distribuído uniformemente na corrente sangüínea, escreva uma equação diferencial para a quanti-

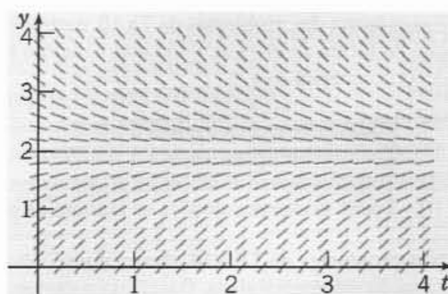


FIG. 1.1.5 Campo de direções para o Problema 15.

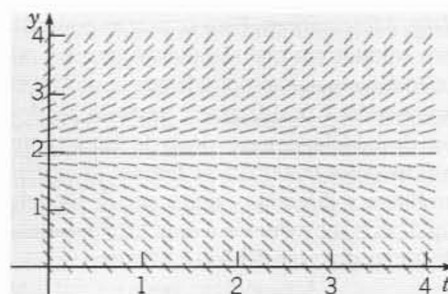


FIG. 1.1.6 Campo de direções para o Problema 16.

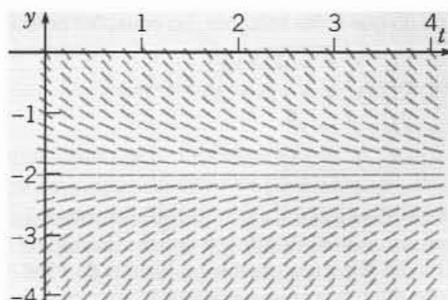


FIG. 1.1.7 Campo de direções para o Problema 17.

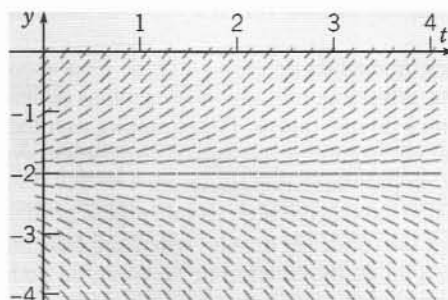


FIG. 1.1.8 Campo de direções para o Problema 18.

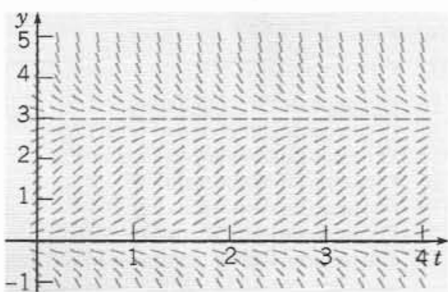


FIG. 1.1.9 Campo de direções para o Problema 19.

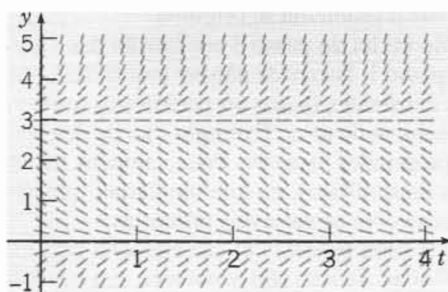


FIG. 1.1.10 Campo de direções para o Problema 20.

dade de remédio presente na corrente sangüínea em qualquer instante de tempo.

(b) Quanto do remédio continua presente na corrente sangüínea após muito tempo?

25. Para objetos pequenos, caindo devagar, a hipótese feita no texto sobre a resistência do ar ser proporcional à velocidade é boa. Para objetos maiores, caindo mais rapidamente, é mais preciso supor que a resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade.[3]

(a) Escreva uma equação diferencial para a velocidade de um objeto em queda de massa m se a resistência do ar é proporcional à velocidade.

(b) Determine a velocidade-limite após um longo período de tempo.

(c) Se $m = 10$ kg, encontre o coeficiente de resistência do ar de modo que a velocidade-limite seja 49 m/s.

(d) Usando os dados em (c), desenhe um campo de direções e compare-o como da Fig. 1.1.3.

[3] Veja Lyle N. Long e Howard Weiss, "The Velocity Dependence of Aerodynamics Drag: A Primer for Mathematicians", *American Mathematical Monthly 106*, (1999), 2, pp. 127-135.

Nos problemas de 26 a 33, desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando $t \to \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y em $t = 0$, descreva essa dependência. Note que a expressão à direita do sinal de igualdade em cada uma dessas equações depende de t, além de depender de y; portanto, suas soluções podem exibir um comportamento mais complicado que as do texto.

26. $y' = -2 + t - y$
27. $y' = te^{-2t} - 2y$
28. $y' = e^{-t} + y$
29. $y' = t + 2y$
30. $y' = 3 \operatorname{sen} t + 1 + y$
31. $y' = 2t - 1 - y^2$
32. $y' = -(2t + y)/2y$
33. $y' = y^3/6 - y - t^2/3$

1.2 Soluções de Algumas Equações Diferenciais

Na seção anterior deduzimos as equações diferenciais

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \gamma v \tag{1}$$

e

$$\frac{dp}{dt} = rp - k. \tag{2}$$

A Eq. (1) modela um objeto em queda e a Eq. (2) uma população de ratos do campo caçados por corujas. Ambas são da forma geral

$$\frac{dy}{dt} = ay - b, \tag{3}$$

onde a e b são constantes dadas. Fomos capazes de descobrir algumas propriedades qualitativas importantes sobre o comportamento de soluções das Eqs. (1) e (2) analisando o campo de direções associado. Para responder perguntas de natureza quantitativa, no entanto, precisamos encontrar as soluções propriamente ditas. Vamos ver, agora, como fazer isso.

Exemplo 1

Ratos do Campo e Corujas (continuação)

Considere a equação

$$\frac{dp}{dt} = 0{,}5p - 450, \tag{4}$$

que descreve a interação de determinadas populações de ratos do campo e corujas [veja a Eq. (8) da Seção 1.1]. Encontre soluções dessa equação.

Para resolver a Eq. (4), precisamos encontrar funções $p(t)$ que, ao serem substituídas na equação, transformam-na em uma identidade óbvia. Um modo de proceder é o seguinte: primeiro, coloque a Eq. (4) na forma

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p - 900}{2}, \tag{5}$$

ou, se $p \neq 900$,

$$\frac{dp/dt}{p - 900} = \frac{1}{2}. \tag{6}$$

Pela regra da cadeia, a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (6) é a derivada de $\ln|p - 900|$ em relação a t, logo temos

$$\frac{d}{dt}\ln|p - 900| = \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Integrando as expressões na Eq. (7), obtemos

$$\ln|p - 900| = \frac{t}{2} + C, \tag{8}$$

onde C é uma constante de integração arbitrária. Portanto, aplicando a exponencial à Eq. (8), vemos que

$$p - 900| = e^{(t/2)+C} = e^C e^{t/2}, \tag{9}$$

ou

$$p - 900 = \pm e^C e^{t/2}, \tag{10}$$

e, finalmente,

$$p = 900 + ce^{t/2}, \tag{11}$$

onde $c = \pm e^C$ é, também, uma constante (não nula) arbitrária. Note que a função constante $p = 900$ também é solução da Eq. (5) e está contida na Eq. (11) se permitirmos que c tome o valor zero. A Fig. 1.2.1 mostra gráficos da Eq. (11) para diversos valores de c.

Note que o comportamento dessas soluções é do tipo inferido pelo campo de direções na Fig. 1.1.4. Por exemplo, soluções em qualquer dos lados da solução de equilíbrio $p = 900$ tendem a se afastar dessa solução.

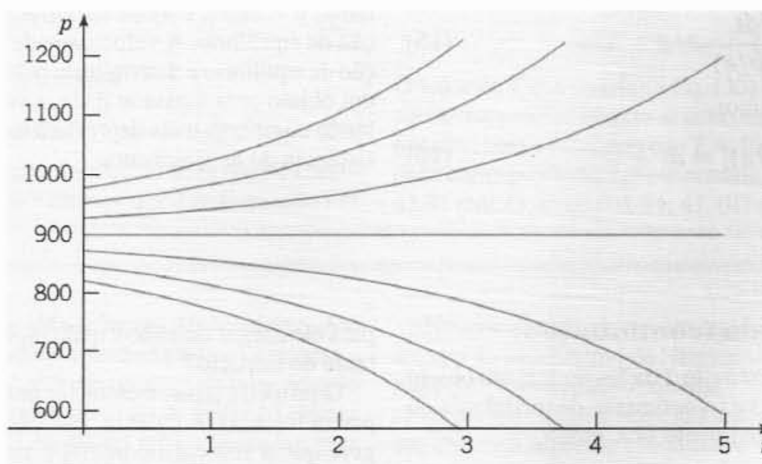


FIG. 1.2.1 Gráficos da Eq. (11) para diversos valores de c.

Encontramos, no Exemplo 1, uma infinidade de soluções da equação diferencial (4), correspondendo à infinidade de valores possíveis que a constante arbitrária c, na Eq. (11), pode assumir. Isso é típico do que acontece ao se resolver uma equação diferencial. O processo de solução envolve uma integração, que traz consigo uma constante arbitrária, cujos valores possíveis geram uma infinidade de soluções.

Vamos querer focalizar nossa atenção, muitas vezes, em um único elemento dessa família infinita de soluções, especificando o valor da constante arbitrária. Na maior parte das vezes, isso é feito indiretamente através de um ponto dado que tem que pertencer ao gráfico da solução. Por exemplo, para determinar a constante c na Eq. (11), poderíamos dar a quantidade de elementos na população em um determinado instante, tal como 850 elementos no instante $t = 0$. Em outras palavras, o gráfico da solução tem que conter o ponto (0, 850). Simbolicamente, essa condição pode ser expressa como

$$p(0) = 850. \tag{12}$$

Substituindo, então, os valores $t = 0$ e $p = 850$ na Eq. (11), obtemos

$$850 = 900 + c.$$

Logo, $c = -50$ e, inserindo esse valor na Eq. (11), obtemos a solução desejada, a saber,

$$p = 900 - 50e^{t/2}. \tag{13}$$

A condição adicional (12) que usamos para determinar c é um exemplo de uma **condição inicial**. A equação diferencial (4) junto com a condição inicial (12) forma um **problema de valor inicial**.

Vamos considerar, agora, o problema mais geral consistindo na equação diferencial (3)

$$\frac{dy}{dt} = ay - b$$

e a condição inicial

$$y(0) = y_0, \tag{14}$$

onde y_0 é um valor inicial arbitrário. Podemos resolver esse problema pelo mesmo método que usamos no Exemplo 1. Se $a \neq 0$ e $y \neq b/a$, então podemos reescrever a Eq. (3) como

$$\frac{dy/dt}{y - (b/a)} = a. \tag{15}$$

Integrando essa equação, obtemos,

$$\ln|y - (b/a)| = at + C, \tag{16}$$

onde C é arbitrário. Aplicando a exponencial na Eq. (16) e resolvendo para y, vemos que

$$y = (b/a) + ce^{at}, \tag{17}$$

onde $c = \pm e^C$ também é arbitrário. Note que $c = 0$ corresponde à solução de equilíbrio $y = b/a$. Finalmente, a condição inicial (14) implica que $c = y_0 - (b/a)$, de modo que a solução do problema de valor inicial (3), (14) é

$$y = (b/a) + [y_0 - (b/a)]e^{at}. \tag{18}$$

A Eq. (17) contém todas as soluções possíveis da Eq. (3) e é chamada de **solução geral**. A representação geométrica da solução geral (17) é uma família infinita de curvas, chamadas de **curvas integrais**. Cada curva integral está associada a um valor particular de c e é o gráfico da solução correspondente àquele valor de c. Satisfazer uma condição inicial significa identificar a curva integral que contém o ponto inicial dado.

Para relacionar a solução (18) à Eq. (2), que modela a população de ratos do campo, basta substituir a pela taxa de crescimento r e b pela taxa predatória k. A solução (18) fica, então,

$$p = (k/r) + [p_0 - (k/r)]e^{rt}, \tag{19}$$

onde p_0 é a população inicial de ratos do campo. A solução (19) confirma as conclusões obtidas baseando-se no campo de direções e no Exemplo 1. Se $p_0 = k/r$, então, segue da Eq. (19) que $p = k/r$ para todo t; essa é a solução constante, ou de equilíbrio. Se $p_0 \neq k/r$, então o comportamento da solução depende do sinal do coeficiente $p_0 - (k/r)$ da exponencial na Eq. (19). Se $p_0 > k/r$, então p cresce exponencialmente com o tempo t; se $p_0 < k/r$, então p decresce e acaba se tornando nulo, o que corresponde à extinção dos ratos. Valores negativos de p, embora sendo possíveis na Eq. (19), não fazem sentido no contexto desse problema particular.

Para colocar a Eq. (1), que descreve a queda de um objeto, na forma (3), precisamos identificar a com $-\gamma/m$ e b com $-g$. Fazendo essas substituições na Eq. (18), obtemos

$$v = (mg/\gamma) + [v_0 - (mg/\gamma)]e^{-\gamma t/m}, \tag{20}$$

onde v_0 é a velocidade inicial. Mais uma vez, essa solução confirma as conclusões a que chegamos na Seção 1.1 baseados no campo de direções. Existe uma solução de equilíbrio, ou constante, $v = mg/\gamma$, e todas as outras soluções tendem a essa solução de equilíbrio. A velocidade de convergência para essa solução de equilíbrio é determinada pelo expoente $-\gamma/m$. Assim, para um objeto com massa m dada, a velocidade se aproxima do valor de equilíbrio mais depressa à medida que o coeficiente da resistência do ar γ aumenta.

Exemplo 2

Um Objeto em Queda (continuação)

Vamos considerar, como no Exemplo 2 da Seção 1.1, um objeto em queda com massa $m = 10$ kg e coeficiente de resistência do ar $\gamma = 2$ kg/s. A Eq. (1) de movimento fica, então,

$$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5}. \tag{21}$$

Suponha que esse objeto cai de uma altura de 300 m. Encontre sua velocidade em qualquer instante t. Quanto tempo vai levar para ele chegar no chão e quão rápido estará se movendo no instante do impacto?

O primeiro passo é enunciar uma condição inicial apropriada para a Eq. (21). A palavra "cai", no enunciado do problema, sugere que a velocidade inicial é zero, de modo que usaremos a condição inicial

$$v(0) = 0. \tag{22}$$

A solução da Eq. (21) pode ser encontrada substituindo-se os valores dos coeficientes na solução (20), mas, em vez disso, va-

mos resolver diretamente a Eq. (21). Em primeiro lugar, coloque a equação na forma

$$\frac{dv/dt}{v-49} = -\frac{1}{5}. \tag{23}$$

Integrando, obtemos

$$\ln|v-49| = -\frac{t}{5} + C, \tag{24}$$

e a solução geral da Eq. (21) é, então,

$$v = 49 + ce^{-t/5}, \tag{25}$$

onde c é arbitrário. Para determinar c, colocamos os valores na condição inicial (22), $t = 0$ e $v = 0$, na Eq. (25), obtendo $c = -49$. Logo, a solução do problema de valor inicial (21), (22) é

$$v = 49(1 - e^{-t/5}). \tag{26}$$

A Eq. (26) dá a velocidade do objeto em queda em qualquer instante positivo (antes de atingir o chão, é claro).

A Fig. 1.2.2 mostra gráficos da solução (25) para diversos valores de c, com a solução (26) destacada por uma linha mais grossa. É evidente que todas as soluções tendem à solução de equilíbrio $v = 49$. Isso confirma as conclusões a que chegamos na Seção 1.1 através da análise dos campos de direção nas Figs. 1.1.2 e 1.1.3.

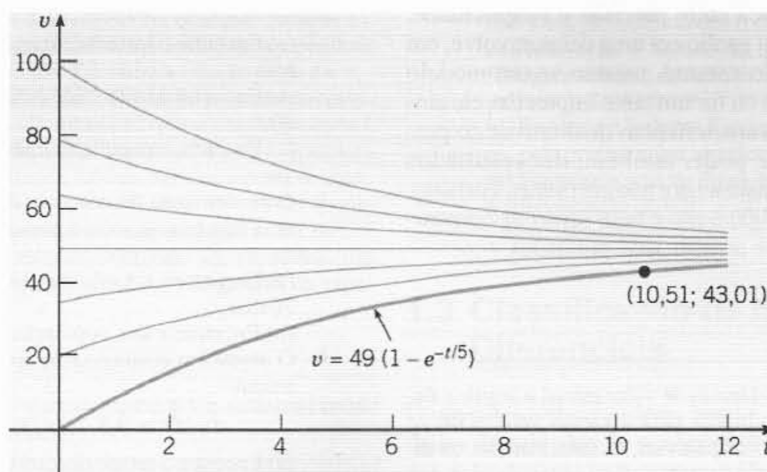


FIG. 1.2.2 Gráficos da solução (25) para diversos valores de c.

Para encontrar a velocidade do objeto quando ele atinge o solo, precisamos saber o instante do impacto. Em outras palavras, precisamos saber quanto tempo leva para o objeto cair 300 m. Para isso, observamos que a distância x percorrida pelo objeto está relacionada à sua velocidade pela equação $v = dx/dt$, ou

$$\frac{dx}{dt} = 49(1 - e^{-t/5}). \tag{27}$$

Portanto, integrando a Eq. (27), obtemos

$$x = 49t + 245e^{-t/5} + c, \tag{28}$$

onde c é uma constante de integração arbitrária. O objeto começa a cair em $t = 0$, de modo que sabemos que $x = 0$ quando $t = 0$. Da Eq. (28), segue que $c = -245$, logo, a distância percorrida pelo objeto até um instante t é dada por

$$x = 49t + 245e^{-t/5} - 245. \tag{29}$$

Seja T o instante em que o objeto atinge o solo; então $x = 300$ quando $t = T$. Substituindo esses valores na Eq. (29), obtemos a equação

$$49T + 245e^{-T/5} - 545 = 0. \tag{30}$$

O valor de T que satisfaz a Eq. (30) pode ser facilmente calculado aproximadamente usando-se uma calculadora científica ou um computador, com o resultado que $T \cong 10{,}51$ s. Nesse instante, a velocidade correspondente v_T é encontrada, da Eq. (26), como sendo $v_T \cong 43{,}01$ m/s. O ponto (10, 51; 43, 01) está ilustrado na Fig. 1.2.2.

Observações Adicionais sobre Modelagem Matemática. Até agora, nossa discussão de equações diferenciais esteve restrita a modelos matemáticos de um objeto em queda e de uma relação hipotética entre ratos do campo e corujas. A dedução desses modelos pode ter sido plausível, ou talvez até convincente, mas você deve lembrar que o teste decisivo de qualquer modelo matemático é se suas previsões coincidem com observações ou resultados experimentais. Não temos nenhuma observação da realidade nem resultados experimentais aqui para comparação, mas existem diversas fontes possíveis de discrepância.

No caso de um objeto em queda, o princípio físico subjacente (a lei do movimento de Newton) está bem estabelecido e é amplamente aplicável. No entanto, a hipótese sobre a resistência do ar ser proporcional à velocidade não está tão comprovada. Mesmo que essa hipótese esteja correta, a determinação do coeficiente γ de resistência do ar através de medidas diretas apresenta dificuldades. De fato, algumas vezes o coeficiente de resistência do ar é encontrado indiretamente, por exemplo, medindo-se o tempo de queda de uma determinada altura e, depois, calculando-se o valor de γ que prevê esse tempo observado.

O modelo populacional dos ratos do campo está sujeito a diversas incertezas. A determinação da taxa de crescimento r e da taxa predatória k depende de observações sobre populações reais, que podem sofrer uma variação considerável. A hipótese de que r e k são constantes também pode ser questionada. Por exemplo, uma taxa predatória constante torna-se difícil de sustentar se a população de ratos do campo torna-se menor. Além disso, o modelo prevê que uma população acima do valor de equilíbrio cresce exponencialmente, ficando cada vez maior. Isso não parece estar de acordo com a observação sobre populações reais; veja a discussão adicional sobre dinâmica populacional na Seção 2.5.

Se as diferenças entre as observações e as previsões de um modelo matemático forem muito grandes, então é necessário refinar o modelo, fazer observações mais cuidadosas, ou ambas as coisas. Sempre há uma troca entre precisão e simplicidade. Ambas são desejáveis, mas um ganho em uma delas envolve, em geral, uma perda na outra. No entanto, mesmo se um modelo matemático estiver incompleto ou for um tanto impreciso, ele ainda pode ser útil para explicar características qualitativas do problema sob investigação. Ele pode, também, dar resultados satisfatórios em algumas circunstâncias e não em outras. Portanto, você deve sempre usar seu julgamento e bom senso na construção de modelos matemáticos e ao usar suas previsões.

Problemas

1. Resolva cada um dos problemas de valor inicial a seguir e desenhe os gráficos das soluções para diversos valores de y_0. Depois descreva, em poucas palavras, as semelhanças, ou diferenças, entre as soluções.
   (a) $dy/dt = -y + 5, \quad y(0) = y_0$
   (b) $dy/dt = -2y + 5, \quad y(0) = y_0$
   (c) $dy/dt = -2y + 10, \quad y(0) = y_0$
2. Siga as instruções do Problema 1 para os problemas de valor inicial a seguir:
   (a) $dy/dt = y - 5, \quad y(0) = y_0$
   (b) $dy/dt = 2y - 5, \quad y(0) = y_0$
   (c) $dy/dt = 2y - 10, \quad y(0) = y_0$
3. Considere a equação diferencial
$$dy/dt = -ay + b,$$
onde a e b são números positivos.
(a) Resolva a equação diferencial.
(b) Esboce a solução para diversas condições iniciais diferentes.
(c) Descreva como as soluções mudam sob cada uma das seguintes condições:
i. a aumenta;
ii. b aumenta;
iii. a e b aumentam, mas a razão b/a permanece constante.
4. Considere a equação diferencial $dy/dt = ay - b$.
(a) Encontre a solução de equilíbrio Y_e.
(b) Seja $Y(t) = y - y_e$; então $Y(t)$ é o desvio da solução de equilíbrio. Encontre a equação diferencial satisfeita por $Y(t)$.
5. **Coeficientes Indeterminados**. Vamos mostrar um modo diferente de resolver a equação
$$dy/dt = ay - b. \qquad \text{(i)}$$
(a) Resolva a equação mais simples
$$dy/dt = ay. \qquad \text{(ii)}$$
Chame a solução de $y_1(t)$.
(b) Observe que a única diferença entre as Eqs. (i) e (ii) é a constante $-b$ na Eq. (i). Parece razoável, portanto, supor que as soluções dessas duas equações diferem apenas por uma constante. Teste essa hipótese tentando encontrar uma constante k tal que $y = y_1(t) + k$ é uma solução da Eq. (i).
(c) Compare sua solução em (b) com a dada no texto pela Eq. (17).
Obs.: Esse método também pode ser usado em alguns casos em que a constante b é substituída por uma função $g(t)$. Depende de você ser capaz de prever a forma que a solução deve ter. Esse método é descrito em detalhe na Seção 3.6 em conexão com equações de segunda ordem.
6. Use o método do Problema 5 para resolver a equação
$$dy/dt = -ay + b.$$
7. A população de ratos do campo no Exemplo 1 satisfaz a equação diferencial
$$dp/dt = 0{,}5p - 450.$$
(a) Encontre o instante em que a população é extinta se $p(0) = 850$.
(b) Encontre o instante de extinção se $p(0) = p_0$, onde $0 < p_0 < 900$.
(c) Encontre a população inicial se a população é extinta em 1 ano.
8. Considere uma população p de ratos do campo que crescem a uma taxa proporcional à população atual, de modo que $dp/dt = rp$.
(a) Encontre a taxa de crescimento r se a população dobra em 30 dias.
(b) Encontre r se a população dobra em N dias.
9. O objeto em queda no Exemplo 2 satisfaz o problema de valor inicial
$$dv/dt = 9{,}8 - (v/5), \qquad v(0) = 0.$$
(a) Encontre o tempo decorrido quando o objeto atinge 98% de sua velocidade-limite.
(b) Qual a distância percorrida pelo objeto até o instante encontrado no item (a)?
10. Modifique o Exemplo 2 de modo que o objeto em queda não sofra resistência do ar.
(a) Escreva o problema de valor inicial modificado.
(b) Determine quanto tempo leva para o objeto atingir o solo.
(c) Determine sua velocidade no instante de impacto.
11. Considere o objeto em queda de massa 10 kg no Exemplo 2, mas suponha que a resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade.
(a) Se a velocidade-limite é 49 m/s (a mesma que no Exemplo 2), mostre que a equação de movimento pode ser escrita como
$$dv/dt = [(49)^2 - v^2]/245.$$
Veja, também, o Problema 25 da Seção 1.1.
(b) Se $v(0) = 0$, encontre uma expressão para $v(t)$ em qualquer instante t.
(c) Faça os gráficos da solução encontrada em (b) e da solução (26) do Exemplo (2) no mesmo conjunto de eixos.
(d) Baseado em seus gráficos do item (c), compare o efeito de uma resistência quadrática com uma linear.
(e) Encontre a distância $x(t)$ percorrida pelo objeto até o instante t.
(f) Encontre o tempo T necessário para que o objeto percorra 300 metros.
12. Um material radioativo, tal como um dos isótopos de tório, o tório-234, desintegra a uma taxa proporcional à quantidade presente. Se $Q(t)$ é a quantidade presente no instante t, então $dQ/dt = -rQ$, onde $r > 0$ é a taxa de decaimento.
(a) Se 100 mg de tório-234 decaem a 82,04 mg em 1 semana, determine a taxa de decaimento r.
(b) Encontre uma equação para a quantidade de tório-234 presente em qualquer instante t.

(c) Encontre o tempo necessário para que o tório-234 decaia à metade da quantidade original.

13. A **meia-vida** de um material radioativo é o tempo necessário para que uma quantidade desse material decaia à metade de sua quantidade original. Mostre que, para qualquer material radioativo que decaia de acordo com a equação $Q' = -rQ$, a meia-vida τ e a taxa de decaimento r estão relacionadas pela equação $r\tau = \ln 2$.

14. O rádio-226 tem uma meia-vida de 1620 anos. Encontre o tempo necessário para que uma determinada quantidade desse material seja reduzida da quarta parte.

15. De acordo com as leis do resfriamento de Newton (veja o Problema 23 da Seção 1.1), a temperatura $u(t)$ de um objeto satisfaz a equação diferencial

$$du/dt = -k(u - T),$$

onde T é a temperatura ambiente constante e k é uma constante positiva. Suponha que a temperatura inicial do objeto é $u(0) = u_0$.
(a) Encontre a temperatura do objeto em qualquer instante t.
(b) Seja τ o instante no qual a diferença inicial de temperatura $u_0 - T$ foi reduzida à metade. Encontre a relação entre k e τ.

16. Suponha que um prédio perde calor de acordo com a lei do resfriamento de Newton (veja o Problema 15) e que a taxa constante k tem o valor 0,15/h. Suponha que o interior está a uma temperatura de 70°F (cerca de 21°C) quando há uma falha no sistema de aquecimento. Se a temperatura externa é 10°F (cerca de −12°C), quanto tempo vai levar para a temperatura no interior chegar a 32°F (0°C)?

17. Considere um circuito elétrico contendo um capacitor, um resistor e uma bateria; veja a Fig. 1.2.3. A carga $Q(t)$ no capacitor satisfaz a equação[4]

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V,$$

onde R é a resistência, C a capacitância e V a voltagem constante fornecida pela bateria.

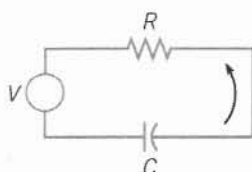


FIG. 1.2.3 O circuito elétrico do Problema 17.

(a) Se $Q(0) = 0$, encontre $Q(t)$ em qualquer instante t e esboce o gráfico de Q em função de t.
(b) Encontre o valor-limite Q_L para onde $Q(t)$ tende após um longo período de tempo.
(c) Suponha que $Q(t_1) = Q_L$ e que, no instante $t = t_1$, a bateria é removida e o circuito é fechado novamente. Encontre $Q(t)$ para $t > t_1$ e esboce seu gráfico.

18. Um pequeno lago contendo 1.000.000 de galões (cerca de 4.550.000 litros) de água não contém, inicialmente, um produto químico indesejável (veja o Problema 21 da Seção 1.1). O lago recebe água contendo 0,01 g/gal a uma taxa de 300 gal/h e a água sai do lago à mesma taxa. Suponha que o produto químico esteja distribuído uniformemente no lago.
(a) Seja $Q(t)$ a quantidade de produto químico no lago no instante t. Escreva um problema de valor inicial para $Q(t)$.
(b) Resolva o problema no item (a) para $Q(t)$. Quanto produto químico o lago terá ao final de 1 ano?
(c) Ao final de 1 ano, a fonte do produto químico despejado no lago é retirada; a partir daí, o lago recebe água pura e a mistura sai à mesma taxa de antes. Escreva o problema de valor inicial que descreve essa nova situação.
(d) Resolva o problema de valor inicial do item (c). Qual a quantidade de produto químico que ainda permanece no lago após mais 1 ano (2 anos após o início do problema)?
(e) Quanto tempo vai levar para que $Q(t)$ seja igual a 10 g?
(f) Faça o gráfico de $Q(t)$ em função de t para t até 3 anos.

19. Sua piscina, contendo 60.000 galões (cerca de 273.000 litros) de água, foi contaminada por 5 kg de uma tinta não tóxica que deixa a pele de um nadador com uma cor verde nada atraente. O sistema de filtragem da piscina pode retirar a água, remover a tinta e devolver água para a piscina a uma taxa de 200 gal/min.
(a) Escreva o problema de valor inicial para o processo de filtragem; seja $q(t)$ a quantidade de tinta na piscina em qualquer instante t.
(b) Resolva o problema encontrado em (a).
(c) Você convidou diversas dúzias de amigos para uma festa em torno da piscina que está marcada para começar em 4 horas. Você já verificou que o efeito da tinta é imperceptível se a concentração é menor do que 0,02 g/gal. Seu sistema de filtragem é capaz de reduzir a concentração de tinta a esse nível dentro de 4 horas?
(d) Encontre o instante T em que a concentração de tinta alcança, pela primeira vez, o valor de 0,02 g/gal.
(e) Encontre a taxa do fluxo de água que é suficiente para obter a concentração de 0,02 g/gal dentro de 4 horas.

1.3 Classificação de Equações Diferenciais

O objetivo principal deste livro é discutir algumas das propriedades de soluções de equações diferenciais e apresentar alguns dos métodos que se mostraram eficazes para encontrar soluções ou, em alguns casos, aproximá-las. Com o objetivo de fornecer uma estrutura organizacional para a nossa apresentação, vamos descrever, agora, diversas maneiras úteis de se classificar equações diferenciais.

Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais. Uma das classificações mais óbvias é baseada em se descobrir se a função desconhecida depende de uma única variável independente ou de diversas variáveis independentes. No primeiro caso, aparecem na equação diferencial apenas derivadas simples e ela é dita **equação diferencial ordinária**. No segundo caso, as derivadas são derivadas parciais e a equação é chamada de **equação diferencial parcial**.

Todas as equações diferenciais discutidas nas duas seções precedentes são equações diferenciais ordinárias. Um outro exemplo de uma equação diferencial ordinária é

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = E(t), \tag{1}$$

para a carga $Q(t)$ em um capacitor em um circuito com capacitância C, resistência R e indutância L: essa equação é deduzida na Seção 3.8. Exemplos típicos de equações diferenciais parciais são a equação de calor

$$\alpha^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \tag{2}$$

e a equação de onda

$$a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \tag{3}$$

[4] Essa equação resulta das leis de Kirchhoff, que são discutidas mais tarde, na Seção 3.8.

Aqui, α^2 e a^2 são certas constantes físicas. A equação de calor descreve a condução de calor em um corpo sólido, e a equação de onda aparece em uma variedade de problemas envolvendo movimento ondulatório em sólidos ou fluidos. Note que nas Eqs. (2) e (3) a variável dependente u depende das duas variáveis independentes x e t.

Sistemas de Equações Diferenciais. Uma outra classificação de equações diferenciais depende do número de funções desconhecidas. Se existe uma única função a ser determinada, uma equação é suficiente. Se existem, no entanto, duas ou mais funções que devem ser determinadas, precisamos de um sistema de equações. Por exemplo, as equações de Lotka-Volterra, ou equações predador-presa, são importantes em modelagem ecológica. Elas têm a forma

$$\begin{aligned} dx/dt &= ax - \alpha xy \\ dy/dt &= -cy + \gamma xy, \end{aligned} \tag{4}$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são as populações respectivas das espécies presa e predadora. As constantes a, α, c e γ são baseadas em observações empíricas e dependem das espécies particulares em estudo. Sistemas de equações são discutidos nos Caps. 7 e 9; em particular, as equações de Lotka-Volterra são examinadas na Seção 9.5. Não é fora do comum, em algumas áreas, encontrar sistemas muito grandes contendo centenas, ou até milhares de equações.

Ordem. A **ordem** de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação. As equações nas seções anteriores são todas de primeira ordem, enquanto a Eq. (1) é uma equação de segunda ordem. As Eqs. (2) e (3) são equações diferenciais parciais de segunda ordem. Mais geralmente, a equação

$$F[t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n)}(t)] = 0 \tag{5}$$

é uma equação diferencial ordinária de ordem n. A Eq. (5) expressa uma relação entre a variável independente t e os valores da função u e de suas n primeiras derivadas, $u', u'', \dots, u^{(n)}$. É conveniente, e usual, substituir $u(t)$ por y e $u'(t), u''(t), \dots, u^{(n)}(t)$ por $y', y'', \dots, y^{(n)}$. Assim, a Eq. (5) fica

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{6}$$

Por exemplo,

$$y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4 \tag{7}$$

é uma equação diferencial de terceira ordem para $y = u(t)$. Algumas vezes, outras letras serão usadas no lugar de t e y para as variáveis independentes e dependentes; o significado deve ficar claro pelo contexto.

Vamos supor que é sempre possível resolver uma equação diferencial ordinária dada para a maior derivada, obtendo

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \tag{8}$$

Estudaremos apenas equações da forma (8). A razão principal disso é evitar ambigüidades que possam aparecer, já que uma única equação da forma (6) pode corresponder a diversas equações da forma (8). Por exemplo, a equação

$$y'^2 + ty' + 4y = 0 \tag{9}$$

leva a duas equações,

$$y' = \frac{-t + \sqrt{t^2 - 16y}}{2} \quad \text{ou} \quad y' = \frac{-t - \sqrt{t^2 - 16y}}{2}. \tag{10}$$

Equações Lineares e Não-Lineares. Uma classificação crucial de equações diferenciais é se elas são lineares ou não. A equação diferencial

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

é dita **linear** se F é uma função linear das variáveis $y, y', \dots, y^{(n)}$; uma definição análoga se aplica às equações diferenciais parciais. Assim, a equação diferencial ordinária linear geral de ordem n é

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = g(t). \tag{11}$$

A maioria das equações que vimos até agora neste livro são lineares; exemplos são as equações nas Seções 1.1 e 1.2 que descrevem um objeto em queda e a população de ratos do campo. Analogamente, nesta seção, a Eq. (1) é uma equação diferencial ordinária linear e as Eqs. (2) e (3) são equações diferenciais parciais lineares. Uma equação que não é da forma (11) é uma equação **não-linear**. A Eq. (7) é não-linear devido à expressão yy'. Analogamente, cada equação no sistema (4) é não-linear, por causa de expressões envolvendo o produto xy.

Um problema físico simples que leva a uma equação diferencial não-linear é o problema do pêndulo. O ângulo θ que um pêndulo de comprimento L oscilando faz com a direção vertical (veja a Fig. 1.3.1) satisfaz a equação

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \operatorname{sen}\theta = 0, \tag{12}$$

cuja dedução está delineada nos problemas de 29 a 31. A presença da parcela envolvendo sen θ faz com que a Eq. (12) seja não-linear.

A teoria matemática e os métodos para resolver equações lineares estão bastante desenvolvidos. Em contraste, a teoria para equações não-lineares é mais complicada e os métodos de resolução são menos satisfatórios. Em vista disso, é auspicioso que muitos problemas significativos levam a equações diferenciais ordinárias lineares ou que podem ser aproximadas por equações lineares. Por exemplo, para o pêndulo, se o ângulo θ for pequeno, então sen $\theta \cong \theta$ e a Eq. (12) pode ser aproximada pela equação linear

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0. \tag{13}$$

Esse processo de aproximar uma equação não-linear por uma linear é chamado de **linearização** e é extremamente útil para tratar equações não-lineares. Apesar disso, existem muitos fenômenos físicos que não podem ser representados adequadamente por equações lineares. Para estudar esses fenômenos é imprescindível lidar com equações não-lineares.

Em um texto elementar, é natural enfatizar as partes mais simples e diretas do assunto. Portanto, a maior parte deste livro trata de equações lineares e diversos métodos para resolvê-las. No

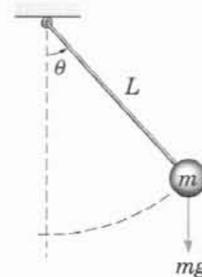


FIG. 1.3.1 Um pêndulo oscilando.

entanto, os Caps. 8 e 9, assim como partes do Cap. 2, consideram equações não-lineares. Sempre que for apropriado, vamos observar por que as equações não-lineares são, em geral, mais difíceis e por que muitas das técnicas úteis na resolução de equações lineares não podem ser aplicadas às equações não-lineares.

Soluções. Uma **solução** da equação diferencial ordinária (8) no intervalo $\alpha < t < \beta$ é uma função ϕ tal que $\phi', \phi'', \ldots, \phi^{(n)}$ existem e satisfazem

$$\phi^{(n)}(t) = f[t, \phi(t), \phi'(t), \ldots, \phi^{(n-1)}(t)] \qquad (14)$$

para todo t em $\alpha < t < \beta$. A menos que explicitado o contrário, vamos supor que a função f na Eq. (8) toma valores reais e que estamos interessados em encontrar soluções reais $y = \phi(t)$.

Encontramos, na Seção 1.2, soluções de determinadas equações por um processo de integração direta. Por exemplo, vimos que a equação

$$\frac{dp}{dt} = 0{,}5p - 450 \qquad (15)$$

tem solução

$$p = 900 + ce^{t/2}, \qquad (16)$$

onde c é uma constante arbitrária. Muitas vezes não é tão fácil encontrar soluções de equações diferenciais. No entanto, se você encontrar uma função que pode ser solução de uma equação diferencial dada, é muito fácil, em geral, verificar se a função é de fato solução: basta substituir a função na equação. Por exemplo, dessa maneira é fácil mostrar que a função $y_1(t) = \cos t$ é uma solução de

$$y'' + y = 0 \qquad (17)$$

para todo t. Para confirmar isso, note que $y_1'(t) = -\text{sen}\, t$ e $y_1''(t) = -\cos t$; temos, então, $y_1''(t) + y_1(t) = 0$. Da mesma forma, é fácil mostrar que $y_2(t) = \text{sen}\, t$ também é solução da Eq. (17). É claro que isso não é um modo satisfatório de resolver a maioria das equações diferenciais, já que existe um número grande demais de funções possíveis para que se tenha alguma chance de encontrar a função correta aleatoriamente. De qualquer modo, você deve compreender que é possível verificar se qualquer solução proposta está correta substituindo-a na equação diferencial. Para qualquer problema importante para você, essa pode ser uma verificação útil e você deve transformar essa verificação em hábito.

Algumas Questões Relevantes. Embora tenhamos sido capazes de verificar que determinadas funções simples são soluções das Eqs. (15) e (17), não temos, em geral, tais soluções disponíveis. Uma questão fundamental, então, é a seguinte: uma equação da forma (8) sempre tem solução? A resposta é "não". Escrever, simplesmente, uma equação da forma (8) não significa, necessariamente, que existe uma função $y = \phi(t)$ que a satisfaça. Como podemos saber, então, se uma determinada equação tem solução? Essa é a questão de *existência* de solução e é respondida por teoremas que afirmam que, sob certas condições sobre a função f na Eq. (8), a equação sempre tem solução. Essa não é, no entanto, uma preocupação puramente matemática por, pelo menos, duas razões. Se um problema não tem solução, gostaríamos de saber disso antes de investir tempo e esforço na tentativa de resolvê-lo. Além disso, se um problema físico razoável está sendo modelado matematicamente por uma equação diferencial, então a equação deveria ter solução. Se não tiver, presume-se que há algo de errado com a formulação. Nesse sentido, o engenheiro ou cientista pode verificar se o modelo matemático é válido.

Se supusermos que uma equação diferencial dada tem pelo menos uma solução, uma segunda questão natural se apresenta, a saber, quantas soluções ela tem e que condições adicionais devem ser especificadas para se obter uma única solução. Essa é a questão de *unicidade*. Em geral, soluções de equações diferenciais contêm uma ou mais constantes arbitrárias, como a solução (16) da Eq. (15). A Eq. (16) representa uma infinidade de funções, correspondendo à infinidade de escolhas possíveis para a constante c. Como vimos na Seção 1.2, se p for especificado em um instante t, essa condição determina um valor para c; mesmo assim, não descartamos a possibilidade de que possam existir outras soluções da Eq. (15) para as quais p tem o valor especificado no instante t dado. Essa questão de unicidade também tem implicações práticas. Se formos suficientemente felizes para encontrar uma solução de um problema dado e se soubermos que o problema tem uma única solução, então podemos ter certeza de que resolvemos completamente o problema. Se existem outras soluções, talvez devamos continuar procurando.

Uma terceira questão importante é: dada uma equação diferencial da forma (8), podemos determinar, de fato, uma solução? E, se for esse o caso, como? Note que, se encontrarmos uma solução da equação dada, respondemos, ao mesmo tempo, a questão de existência de solução. No entanto, sem conhecer a teoria de existência poderíamos, por exemplo, usar um computador para encontrar uma aproximação numérica para uma "solução" que não existe. Por outro lado, mesmo sabendo que a solução existe, pode não ser possível expressá-la em termos das funções elementares usuais — funções polinomiais, trigonométricas, exponenciais, logarítmicas e hiperbólicas. Infelizmente, essa é a situação para a maioria das equações diferenciais. Assim, discutimos tanto métodos elementares que podem ser usados para se obter soluções de determinados problemas relativamente simples, como, também, métodos de natureza mais geral que podem ser usados para se aproximar soluções de problemas mais difíceis.

Uso de Computadores em Equações Diferenciais. Um computador pode ser uma ferramenta extremamente útil no estudo de equações diferenciais. Há muitos anos os computadores têm sido utilizados para executar algoritmos numéricos, como os descritos no Cap. 8, que constroem aproximações numéricas para soluções de equações diferenciais. Esses algoritmos foram refinados a um nível extremamente alto de generalidade e eficiência. Algumas poucas linhas de código, escritas em uma linguagem de programação de alto nível e executadas (em alguns segundos, freqüentemente) em um computador relativamente barato, são suficientes para aproximar, com bastante precisão, soluções de um amplo espectro de equações diferenciais. Rotinas mais sofisticadas também estão disponíveis com facilidade. Essas rotinas combinam a habilidade de tratar sistemas muito grandes e complicados com diversas características de diagnósticos, que alertam o usuário quanto a problemas possíveis à medida que vão sendo encontrados.

A saída usual de um algoritmo numérico é uma tabela de números, listando valores selecionados da variável independente e os valores correspondentes da variável dependente. Com programas apropriados, é fácil mostrar graficamente a solução de uma equação diferencial, quer ela tenha sido obtida numericamente ou como resultado de um procedimento analítico de alguma espécie. Tais apresentações gráficas são, com freqüência, mais claras e úteis para a compreensão e interpretação da solução de uma equação diferencial do que uma tabela de números ou uma fórmula analítica complicada. Existem diversos paco-

tes de programas especiais no mercado, muito bem construídos e relativamente baratos, para a investigação gráfica de equações diferenciais. A ampla disponibilidade de computadores pessoais tornou acessíveis para os estudantes poderosas capacidades computacional e gráfica. Você deve considerar, dependendo de suas circunstâncias, como aproveitar melhor os recursos computacionais disponíveis. Você certamente achará isso instrutivo.

Um outro aspecto da utilização de computadores bastante relevante para o estudo de equações diferenciais é a disponibilidade de pacotes gerais extremamente poderosos que podem efetuar uma gama muito grande de operações matemáticas. Entre esses estão o *Maple*, o *Mathematica* e o MATLAB, cada um dos quais pode ser usado em diversos tipos de computadores pessoais ou estações. Todos esses três programas podem executar cálculos numéricos extensos e têm facilidades gráficas versáteis. O *Maple* e o *Mathematica* também têm capacidades analíticas muito grandes. Por exemplo, podem executar passos analíticos necessários para a resolução de equações diferenciais, muitas vezes em resposta a um único comando. Qualquer pessoa que espera tratar equações diferenciais de um modo mais do que superficial deve se tornar familiar com pelo menos um desses produtos e explorar de que maneiras pode ser usado.

Para você, estudante, esses recursos computacionais afetam a maneira de estudar equações diferenciais. Para se tornar confiante no uso de equações diferenciais, é essencial compreender como os métodos de solução funcionam, e essa compreensão é obtida, em parte, fazendo-se um número suficiente de exemplos detalhadamente. No entanto, você deve planejar, após algum treino, delegar, tanto quanto possível, os detalhes de rotina (muitas vezes repetitivos) a um computador, enquanto você presta mais atenção à formulação correta do problema e à interpretação da solução. Nosso ponto de vista é que você deve sempre tentar usar os melhores métodos e ferramentas disponíveis para cada tarefa. Em particular, você deve tentar combinar métodos numéricos, gráficos e analíticos de modo a obter a maior compreensão possível sobre o comportamento da solução e dos processos subjacentes que o problema modela. Você deve se lembrar, também, de que algumas tarefas são executadas melhor com lápis e papel, enquanto outras necessitam de uma calculadora ou um computador. Muitas vezes é necessário ter bom senso para selecionar uma combinação equilibrada.

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, determine a ordem da equação diferencial e diga se ela é linear ou não-linear.

1. $t^2\dfrac{d^2y}{dt^2} + t\dfrac{dy}{dt} + 2y = \operatorname{sen} t$
2. $(1 + y^2)\dfrac{d^2y}{dt^2} + t\dfrac{dy}{dt} + y = e^t$
3. $\dfrac{d^4y}{dt^4} + \dfrac{d^3y}{dt^3} + \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + y = 1$
4. $\dfrac{dy}{dt} + ty^2 = 0$
5. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \operatorname{sen}(t + y) = \operatorname{sen} t$
6. $\dfrac{d^3y}{dt^3} + t\dfrac{dy}{dt} + (\cos^2 t)y = t^3$

Nos problemas de 7 a 14, verifique que cada função dada é uma solução da equação diferencial.

7. $y'' - y = 0; \quad y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = \cosh t$
8. $y'' + 2y' - 3y = 0; \quad y_1(t) = e^{-3t}, \quad y_2(t) = e^t$
9. $ty' - y = t^2; \quad y = 3t + t^2$
10. $y'''' + 4y''' + 3y = t; \quad y_1(t) = t/3, \quad y_2(t) = e^{-t} + t/3$
11. $2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t^{1/2}, \quad y_2(t) = t^{-1}$
12. $t^2y'' + 5ty' + 4y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t^{-2}, \quad y_2(t) = t^{-2}\ln t$
13. $y'' + y = \sec t, \quad 0 < t < \pi/2; \quad y = (\cos t)\ln\cos t + t \operatorname{sen} t$
14. $y' - 2ty = 1; \quad y = e^{t^2}\displaystyle\int_0^t e^{-s^2}\,ds + e^{t^2}$

Nos problemas de 15 a 18, determine os valores de r para os quais a equação diferencial dada tem uma solução da forma $y = e^{rt}$.

15. $y' + 2y = 0$
16. $y'' - y = 0$
17. $y'' + y' - 6y = 0$
18. $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

Nos problemas 19 e 20, determine os valores de r para os quais a equação diferencial dada tem uma solução da forma $y = t^r$ para $t > 0$.

19. $t^2y'' + 4ty' + 2y = 0$
20. $t^2y'' - 4ty' + 4y = 0$

Nos problemas de 21 a 24, determine a ordem da equação diferencial parcial dada e diga se ela é linear ou não-linear. Derivadas parciais são denotadas por índices.

21. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$
22. $u_{xx} + u_{yy} + uu_x + uu_y + u = 0$
23. $u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0$
24. $u_t + uu_x = 1 + u_{xx}$

Nos problemas de 25 a 28, verifique que cada função dada é uma solução da equação diferencial.

25. $u_{xx} + u_{yy} = 0;$
    $u_1(x, y) = \cos x \cosh y, \quad u_2(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
26. $\alpha^2 u_{xx} = u_t;$
    $u_1(x, t) = e^{-\alpha^2 t} \operatorname{sen} x, \quad u_2(x, t) = e^{-\alpha^2\lambda^2 t} \operatorname{sen} \lambda x,$
    λ uma constante real
27. $a^2 u_{xx} = u_{tt};$
    $u_1(x, t) = \operatorname{sen}\lambda x \operatorname{sen}\lambda at, \quad u_2(x, t) = \operatorname{sen}(x - at),$
    λ uma constante real
28. $\alpha^2 u_{xx} = u_t;$
    $u = (\pi/t)^{1/2} e^{-x^2/4\alpha^2 t}, \quad t > 0$
29. Siga os passos indicados aqui para deduzir a equação de movimento de um pêndulo, Eq. (12) no texto. Suponha que a barra do pêndulo é rígida e sem peso, que a massa é pontual e que não existe atrito ou resistência em algum ponto do sistema.
    (a) Suponha que a massa está em uma posição deslocada arbitrária, indicada pelo ângulo θ. Desenhe um diagrama mostrando as forças que agem sobre a massa.
    (b) Aplique a lei do movimento de Newton na direção tangencial ao arco circular sobre o qual a massa se move. Então, a força de tensão sobre a barra não aparece na equação. Note que é necessário encontrar a componente da força gravitacional na direção tangencial. Note, também, que a aceleração linear (para diferenciá-la da aceleração angular) é $Ld^2\theta/dt^2$, onde L é o comprimento da barra.
    (c) Simplifique o resultado obtido no item (b) para obter a Eq. (12) do texto.

30. Um outro modo de obter a equação do pêndulo (12) baseia-se no princípio de conservação de energia.
(a) Mostre que a energia cinética T do pêndulo em movimento é

$$T = \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

(b) Mostre que a energia potencial V do pêndulo, em relação à sua posição de repouso, é

$$V = mgL(1 - \cos\theta).$$

(c) Pelo princípio de conservação de energia, a energia total $E = T + V$ é constante. Calcule dE/dt, iguale a zero e mostre que a equação resultante pode ser reduzida à Eq. (12).

31. Uma terceira dedução da equação do pêndulo depende do princípio do momento angular: a taxa de variação do momento angular em torno de um ponto é igual ao momento externo total em torno do mesmo ponto.
(a) Mostre que o momento angular M em torno do ponto de apoio é dado por $M = mL^2d\theta/dt$.
(b) Iguale dM/dt ao momento da força gravitacional e mostre que a equação resultante pode ser reduzida à Eq. (12). Note que os momentos positivos são no sentido trigonométrico.

1.4 Notas Históricas

Sem saber alguma coisa sobre equações diferenciais e métodos para resolvê-las é difícil apreciar a história desse ramo importante da matemática. Além disso, o desenvolvimento das equações diferenciais está intimamente ligado ao desenvolvimento geral da matemática e não pode ser separado dele. Apesar disso, para fornecer alguma perspectiva histórica, vamos indicar aqui algumas das tendências principais na história desse assunto e identificar os matemáticos atuantes no período inicial de desenvolvimento que mais se destacaram. Outras informações históricas estão contidas em notas de rodapé ao longo do livro e nas referências listadas ao final do capítulo.

As equações diferenciais começaram com o estudo de cálculo por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) durante o século XVII. Newton cresceu no interior da Inglaterra, foi educado no Trinity College, em Cambridge, e se tornou Professor de Matemática, na cadeira Lucasian, em 1669. Suas descobertas sobre o cálculo e as leis da mecânica datam de 1665. Elas circularam privadamente entre seus amigos, mas Newton era muito sensível a críticas e só começou a publicar seus resultados a partir de 1687, quando apareceu seu livro mais famoso, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Embora Newton tenha atuado relativamente pouco na área de equações diferenciais propriamente dita, seu desenvolvimento do cálculo e a elucidação dos princípios básicos da mecânica forneceram a base para a aplicação das equações diferenciais no século XVIII, especialmente por Euler. Newton classificou as equações diferenciais de primeira ordem de acordo com as formas $dy/dx = f(x)$, $dy/dx = f(y)$ e $dy/dx = f(x, y)$. Ele desenvolveu um método para resolver a última equação, no caso em que $f(x, y)$ é um polinômio em x e y, usando séries infinitas. Newton parou de fazer pesquisa matemática no início da década de 1690, exceto pela solução de "problemas desafiadores" ocasionais e pela revisão e publicação de resultados obtidos anteriormente. Foi nomeado Warden of the British Mint (responsável pela Casa da Moeda britânica) em 1696 e pediu demissão da sua posição de professor alguns anos depois. Recebeu o título de cavaleiro em 1705 e, após sua morte, foi enterrado na capela de Westminster.

Leibniz nasceu em Leipzig e completou seu doutorado em filosofia na Universidade de Altdorf quando tinha 20 anos. Ao longo de sua vida, engajou-se em atividades acadêmicas em diversos campos diferentes. Era basicamente autodidata em matemática, já que seu interesse no assunto desenvolveu-se quando tinha vinte e poucos anos. Leibniz chegou aos resultados fundamentais do cálculo independentemente, embora um pouco depois de Newton, mas foi o primeiro a publicá-los, em 1684. Leibniz compreendia o poder de uma boa notação matemática, e a nossa notação para derivada, dy/dx, e o sinal de integral são devidos a ele. Descobriu o método de separação de variáveis (Seção 2.2) em 1691, a redução de equações homogêneas a equações separáveis (Seção 2.2, Problema 30) em 1691 e o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem (Seção 2.1) em 1694. Passou sua vida como embaixador e conselheiro de diversas famílias reais alemãs, o que permitiu que viajasse muito e mantivesse uma correspondência, extensa com outros matemáticos, especialmente os irmãos Bernoulli. No decorrer dessa correspondência, foram resolvidos muitos problemas em equações diferenciais durante a parte final do século XVII.

Os irmãos Jakob (1654-1705) e Johann (1667-1748) Bernoulli, de Basel, fizeram muito sobre o desenvolvimento de métodos para resolver equações diferenciais e para ampliar o campo de suas aplicações. Jakob tornou-se professor de matemática em Basel em 1687, e Johann foi nomeado para a mesma posição quando seu irmão faleceu, em 1705. Ambos eram briguentos, ciumentos e estavam freqüentemente envolvidos em disputas, especialmente entre si. Apesar disso, ambos fizeram contribuições significativas em diversas áreas da matemática. Com a ajuda do cálculo, resolveram diversos problemas em mecânica, formulando-os como equações diferenciais. Por exemplo, Jakob Bernoulli resolveu a equação diferencial $y' = [a^3/(b^2y - a^3)]^{1/2}$ em 1690 e, no mesmo artigo, usou pela primeira vez a palavra "integral" no sentido moderno. Em 1694, Johann Bernoulli foi capaz de resolver a equação $dy/dx = y/ax$. Um problema que ambos os irmãos resolveram e que gerou muito atrito entre eles foi o problema da *braquistócrona* (veja o Problema 32 da Seção 2.3). O problema da braquistócrona foi resolvido, também, por Leibniz, Newton e pelo Marquês de L'Hôpital. Diz-se, embora sem comprovação, que Newton soube do problema no final da tarde de um dia cansativo na Casa da Moeda e que o resolveu naquela noite após o jantar. Ele publicou a solução anonimamente mas, ao vê-la, Johann Bernoulli observou: "Ah, conheço o leão pela sua pata."

Daniel Bernoulli (1700-1782), filho de Johann, emigrou para São Petersburgo na juventude para se incorporar à Academia de São Petersburgo, recém-fundada, mas retornou a Basel em 1733 como professor de botânica e, mais tarde, de física. Seus interesses eram, principalmente, em equações diferenciais e suas aplicações. Por exemplo, é seu nome que está associado à equação de Bernoulli em mecânica dos fluidos. Foi, também, o primeiro a encontrar as funções que seriam conhecidas um século mais tarde como funções de Bessel (Seção 5.8).

O maior matemático do século XVIII, Leonhard Euler (1707-1783), cresceu perto de Basel e foi aluno de Johann Bernoulli. Ele seguiu seu amigo Daniel Bernoulli, indo para São Petersburgo em 1727. Durante o resto de sua vida esteve associado à Academia de São Petersburgo (1727-1741 e 1766-1783) e à Academia de Berlim (1741-1766). Euler foi o matemático mais prolífico de todos os tempos; suas obras completas enchem mais de 70 volumes grossos. Seus interesses incluíam todas as áreas da matemática e muitos campos de aplicação. Embora tenha ficado

cego durante os 17 últimos anos de sua vida, seu trabalho continuou no mesmo ritmo até o dia de sua morte. Sua formulação matemática de problemas em mecânica e seu desenvolvimento de métodos para resolvê-los nos interessa particularmente aqui. Sobre o trabalho de Euler em mecânica, Lagrange disse ser "o primeiro trabalho importante no qual a análise é aplicada à ciência do movimento". Entre outras coisas, Euler identificou a condição para que equações diferenciais de primeira ordem sejam exatas (Seção 2.6) em 1734-1735, desenvolveu a teoria de fatores integrantes (Seção 2.6) no mesmo artigo e encontrou a solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes (Seções 3.1, 3.4, 3.5 e 4.2) em 1743. Estendeu esse último resultado para equações não-homogêneas em 1750-1751. Começando em torno de 1750, Euler usou, com freqüência, séries de potências (Cap. 5) para resolver equações diferenciais. Propôs, também, um procedimento numérico (Seções 2.7 e 8.1) em 1768-1769, fez contribuições importantes em equações diferenciais parciais e deu o primeiro tratamento sistemático do cálculo de variações.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) tornou-se professor de matemática em sua cidade natal, Turim, com 19 anos. Sucedeu Euler na cadeira de matemática na Academia de Berlim em 1766 e foi para a Academia de Paris em 1787. Ele é mais conhecido pelo seu trabalho monumental *Mécanique analytique*, publicado em 1788, um tratado elegante e completo sobre mecânica newtoniana. Em relação a equações diferenciais elementares, Lagrange mostrou, no período 1762-1765, que a solução geral de uma equação diferencial linear homogênea de ordem n é uma combinação linear de n soluções independentes (Seções 3.2, 3.3 e 4.1). Mais tarde, em 1774-1775, desenvolveu completamente o método de variação dos parâmetros (Seções 3.7 e 4.4). Lagrange também é conhecido pelo seu trabalho fundamental em equações diferenciais parciais e cálculo de variações.

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) viveu na Normandia quando menino, mas foi para Paris em 1768 e deixou, rapidamente, sua marca nos meios científicos, sendo eleito para a Academia de Ciências em 1773. Destacou-se, particularmente, no campo da mecânica celeste; seu trabalho mais importante, *Traité de mécanique céleste*, foi publicado em cinco volumes entre 1799 e 1825. A equação de Laplace é fundamental em muitos ramos da física matemática, e Laplace a estudou extensamente em conexão com a atração gravitacional. A transformada de Laplace (Cap. 6) recebeu o nome em sua homenagem, embora sua utilidade na resolução de equações diferenciais só tenha sido reconhecida muito mais tarde.

No final do século XVIII, muitos métodos elementares para resolver equações diferenciais ordinárias já tinham sido descobertos. No século XIX, iniciou-se a investigação de questões teóricas de existência e unicidade, assim como o desenvolvimento de métodos menos elementares, como os baseados em expansão em séries de potências (veja o Cap. 5). Esses métodos encontram seu ambiente natural no plano complexo. Por causa disso, eles foram estimulados pelo desenvolvimento mais ou menos simultâneo, que, de certa forma, estimularam, da teoria de funções analíticas complexas. As equações diferenciais parciais começaram, também, a ser estudadas intensamente, à medida que se tornava claro seu papel crucial em física matemática. Com isso, muitas funções, soluções de certas equações diferenciais ordinárias, começaram a aparecer em muitas situações e foram estudadas exaustivamente. Conhecidas, coletivamente, como funções transcendentais, muitas delas estão associadas a nomes de matemáticos, incluindo Bessel, Legendre, Hermite, Chebyshev e Hankel, entre outros.

As inúmeras equações diferenciais que resistiram a métodos analíticos levaram à investigação de métodos de aproximação numérica (veja o Cap. 8). Por volta de 1900 já haviam sido desenvolvidos métodos efetivos de integração numérica, mas sua implementação estava severamente prejudicada pela necessidade de se executar os cálculos a mão ou com equipamentos computacionais muito primitivos. Nos últimos 50 anos, o desenvolvimento de computadores cada vez mais poderosos e versáteis aumentou muito a gama de problemas que podem ser investigados, de maneira efetiva, por métodos numéricos. Durante esse mesmo período, foram desenvolvidos integradores numéricos extremamente refinados e robustos, facilmente disponíveis. Versões apropriadas para computadores pessoais tornaram possível, para os estudantes, a resolução de muitos problemas significativos.

Uma outra característica das equações diferenciais no século XX foi a criação de métodos geométricos ou topológicos, especialmente para equações não-lineares. O objetivo é compreender, pelo menos qualitativamente, o comportamento de soluções de um ponto de vista geométrico, assim como analítico. Se há necessidade de maiores detalhes, isso pode ser obtido, em geral, usando-se aproximações numéricas. O Cap. 9 contém uma introdução a esses métodos geométricos.

Nos últimos anos, essas duas tendências se juntaram. Computadores e, especialmente, computação gráfica, trouxeram um novo ímpeto ao estudo de sistemas de equações diferenciais não-lineares. Foram descobertos fenômenos inesperados (Seção 9.8), como atratores estranhos, caos e fractais, que estão sendo intensamente estudados e estão gerando novas e importantes idéias em diversas aplicações diferentes. Embora seja um assunto antigo sobre o qual muito se sabe, as equações diferenciais na aurora do século XXI continuam uma fonte fértil de problemas fascinantes e importantes ainda não resolvidos.

REFERÊNCIAS

Programas de computador para equações diferenciais mudam muito rápido para se poder dar boas referências em um livro como esse. Uma boa fonte de informação são as seções *Software Review* e *Computer Corner* de *The College Mathematics Journal*, publicado pela *Mathematical Association of America*.

Existem muitos livros sobre o uso de sistemas de álgebra computacional, alguns dos quais enfatizam sua utilização em equações diferenciais.

Para ler mais sobre a história da matemática, procure livros como os listados a seguir:

Boyer, C. B., and Merzbach, U. C., *A History of Mathematics* (2nd ed.) (New York: Wiley, 1989).

Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (New York: Oxford University Press, 1972).

Um apêndice histórico útil sobre o desenvolvimento inicial das equações diferenciais aparece em:

Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations* (London: Longmans, Green, 1927; New York: Dover, 1956).

Uma fonte enciclopédica de informação sobre vidas e feitos de matemáticos do passado é:

Gillespie, C. C., ed., *Dictionary of Scientific Biography* (15 vols.) (New York: Scribner's, 1971).

Na Internet pode ser encontrada uma boa quantidade de informação histórica. Um excelente endereço é

www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/BioIndex.html

Esse sítio foi criado por John J. O'Connor e Edmund F. Robertson do Departamento de Matemática e Estatística da Universidade de St. Andrews, na Escócia.

CAPÍTULO 2

Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Este capítulo trata de equações diferenciais de primeira ordem,

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \tag{1}$$

onde f é uma função de duas variáveis dada. Qualquer função diferenciável $y = \phi(t)$ que satisfaça essa equação para todo t em algum intervalo é dita uma solução, e nosso objetivo é determinar se tais funções existem e, caso existam, desenvolver métodos para encontrá-las. Infelizmente, para uma função arbitrária f, não existe método geral para resolver a equação em termos de funções elementares. Em vez disso, descreveremos vários métodos, cada um dos quais aplicável a determinada subclasse de equações de primeira ordem. As mais importantes delas são as equações lineares (Seção 2.1), as equações separáveis (Seção 2.2) e as equações exatas (Seção 2.6). As outras seções deste capítulo descrevem algumas das aplicações importantes de equações diferenciais de primeira ordem, introduzem a idéia de aproximar uma solução através de cálculos numéricos e discutem algumas questões teóricas relacionadas à existência e à unicidade de soluções. A última seção inclui um exemplo de soluções caóticas no contexto de equações de diferença de primeira ordem, que têm alguns pontos importantes de semelhança com as equações diferenciais e são, sob certos aspectos, mais fáceis de estudar.

2.1 Equações Lineares; Métodos dos Fatores Integrantes

Se a função f na Eq. (1) depende linearmente da variável y, então a Eq. (1) é chamada de uma equação linear de primeira ordem. Discutimos, nas Seções 1.1 e 1.2, um tipo restrito de equações lineares de primeira ordem nos quais os coeficientes são constantes. Um exemplo típico é

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b, \tag{2}$$

onde a e b são constantes dadas. Lembre-se de que uma equação dessa forma descreve o movimento de um objeto em queda na atmosfera. Queremos, agora, considerar a equação linear de primeira ordem mais geral possível, que é obtida substituindo-se os coeficientes a e b na Eq. (2) por funções arbitrárias de t. Escreveremos, em geral, a **equação linear de primeira ordem** geral na forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \tag{3}$$

onde p e g são funções dadas da variável independente t.

A Eq. (2) pode ser resolvida pelo método de integração direto dado na Seção 1.2. Isto é, se $a \neq 0$ e $y \neq b/a$, reescrevemos a equação na forma

$$\frac{dy/dt}{y - (b/a)} = -a. \tag{4}$$

Depois, integrando, obtemos

$$\ln|y - (b/a)| = -at + C,$$

da qual segue que a solução geral da Eq. (2) é

$$y = (b/a) + ce^{-at}, \tag{5}$$

onde c é uma constante arbitrária.

Infelizmente, esse método direto de solução não pode ser usado para resolver a Eq. (3), de modo que precisamos usar um método diferente. O método que usaremos é devido a Leibniz; ele envolve multiplicar a equação diferencial (3) por uma determinada função $\mu(t)$, escolhida de modo que a equação resultante seja facilmente integrável. A função $\mu(t)$ é chamada **fator integrante,** e a maior dificuldade do método é saber como encontrá-la. Vamos introduzir esse método em um exemplo simples e depois mostrar como estendê-lo a outras equações lineares de primeira ordem, incluindo a equação geral (3).

Exemplo 1

Resolva a equção diferencial

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}. \tag{6}$$

Faça os gráficos de diversas soluções e encontre a solução particular cujo gráfico contém o ponto (0, 1).

O primeiro passo é multiplicar a Eq. (6) por uma função $\mu(t)$, indeterminada por enquanto; assim,

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}\mu(t)y = \frac{1}{2}\mu(t)e^{t/3}. \tag{7}$$

A pergunta agora é se podemos escolher μ(t) de modo que a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (7) seja reconhecível como a derivada de alguma função particular. Se esse for o caso, podemos integrar a Eq. (7), mesmo sem conhecer a função y. Para guiar a nossa escolha do fator integrante $\mu(t)$, note que a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (7) contém duas parcelas e que a primeira é parte do resultado de derivar o produto $\mu(t)y$. Vamos tentar, então, determinar $\mu(t)$ de modo que a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (7) seja a derivada de $\mu(t)y$. Comparando essa expressão com a fórmula de diferenciação

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt}y, \tag{8}$$

observamos que as duas primeiras parcelas são iguais e que as segundas também podem ficar iguais se escolhermos $\mu(t)$ de modo que

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \frac{1}{2}\mu(t) \tag{9}$$

Portanto, nossa procura por um fator integrante terá sucesso se encontrarmos uma solução da Eq. (9). Talvez você possa identificar imediatamente uma função que satisfaça a Eq. (9): que função bem conhecida do cálculo tem uma derivada que é a metade da função original? De maneira mais sistemática, reescreva a Eq. (9) como

$$\frac{d\mu(t)/dt}{\mu(t)} = \frac{1}{2} \tag{10}$$

que é equivalente a

$$\frac{d}{dt}\ln|\mu(t)| = \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Temos, então, que

$$\ln|\mu(t)| = \frac{1}{2}t + C, \tag{12}$$

ou

$$\mu(t) = ce^{t/2}. \tag{13}$$

A função $\mu(t)$ dada pela Eq. (13) é um fator integrante para a Eq. (6). Como não precisamos do fator integrante mais geral, escolhemos c como sendo 1 na Eq. (13) e usamos $\mu(t) = e^{2t}$.

Voltando à Eq. (6), multiplicamos pelo fator integrante $e^{t/2}$ para obter

$$e^{t/2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}e^{t/2}y = \frac{1}{2}e^{5t/6}. \tag{14}$$

Pela escolha que fizemos do fator integrante, a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (14) é a derivada de $e^{2t}y$, de modo que a Eq. (14) fica

$$\frac{d}{dt}(e^{t/2}y) = \frac{1}{2}e^{5t/6}. \tag{15}$$

Integrando a Eq. (15), obtemos

$$e^{t/2}y = \frac{3}{5}e^{5t/6} + c, \tag{16}$$

onde c é uma constante arbitrária. Finalmente, ao resolver a Eq. (16) para y, temos a solução geral da Eq. (6), a saber,

$$y = \frac{3}{5}e^{t/3} + ce^{-t/2}. \tag{17}$$

Para encontrar a solução cujo gráfico contém o ponto (0, 1), fazemos $t = 0$ e $y = 1$ na Eq. (17), obtendo $1 = (3/5) + c$. Logo $c = 2/5$, e a solução desejada é

$$y = \frac{3}{5}e^{t/3} + \frac{2}{5}e^{-t/2}. \tag{18}$$

A Fig. 2.1.1 inclui os gráficos da Eq. (17) para diversos valores de c com um campo de direções atrás. A solução cujo gráfico contém o ponto (0, 1) corresponde à curva mais grossa.

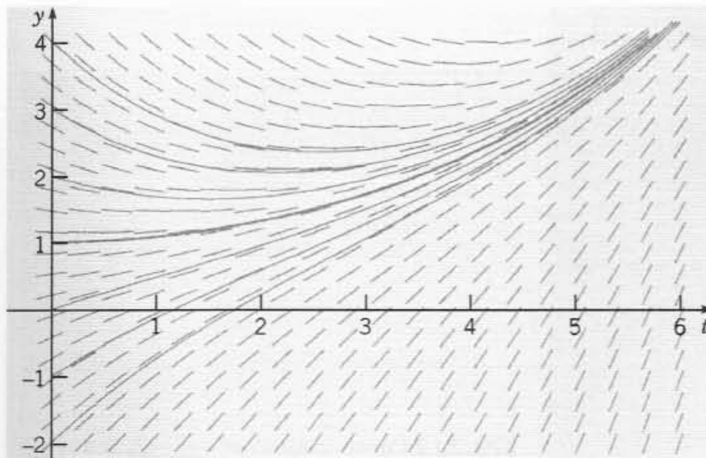


FIG. 2.1.1 Curvas integrais para $y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}$.

Vamos estender o método dos fatores integrantes a equações da forma

$$\frac{dy}{dt} + ay = g(t), \tag{19}$$

onde a é uma constante dada e $g(t)$ é uma função dada. Procedendo como no Exemplo 1, vemos que o fator integrante $\mu(t)$ tem que satisfazer

$$\frac{d\mu}{dt} = a\mu, \tag{20}$$

em vez da Eq. (9). Logo o fator integrante é $\mu(t) = e^{at}$. Multiplicando a Eq. (19) por $\mu(t)$, obtemos

$$e^{at}\frac{dy}{dt} + ae^{at}y = e^{at}g(t),$$

ou

$$\frac{d}{dt}(e^{at}y) = e^{at}g(t). \tag{21}$$

Integrando a Eq. (21), vemos que

$$e^{at}y = \int e^{at}g(t)\,dt + c, \tag{22}$$

onde c é uma constante arbitrária. Podemos calcular a integral na Eq. (22) e expressar a solução y em termos de funções elementares para muitas funções simples $g(t)$, como no Exemplo 1. No entanto, para funções mais complicadas $g(t)$, precisamos deixar a solução em forma integral. Nesse caso

$$y = e^{-at}\int_{t_0}^{t} e^{as}g(s)\,ds + ce^{-at}. \tag{23}$$

Note que usamos s para denotar a variável de integração na Eq. (23) para distingui-la da variável independente t e escolhemos algum valor conveniente t_0 para o limite inferior de integração.

Exemplo 2

Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} - 2y = 4 - t \tag{24}$$

e faça o gráfico de diversas soluções. Discuta o comportamento das soluções quanto $t \to \infty$.

A Eq. (24) é da forma (19) com $a = -2$; logo, o fator integrane é $\mu(t) = e^{-2t}$. Multiplicando a equação diferencial (24) por $\mu(t)$, obtemos

$$e^{-2t}\frac{dy}{dt} - 2e^{-2t}y = 4e^{-2t} - te^{-2t} \tag{25}$$

ou

$$\frac{d}{dt}(e^{-2t}y) = 4e^{-2t} - te^{-2t} \tag{26}$$

Integrando essa equação, temos

$$e^{-2t}y = -2e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + c,$$

onde usamos integração por partes no último termo da Eq. (26). Portanto, a solução geral da Eq. (24) é

$$y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t + ce^{2t} \tag{27}$$

A Fig. 2.1.2 mostra um campo de direções e gráficos da solução (27) para diversos valores de c. O comportamento das soluções para valores grandes de t é determinado pelo termo ce^{2t}. Se $c \neq 0$, a solução cresce exponencialmente em módulo, tendo o mesmo sinal que c. Assim, as soluções divergem quando t fica muito grande. A fronteira entre as soluções que acabam ficando positivas e as que acabam ficando negativas ocorre quando $c = 0$. Substituindo $c = 0$ na Eq. (27) e fazendo $t = 0$, vemos que $y = -7/4$ é o ponto de separação no eixo dos y. Note que, para esse valor inicial, a solução é $y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t$; ela cresce linearmente, ao invés de exponencialmente.

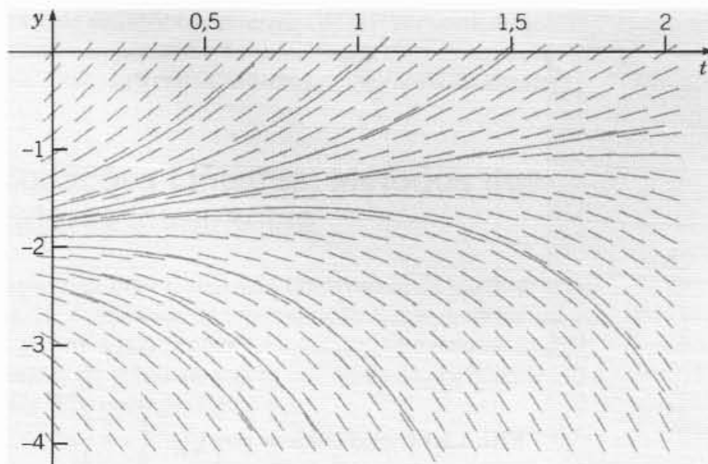


FIG. 2.1.2 Curvas integrais para $y' - 2y = 4 - t$.

Vamos voltar à equação linear de primeira ordem geral (3),

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t),$$

onde p e g são funções dadas. Para determinar um fator integrante apropriado, multiplicamos a Eq. (3) por uma função $\mu(t)$ ainda indeterminada, obtendo

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t). \quad (28)$$

Seguindo a mesma linha de dedução usada no Exemplo 1, vemos que a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (28) é a derivada do produto $\mu(t)y$, desde que $\mu(t)$ satisfaça a equação

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t). \quad (29)$$

Supondo, temporariamente, que $\mu(t)$ seja positiva, temos

$$\frac{d\mu(t)/dt}{\mu(t)} = p(t),$$

e, portanto,

$$\ln \mu(t) = \int p(t)\,dt + k.$$

Escolhendo a constante arbitrária k como zero, obtemos a função mais simples possível para μ, a saber,

$$\mu(t) = \exp \int p(t)\,dt. \quad (30)$$

Note que $\mu(t)$ é positiva para todo t, como supusemos. Voltando à Eq. 28, temos

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)g(t). \quad (31)$$

Portanto,

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)\,dt + c, \quad (32)$$

onde c é uma constante arbitrária. Algumas vezes a integral na Eq. (32) pode ser calculada em termos de funções elementares. No entanto, isso não é possível em geral, de modo que a solução geral da Eq. (3) é

$$y = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int_{t_0}^{t} \mu(s)g(s)\,ds + c\right], \quad (33)$$

onde, mais uma vez, t_0 é algum limite inferior de integração conveniente.

Exemplo 3

Resolva o problema de valor inicial

$$ty' + 2y = 4t^2, \quad (34)$$
$$y(1) = 2. \quad (35)$$

Para determinar $p(t)$ e $g(t)$ corretamente, precisamos primeiro reescrever a Eq. (34) na forma padrão (3). Temos

$$y' + (2/t)y = 4t, \quad (36)$$

de modo que $p(t) = 2/t$ e $g(t) = 4t$. Para resolver a Eq. (36), calculamos, primeiro, o fator integrante $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \exp \int \frac{2}{t}\,dt = e^{2\ln|t|} = t^2.$$

Multiplicando a Eq. (36) por $\mu(t) = t^2$, obtemos

$$t^2y' + 2ty = (t^2y)' = 4t^3,$$

e, portanto,

$$t^2y = t^4 + c,$$

onde c é uma constante arbitrária. Segue que

$$y = t^2 + \frac{c}{t^2} \quad (37)$$

é a solução geral da Eq. (34). A Fig. 2.1.3 mostra curvas integrais da Eq. (34) para diversos valores de c. Para satisfazer a condição inicial (35), precisamos escolher $c = 1$; logo,

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}, \qquad t > 0 \quad (38)$$

é a solução do problema de valor inicial (34), (35). Esta solução aparece como uma curva mais grossa na Fig. 2.1.3. Note que ela é ilimitada e é assintótica ao semi-eixo positivo dos y quando

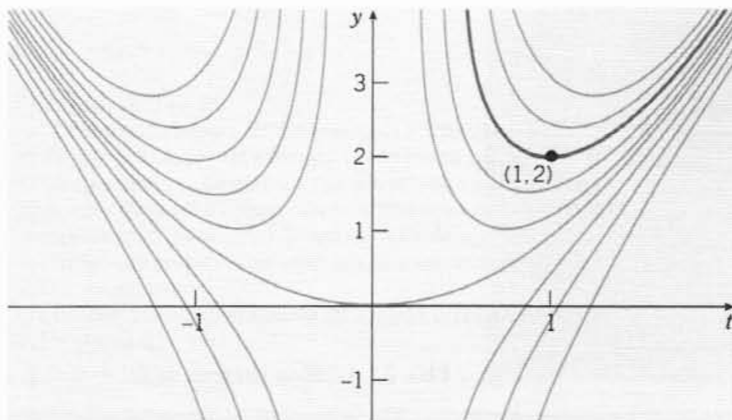


FIG. 2.1.3 Curvas integrais para $ty' + 2y = 4t^2$.

$t \to 0$ pela direita. Esse é o efeito da descontinuidade infinita na origem do coeficiente $p(t)$. A função $y = t^2 + (1/t^2)$ para $t < 0$ não é parte da solução desse problema de valor inicial.

Esse é o primeiro exemplo no qual a solução deixa de existir para alguns valores de t. Mais uma vez, isso é devido à descontinuidade infinita de $p(t)$ em $t = 0$, que restringe a solução ao intervalo $0 < t < \infty$.

Olhando novamente para a Fig. 2.1.3, vemos que algumas soluções (aquelas para as quais $c > 0$) são assintóticas ao semi-eixo positivo dos y quando $t \to 0$ pela direita, enquanto outras (para as quais $c < 0$) são assintóticas ao semi-eixo negativo dos y. A solução correspondente a $c = 0$, $y = t^2$, permanece limitada e diferenciável em $t = 0$. Se generalizarmos a condição inicial (35) para

$$y(1) = y_0, \qquad (39)$$

então $c = y_0 - 1$ e a solução (38) fica

$$y = t^2 + \frac{y_0 - 1}{t^2}, \qquad t > 0. \qquad (40)$$

Como no Exemplo 2, aqui também existe um valor crítico, a saber, $y_0 = 1$, que separa as soluções que se comportam de duas maneiras bem diferentes.

Exemplo 4

Resolva o problema de valor inicial

$$2y' + ty = 2, \qquad (41)$$
$$y(0) = 1. \qquad (42)$$

Primeiro divida a equação diferencial (41) por 2, obtendo

$$y' + (t/2)y = 1. \qquad (43)$$

Então $p(t) = t/2$ e o fator integrante é $\mu(t) = \exp(t^2/4)$. Agora multiplique a Eq. (43) por $\mu(t)$, de modo que

$$e^{t^2/4}y' + \frac{1}{2}e^{t^2/4}y = e^{t^2/4}. \qquad (44)$$

A expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (44) é a derivada de $e^{t^2/4}y$; logo, integrando a Eq. (44), obtemos

$$e^{t^2/4}y = \int e^{t^2/4}\,dt + c. \qquad (45)$$

A integral na Eq. (45) não pode ser calculada em termos das funções elementares usuais, de modo que não calculamos a integral. No entanto, escolhendo o limite inferior de integração como sendo o ponto inicial $t = 0$, podemos substituir a Eq. (45) por

$$e^{t^2/4}y = \int_0^t e^{s^2/4}\,ds + c, \qquad (46)$$

onde c é uma constante arbitrária. Segue então que a solução geral da Eq. (41) é dada por

$$y = e^{-t^2/4}\int_0^t e^{s^2/4}\,ds + ce^{-t^2/4}. \qquad (47)$$

A condição inicial (42) implica em $c = 1$.

O objetivo principal deste exemplo é ilustrar que, algumas vezes, a solução tem que ser deixada em forma integral. Em geral, isso é apenas uma pequena inconveniência, não um obstáculo sério. Para um determinado valor de t a integral na Eq. (47) é uma integral definida e pode ser aproximada, com qualquer precisão desejada, usando-se integradores numéricos prontamente disponíveis. Repetindo esse processo para muitos valores de t e colocando os resultados em um gráfico, você pode obter um gráfico de uma solução. Uma alternativa é usar um método de aproximação numérica, como os discutidos no Cap. 8, que utiliza diretamente a equação diferencial e não precisa de nenhuma expressão para a solução. Pacotes de programas como o Maple e o Mathematica executam tais procedimentos e produzem gráficos de soluções de equações diferenciais.

A Fig. 2.1.4 mostra gráficos da solução (47) para diversos valores de c. Da figura, parece plausível conjecturar que todas as soluções tendem a um limite quando $t \to \infty$. O limite pode ser encontrado analiticamente (veja o Problema 32).

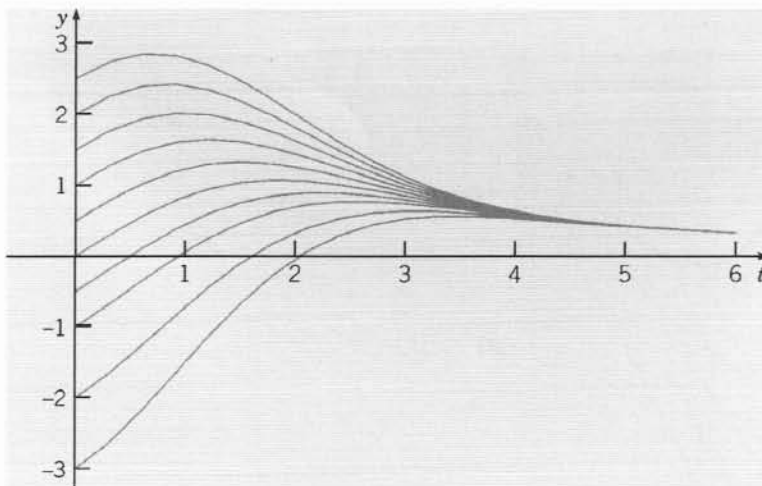


FIG. 2.1.4 Curvas integrais de $2y' + ty = 2$.

Problemas

Nos problemas de 1 a 12:

(a) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada.

(b) Baseado em uma análise do campo de direções, descreva o comportamento das soluções para valores grandes de t.

(c) Encontre a solução geral da equação diferencial dada e use-a para determinar o comportamento das soluções quando $t \to \infty$.

1. $y' + 3y = t + e^{-2t}$
2. $y' - 2y = t^2 e^{2t}$
3. $y' + y = te^{-t} + 1$
4. $y' + (1/t)y = 3\cos 2t, \qquad t > 0$
5. $y' - 2y = 3e^t$
6. $ty' + 2y = \operatorname{sen} t, \qquad t > 0$
7. $y' + 2ty = 2te^{-t^2}$
8. $(1 + t^2)y' + 4ty = (1 + t^2)^{-2}$
9. $2y' + y = 3t$
10. $ty' - y = t^2 e^{-t}, \qquad t > 0$
11. $y' + y = 5\operatorname{sen} 2t$
12. $2y' + y = 3t^2$

Nos problemas de 13 a 20, encontre a solução do problema de valor inicial dado.

13. $y' - y = 2te^{2t}, \qquad y(0) = 1$
14. $y' + 2y = te^{-2t}, \qquad y(1) = 0$
15. $ty' + 2y = t^2 - t + 1, \qquad y(1) = \frac{1}{2}, \qquad t > 0$
16. $y' + (2/t)y = (\cos t)/t^2 \qquad y(\pi) = 0, \qquad t > 0$
17. $y' - 2y = e^{2t}, \qquad y(0) = 2$
18. $ty' + 2y = \operatorname{sen} t, \qquad y(\pi/2) = 1, \qquad t > 0$
19. $t^3 y' + 4t^2 y = e^{-t}, \qquad y(-1) = 0, \qquad t < 0$
20. $ty' + (t + 1)y = t, \qquad y(\ln 2) = 1, \qquad t > 0$

Nos Problemas de 21 a 23:

(a) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Como as soluções parecem se comportar quando t fica grande? O comportamento depende da escolha do valor inicial a? Seja a_0 o valor de a para o qual ocorre a transição de um tipo de comportamento para outro. Estime o valor de a_0.

(b) Resolva o problema de valor inicial e encontre o valor crítico a_0 exatamente.

(c) Descreva o comportamento da solução correspondente ao valor inicial a_0.

21. $y' - \frac{1}{2}y = 2\cos t, \qquad y(0) = a$
22. $2y' - y = e^{t/3}, \qquad y(0) = a$
23. $3y' - 2y = e^{-\pi t/2}, \qquad y(0) = a$

Nos Problemas de 24 a 26:

(a) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Como as soluções parecem se comportar quando $t \to 0$? O comportamento depende da escolha do valor inicial a? Seja a_0 o valor de a para o qual ocorre a transição de um tipo de comportamento para outro. Estime o valor de a_0.

(b) Resolva o problema de valor inicial e encontre o valor crítico a_0 exatamente.

(c) Descreva o comportamento da solução correspondente ao valor inicial a_0.

24. $ty' + (t + 1)y = 2te^{-t}, \qquad y(1) = a, \qquad t > 0$
25. $ty' + 2y = (\operatorname{sen} t)/t, \qquad y(-\pi/2) = a, \qquad t < 0$
26. $(\operatorname{sen} t)y' + (\cos t)y = e^t, \; y(1) = a, \; 0 < t < \pi$
27. Considere o problema de valor inicial

$$y' + \tfrac{1}{2}y = 2\cos t, \qquad y(0) = -1.$$

Encontre as coordenadas do primeiro ponto de máximo local da solução para $t > 0$.

28. Considere o problema de valor inicial

$$y' + \tfrac{2}{3}y = 1 - \tfrac{1}{2}t, \qquad y(0) = y_0.$$

Encontre o valor de y_0 para o qual a solução encosta no eixo dos t, mas não o atravessa.

29. Considere o problema de valor inicial

$$y' + \tfrac{1}{4}y = 3 + 2\cos 2t, \qquad y(0) = 0.$$

(a) Encontre a solução desse problema de valor inicial e descreva seu comportamento para valores grandes de t.

(b) Determine o valor de t para o qual a solução intersecta, pela primeira vez, a reta $y = 12$.

30. Encontre o valor de y_0 para o qual a solução do problema de valor inicial

$$y' - y = 1 + 3\operatorname{sen} t, \qquad y(0) = y_0$$

permanece finita quando $t \to \infty$.

31. Considere o problema de valor inicial

$$y' - \tfrac{3}{2}y = 3t + 2e^t, \qquad y(0) = y_0.$$

Encontre o valor de y_0 que separa as soluções que crescem positivamente quando $t \to \infty$ das que crescem em módulo com sinal negativo. Como a solução correspondente a esse valor crítico de y_0 se comporta quando $t \to \infty$?

32. Mostre que todas as soluções de $2y' + ty = 2$ [Eq. (41) do texto] tendem a um limite quando $t \to \infty$ e encontre o valor desse limite.

Sugestão: Considere a solução geral, Eq. (47), e use a regra de L'Hôpital no primeiro termo.

33. Mostre que, se a e λ são constantes positivas e se b é qualquer número real, então toda solução da equação

$$y' + ay = be^{-\lambda t}$$

tem a propriedade que $y \to 0$ quando $t \to \infty$.

Sugestão: Considere os casos $a = \lambda$ e $a \neq \lambda$ separadamente.

Nos problemas de 34 a 37, construa uma equação diferencial linear de primeira ordem cujas soluções têm o comportamento estipulado quando $t \to \infty$. Depois resolva sua equação e confirme que as soluções têm, de fato, a propriedade especificada.

34. Todas as soluções têm limite 3 quando $t \to \infty$.
35. Todas as soluções são assintóticas à reta $y = 3 - t$ quando $t \to \infty$.
36. Todas as soluções são assintóticas à reta $y = 2t - 5$ quando $t \to \infty$.
37. Todas as soluções se aproximam da curva $y = 4 - t^2$ quando $t \to \infty$.
38. **Variação dos Parâmetros.** Considere o seguinte método de resolução da equação linear geral de primeira ordem:

$$y' + p(t)y = g(t). \qquad \text{(i)}$$

(a) Se $g(t) = 0$ para todo t, mostre que a solução é

$$y = A\exp\left[-\int p(t)\,dt\right], \qquad \text{(ii)}$$

onde A é constante.

(b) Se $g(t)$ não for identicamente nula, suponha que a solução da Eq. (i) é da forma

$$y = A(t)\exp\left[-\int p(t)\,dt\right], \qquad \text{(iii)}$$

onde A, agora, é uma função de t. Substituindo y na equação diferencial dada por essa expressão, mostre que $A(t)$ tem que satisfazer a condição

$$A'(t) = g(t)\exp\left[\int p(t)\,dt\right]. \qquad \text{(iv)}$$

(c) Encontre $A(t)$ da Eq. (iv). Depois substitua $A(t)$ na Eq. (iii) pela expressão encontrada e determine y. Verifique que a solução obtida desse modo coincide com a obtida na Eq. (35) no texto. Essa técnica é conhecida pelo método de **variação dos parâmetros**; ela é discutida em detalhes na Seção 3.7 em conexão com equações lineares de segunda ordem.

Nos Problemas de 39 a 42, use o método do Problema 38 para resolver a equação diferencial dada.

39. $y' = 2y = t^2e^{2t}$
40. $y' + (1/t)y = 3\cos 2t, \quad t > 0$
41. $ty' + 2y = \text{sen}\, t, \quad t > 0$
42. $2y' + y = 3t^2$

2.2 Equações Separáveis

Usamos um processo de integração direta, nas Seções 1.2 e 2.1, para resolver equações lineares de primeira ordem da forma

$$\frac{dy}{dt} = ay + b, \qquad (1)$$

onde a e b são constantes. Vamos mostrar que esse processo pode ser aplicado, de fato, em uma classe muito maior de equações.

Nesta seção usaremos a letra x para denotar a variável independente, em vez de t, por duas razões. Em primeiro lugar, letras diferentes são usadas, muitas vezes, para as variáveis em uma equação diferencial e você não deve se acostumar a usar um único par. Em particular, x é usada freqüentemente como a variável independente. Além disso, queremos reservar t para outra coisa mais tarde na seção.

A equação geral de primeira ordem é

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \qquad (2)$$

As equações lineares foram consideradas na seção anterior mas, se a Eq. (2) for não-linear, então não existe método universalmente aplicável para resolver a equação. Vamos considerar aqui uma subclasse de equações de primeira ordem que podem ser resolvidas por um processo de integração direta.

Para identificar essa classe de equações, vamos colocar, primeiro, a Eq. (2) na forma

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (3)$$

É sempre possível fazer isso definindo $M(x, y) = -f(x, y)$ e $N(x, y) = 1$, mas podem existir, também, outras maneiras. No caso em que M depende apenas de x e N depende apenas de y, a Eq. (3) fica

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (4)$$

Essa equação é dita **separável**, porque, se for escrita na forma diferencial

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0, \qquad (5)$$

então, caso se queira, as parcelas envolvendo cada variável podem ser separadas pelo sinal de igualdade. A forma diferencial (5) também é mais simétrica e tende a diminuir a distinção entre as variáveis independente e dependente.

Uma equação separável pode ser resolvida integrando-se as funções M e N. Vamos ilustrar o processo através de um exemplo e depois discuti-lo, em geral, para a Eq. (4).

Exemplo 1

Mostre que a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 - y^2} \qquad (6)$$

é separável e depois encontre uma equação para suas curvas integrais.

Se escrevermos a Eq. (6) na forma

$$-x^2 + (1 - y^2)\frac{dy}{dx} = 0, \qquad (7)$$

então ela tem a forma (4) e é, portanto, separável. A seguir, note que a primeira parcela na Eq. (7) é a derivada de $-x^3/3$ e que a segunda, pela regra da cadeia, é a derivada em relação a x de $y - y^3/3$. Assim, a Eq. (7) pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{3}\right) + \frac{d}{dx}\left(y - \frac{y^3}{3}\right) = 0,$$

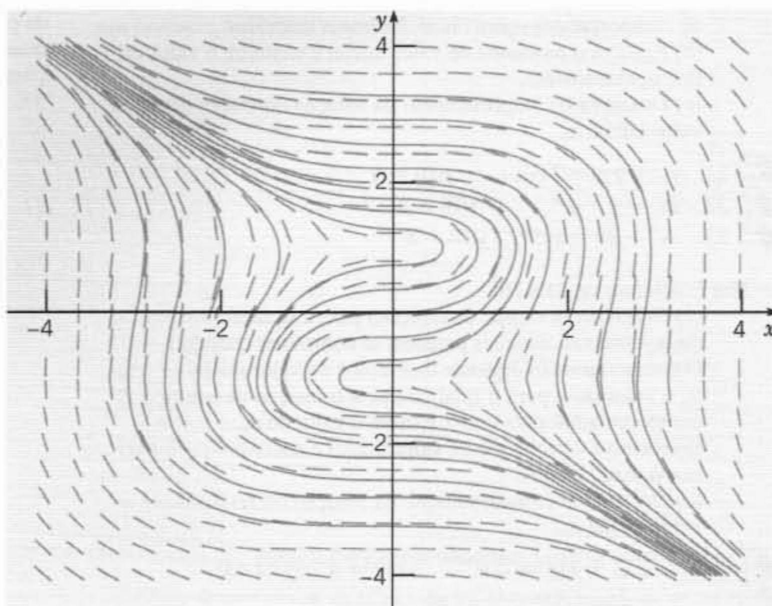


FIG. 2.2.1 Campo de direções e curvas integrais de $y' = x^2/(1 - y^2)$.

ou

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{3}+y-\frac{y^3}{3}\right)=0.$$

Portanto, integrando, obtemos

$$-x^3+3y-y^3=c, \tag{8}$$

onde c é uma constante arbitrária. A Eq. (8) é uma equação para as curvas integrais da Eq. (6). A Fig. 2.2.1 mostra o campo de direções e diversas curvas integrais. Qualquer função diferenciável $y=\phi(x)$ que satisfaz Eq. (8) é uma solução da Eq. (6). Uma equação da curva integral que contém um ponto particular (x_0, y_0) pode ser encontrada substituindo-se x e y por x_0 e y_0, respectivamente, na Eq. (8) e determinando o valor correspondente de c.

O mesmo procedimento pode ser seguido, essencialmente, para qualquer equação separável. Voltando à Eq. (4), sejam H_1 e H_2 primitivas de M e N, respectivamente. Então

$$H_1'(x)=M(x), \qquad H_2'(y)=N(y); \tag{9}$$

e, a Eq. (4) fica

$$H_1'(x)+H_2'(y)\frac{dy}{dx}=0. \tag{10}$$

Pela regra da cadeia,

$$H_2'(y)\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}H_2(y). \tag{11}$$

Logo, podemos escrever a Eq. (10) na forma

$$\frac{d}{dx}[H_1(x)+H_2(y)]=0. \tag{12}$$

Integrando a Eq. (12), obtemos

$$H_1(x)+H_2(y)=c, \tag{13}$$

onde c é uma constante arbitrária. Qualquer função diferenciável $y=\phi(x)$ que satisfaça a Eq. (13) é uma solução da Eq. (4); em outras palavras, a Eq. (13) define a solução implicitamente, em vez de explicitamente. As funções H_1 e H_2 são primitivas arbitrárias de M e N, respectivamente. Na prática, a Eq. (13) é obtida da Eq. (5), em geral, integrando-se a primeira parcela em relação a x e a segunda em relação a y.

Se, além da equação diferencial, é dada uma condição inicial

$$y(x_0)=y_0, \tag{14}$$

então a solução da Eq. (4) que satisfaz essa condição é obtida fazendo-se $x=x_0$ e $y=y_0$ na Eq. (13). Isso implica que

$$c=H_1(x_0)+H_2(y_0). \tag{15}$$

Substituindo esse valor de c na Eq. (13) e observando que

$$H_1(x)-H_1(x_0)=\int_{x_0}^{x}M(s)\,ds,$$

$$H_2(y)-H_2(y_0)=\int_{y_0}^{y}N(s)\,ds,$$

obtemos

$$\int_{x_0}^{x}M(s)\,ds+\int_{y_0}^{y}N(s)\,ds=0. \tag{16}$$

A Eq. (16) é uma representação implícita da solução da equação diferencial (4) que também satisfaz a condição inicial (14). Você deve ter em mente que, para a determinação de uma fórmula explícita para a solução, é necessário que a Eq. (16) seja resolvida para y como função de x. Infelizmente, é muitas vezes impossível fazer isso analiticamente; em tais casos, pode-se recorrer a métodos numéricos para se encontrar valores aproximados de y para valores dados de x.

Exemplo 2

Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}, \qquad y(0)=-1, \tag{17}$$

e determine o intervalo no qual a solução existe.

A equação diferencial pode ser escrita como

$$2(y-1)\,dy=(3x^2+4x+2)\,dx.$$

Integrando a expressão à esquerda do sinal de igualdade em relação a y e a expressão à direita em relação a x, obtemos

$$y^2-2y=x^3+2x^2+2x+c, \tag{18}$$

onde c é uma constante arbitrária. Para determinar a solução que satisfaz a condição inicial dada, substituímos os valores $x=0$ e $y=-1$ na Eq. (18), obtendo $c=3$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é dada implicitamente por

$$y^2-2y=x^3+2x^2+2x+3. \tag{19}$$

Para obter a solução explicitamente, precisamos resolver a Eq. (19) para y em função de x. Isso é fácil nesse caso, já que a Eq. (19) é quadrática em y, e obtemos

$$y=1\pm\sqrt{x^3+2x^2+2x+4}. \tag{20}$$

A Eq. (20) fornece duas soluções da equação diferencial, mas apenas uma delas, no entanto, satisfaz a condição inicial dada. Essa é a solução correspondente ao sinal de menos na Eq. (20), de modo que obtemos, finalmente,

$$y=\phi(x)=1-\sqrt{x^3+2x^2+2x+4} \tag{21}$$

como solução do problema de valor inicial (17). Note que, se o sinal de mais for escolhido erroneamente na Eq. (20), então obtemos a solução da mesma equação diferencial que satisfaz a condição inicial $y(0)=3$. Finalmente, para determinar o intervalo no qual a solução (21) é válida, precisamos encontrar o intervalo no qual a quantidade debaixo da raiz quadrada é positiva. O

único zero real dessa expressão é $x = -2$, logo, o intervalo desejado é $x > -2$. A Fig. 2.2.2 mostra a solução do problema de valor inicial e algumas outras curvas integrais para a equação diferencial. Note que a fronteira do intervalo de existência da solução (21) é determinado pelo ponto $(-2, 1)$, no qual a reta tangente é vertical.

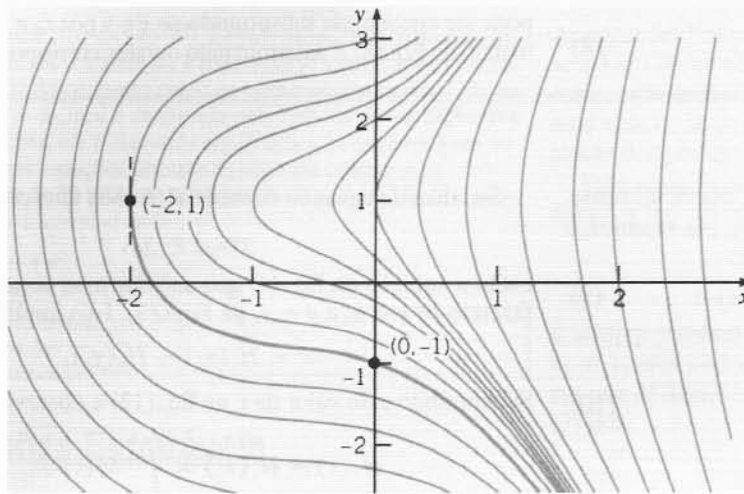


FIG. 2.2.2 Curvas integrais de $y' = (3x^2 + 4x + 2)/2(y - 1)$.

Exemplo 3

Resolva a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - x^3}{4 + y^3} \qquad (22)$$

e desenhe gráficos de diversas curvas integrais. Encontre, também, a solução cujo gráfico contém o ponto (0, 1) e determine seu intervalo de validade.

Escrevendo a Eq. (22) na forma

$$(4 + y^3)dy = (4x - x^3)dx,$$

integrando cada lado, multiplicando por 4 e rearrumando os termos, obtemos

$$y^4 + 16y + x^4 - 8x^2 = c, \qquad (23)$$

onde c é uma constante arbitrária. Qualquer função diferenciável $y = \phi(x)$ que satisfaz a Eq. (23) é uma solução da equação diferencial (22). A Fig. 2.2.3 mostra gráficos da Eq. (23) para diversos valores de c.

Para encontrar a solução particular cujo gráfico contém (0, 1),

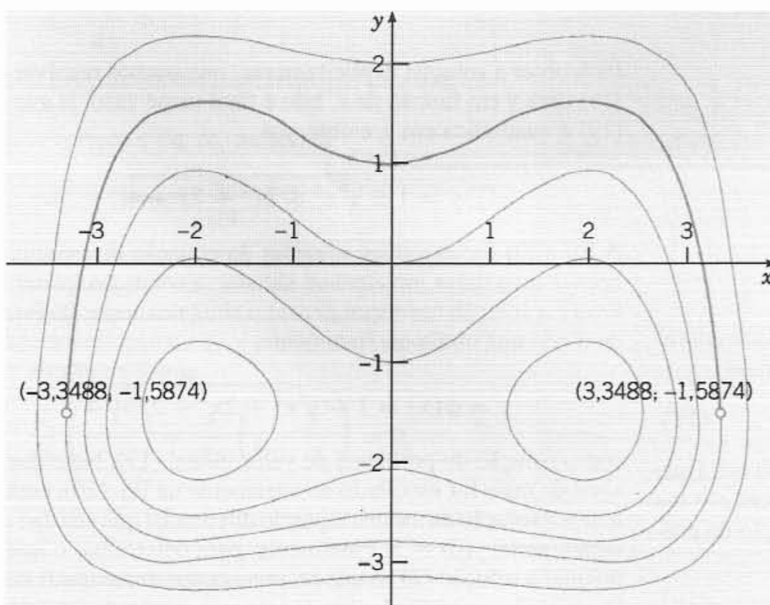


FIG. 2.2.3 Curvas integrais de $y' = (4x - x^3)/(4y + y^3)$. A solução cujo gráfico contém (0, 1) corresponde à curva mais grossa.

fazemos $x = 0$ e $y = 1$ na Eq. (23), obtendo $c = 17$. Logo a solução em questão é dada implicitamente por

$$y^4 + 16y + x^4 - 8x^2 = 17. \qquad (24)$$

Essa solução está ilustrada pela curva mais grossa na Fig. 2.2.3. O intervalo de validade dessa solução estende-se dos dois lados do ponto inicial enquanto a função permanecer diferenciável. Da figura vemos que o intervalo termina quando encontramos pontos onde a reta tangente é vertical. Segue da equação diferencial (22) que esses são pontos onde $4 + y^3 = 0$ ou $y = (-4)^{1/3} \cong -1{,}5874$. Da Eq. (24), os valores correspondentes de x são $x \cong \pm 3{,}3488$. Esses pontos estão marcados no gráfico na Fig. 2.2.3

Algumas vezes uma equação da forma (2),

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

tem uma solução constante $y = y_0$. Em geral, uma tal solução é fácil de encontrar, pois se $f(x, y_0) = 0$ para algum valor y_0 e para todos os valores de x, então a função constante $y = y_0$ é uma solução da equação diferencial (2). Por exemplo, a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y-3)\cos x}{1+2y^2} \qquad (25)$$

tem a solução constante $y = 3$. Outras soluções dessa equação podem ser encontradas separando-se as variáveis e integrando-se.

A investigação de uma equação de primeira ordem não-linear pode ser facilitada, algumas vezes, considerando-se x e y como funções de uma terceira variável t. Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}. \qquad (26)$$

Se a equação diferencial for

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F(x,y)}{G(x,y)}, \qquad (27)$$

então, comparando-se numeradores e denominadores nas Eqs. (26) e (27), obtemos o sistema

$$dx/dt = G(x,y), \qquad dy/dt = F(x,y). \qquad (28)$$

À primeira vista, pode parecer improvável que um problema seja simplificado substituindo-se uma única equação por um par de equações, mas, de fato, o sistema (28) pode ser muito mais fácil de tratar do que a Eq. (27). O Cap. 9 trata sistemas não-lineares da forma (28).

Nota: No Exemplo 2 não foi difícil resolver explicitamente para y em função de x e determinar o intervalo exato de existência da solução. Essa situação, no entanto, é excepcional e será melhor, muitas vezes, deixar a solução em forma implícita, como nos Exemplos 1 e 3. Assim, nos problemas a seguir e nas outras seções onde aparecem equações não-lineares, as palavras "resolva a seguinte equação diferencial" significam encontrar a solução explicitamente se for conveniente, caso contrário, encontrar uma equação que defina a solução implicitamente.

Problemas

Nos problemas de 1 a 8, resolva a equação diferencial dada.

1. $y' = x^2/y$
2. $y' = x^2/y(1+x^3)$
3. $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$
4. $y' = (3x^2 - 1)/(3+2y)$
5. $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$
6. $xy' = (1-y^2)^{1/2}$
7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - e^{-x}}{y + e^y}$
8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{1+y^2}$

Nos problemas de 9 a 20:
(a) Encontre a solução do problema de valor inicial em forma explícita.
(b) Desenhe o gráfico da solução.
(c) Determine, pelo menos aproximadamente, o intervalo no qual a solução está definida.

9. $y' = (1-2x)y^2, \quad y(0) = -1/6$
10. $y' = (1-2x)/y, \quad y(1) = -2$
11. $x\,dx + ye^{-x}dy = 0, \quad y(0) = 1$
12. $dr/d\theta = r^2/\theta, \quad r(1) = 2$
13. $y' = 2x/(y + x^2 y), \quad y(0) = -2$
14. $y' = xy^3(1+x^2)^{-1/2}, \quad y(0) = 1$
15. $y' = 2x/(1+2y), \quad y(2) = 0$
16. $y' = x(x^2+1)/4y^3, \quad y(0) = -1/\sqrt{2}$
17. $y' = (3x^2 - e^x)/(2y-5), \quad y(0) = 1$
18. $y' = (e^{-x} - e^x)/(3+4y), \quad y(0) = 1$
19. $\operatorname{sen} 2x\,dx + \cos 3y\,dy = 0, \quad y(\pi/2) = \pi/3$
20. $y^2(1-x^2)^{1/2}dy = \operatorname{arcsen} x\,dx, \quad y(0) = 1$

Alguns dos resultados pedidos nos problemas de 21 a 28 podem ser obtidos resolvendo-se a equação analiticamente ou colocando em um gráfico aproximações da solução geradas numericamente. Tente formar uma opinião sobre as vantagens e desvantagens de cada abordagem.

21. Resolva o problema de valor inicial
$$y' = (1+3x^2)/(3y^2 - 6y), \qquad y(0) = 1$$
e determine o intervalo de validade da solução.
Sugestão: Para encontrar o intervalo de definição, procure por pontos onde a curva integral tem uma tangente vertical.
22. Resolva o problema de valor inicial
$$y' = 3x^2/(3y^2 - 4), \qquad y(1) = 0$$
e determine o intervalo de validade da solução.
Sugestão: Para encontrar o intervalo de definição, procure por pontos onde a curva integral tem uma tangente vertical.
23. Resolva o problema de valor inicial
$$y' = 2y^2 + xy^2, \qquad y(0) = 1$$
e determine onde a solução atinge seu valor mínimo.
24. Resolva o problema de valor inicial
$$y' = (2 - e^x)/(3+2y), \qquad y(0) = 0$$
e determine onde a solução atinge seu valor máximo.
25. Resolva o problema de valor inicial
$$y' = 2\cos 2x/(3+2y), \qquad y(0) = -1$$
e determine onde a solução atinge seu valor máximo.
26. Resolva o problema de valor inicial
$$y' = 2(1+x)(1+y^2), \qquad y(0) = 0$$
e determine onde a solução atinge seu valor mínimo.

27. Considere o problema de valor inicial

$$y' = ty(4 - y)/3, \qquad y(0) = y_0.$$

(a) Determine como o comportamento da solução quando t aumenta depende do valor inicial y_0.
(b) Suponha que $y_0 = 0{,}5$. Encontre o instante T no qual a solução atinge, pela primeira vez, o valor 3,98.

28. Considere o problema de valor inicial

$$y' = ty(4 - y)/(1 + t), \qquad y(0) = y_0 > 0.$$

(a) Determine o comportamento da solução quando $t \to \infty$.
(b) Se $y_0 = 2$, encontre o instante T no qual a solução atinge, pela primeira vez, o valor 3,99.
(c) Encontre o conjunto de valores iniciais para os quais a solução pertence ao intervalo $3{,}99 < y < 4{,}01$ no instante $t = 2$.

29. Resolva a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay + b}{cy + d},$$

onde a, b, c e d são constantes.

Equações Homogêneas. Se a expressão à direita do sinal de igualdade na equação $dy/dx = f(x, y)$ pode ser escrita em função apenas da razão y/x, então a equação é dita homogênea.[1] Tais equações sempre podem ser transformadas em equações separáveis por uma mudança da variável dependente. O Problema 30 ilustra como resolver equações de primeira ordem homogêneas.

30. Considere a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 4x}{x - y}. \qquad \text{(i)}$$

(a) Mostre que a Eq. (i) pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y/x) - 4}{1 - (y/x)}; \qquad \text{(ii)}$$

logo, a Eq. (i) é homogênea.
(b) Defina uma nova variável dependente v tal que $v = y/x$, ou $y = xv(x)$. Expresse dy/dx em função de x, v e dv/dx.
(c) Substitua y e dy/dx na Eq. (ii) pelas expressões encontradas no item (b) que envolvem v e dv/dx. Mostre que a equação diferencial resultante é

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v - 4}{1 - v},$$

ou

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 4}{1 - v}. \qquad \text{(iii)}$$

Observe que a Eq. (iii) é separável.
(d) Resolva a Eq. (iii) obtendo v implicitamente em termos de x.
(e) Encontre a solução da Eq. (i) substituindo v por y/x na solução encontrada no item (d).
(f) Desenhe um campo de direções e algumas curvas integrais para a Eq. (i). Lembre-se de que a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (1) depende apenas da razão y/x. Isso significa que as curvas integrais têm tangentes com o mesmo coeficiente angular em todos os pontos pertencentes a qualquer reta contendo a origem, embora o coeficiente angular varie de uma reta para outra. Portanto, o campo de direções e as curvas integrais são simétricas em relação à origem. Essa propriedade de simetria é evidente no seu gráfico?

[1] A palavra "homogênea" tem significados diferentes em contextos matemáticos diferentes. As equações homogêneas consideradas aqui não têm nada a ver com as equações que vão aparecer no Capítulo 3 e em outros lugares.

O método esquematizado no Problema 30 pode ser usado para qualquer equação homogênea, isto é, a substituição $y = xv(x)$ transforma uma equação homogênea em uma equação separável. Essa última pode ser resolvida por integração direta, e a substituição de v por y/x, depois, fornece a solução da equação original. Nos problemas de 31 a 38:

(a) Mostre que a equação dada é homogênea.
(b) Resolva a equação diferencial.
(c) Desenhe um campo de direções e algumas curvas integrais. Eles são simétricos em relação à origem?

31. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$

32. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 3y^2}{2xy}$

33. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y - 3x}{2x - y}$

34. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x + 3y}{2x + y}$

35. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 3y}{x - y}$

36. $(x^2 + 3xy + y^2)\,dx - x^2 dy = 0$

37. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - 3y^2}{2xy}$

38. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3y^2 - x^2}{2xy}$

2.3 Modelagem com Equações de Primeira Ordem

Equações diferenciais são interessantes para os não-matemáticos principalmente devido à possibilidade de serem usadas para investigar uma ampla gama de problemas nas ciências físicas, biológicas e sociais. Uma razão para isso é que os modelos matemáticos e suas soluções levam a equações que relacionam as variáveis e parâmetros do problema. Essas equações permitem, muitas vezes, que se façam previsões sobre o comportamento do processo natural em circunstâncias diversas. É fácil, com freqüência, fazer com que os parâmetros no modelo matemático variem em intervalos grandes, mas isso pode ser um processo muito longo ou caro, ou até impossível, em um contexto experimental. De qualquer jeito, a modelagem matemática e a experimentação ou observação têm, ambas, uma importância crítica e um papel um tanto ou quanto complementar nas investigações científicas. Modelos matemáticos são validados comparando-se suas previsões com os resultados experimentais. Por outro lado, análises matemáticas podem sugerir as direções mais promissoras a serem exploradas experimentalmente e podem indicar, com precisão razoável, que dados experimentais serão mais úteis.

Nas Seções 1.1 e 1.2 formulamos e investigamos uns poucos modelos matemáticos simples. Começamos recapitulando e expandindo algumas das conclusões a que chegamos nessas seções. Independente do campo específico de aplicação, existem três estágios identificáveis que estão sempre presentes no processo de modelagem matemática.

Construção do Modelo. Nesta etapa você traduz a situação física em linguagem matemática, usando, muitas vezes, as etapas

listadas no final da Seção 1.1. Talvez o mais crucial nesse estágio seja enunciar claramente o(s) princípio(s) físico(s) que, acredita-se, governa(m) o processo. Por exemplo, foi observado que, em algumas circunstâncias, o calor passa de um corpo mais quente para outro mais frio a uma razão proporcional à diferença entre as temperaturas, que objetos se movem de acordo com a lei do movimento de Newton e que populações isoladas de insetos crescem a uma taxa proporcional à população atual. Cada uma dessas afirmações envolve uma taxa de variação (derivada) e, em conseqüência, ao serem expressas matematicamente, levam a uma equação diferencial. A equação diferencial é um modelo matemático do processo.

É importante compreender que as equações matemáticas são, quase sempre, descrições aproximadas do processo real. Por exemplo, corpos movendo-se a velocidades comparáveis à velocidade da luz não são governados pelas leis de Newton, as populações de insetos não crescem indefinidamente como enunciado devido a possíveis limitações no suprimento de comida e a transferência de calor é afetada por outros fatores além da diferença entre as temperaturas. De outro modo, pode-se adotar o ponto de vista de que equações matemáticas descrevem exatamente a operação de um modelo físico simplificado, que foi construído (ou concebido) de modo a incorporar as características mais importantes do processo real. O processo de modelagem matemática envolve, algumas vezes, a substituição conceitual de um processo discreto por um contínuo. Por exemplo, o número de elementos em uma população de insetos muda por quantidades discretas; no entanto, se a população é grande, parece razoável considerá-la como uma variável contínua e até falar sobre sua derivada.

Análise do Modelo. Uma vez formulado matematicamente o processo, você se depara, muitas vezes, com o problema de se resolver uma ou mais equações diferenciais ou, se isso não for possível, de descobrir tudo que for possível sobre as propriedades da solução. Pode acontecer que esse problema matemático seja muito difícil e, nesse caso, podem ser indicadas mais aproximações para tornar o problema tratável do ponto de vista matemático. Por exemplo, uma equação não-linear pode ser aproximada por uma linear, ou um coeficiente que varia lentamente pode ser substituído por uma constante. É claro que qualquer aproximação desse tipo também tem que ser examinada do ponto de vista físico, para se ter certeza de que o problema matemático ainda reflete as características essenciais do processo físico sendo investigado. Ao mesmo tempo, um conhecimento profundo da física do problema pode sugerir aproximações matemáticas razoáveis que tornarão o problema matemático mais fácil de analisar. Essa interação, entre a compreensão do fenômeno físico e o conhecimento das técnicas matemáticas e suas limitações, é característica da matemática aplicada de excelência e é indispensável para a construção bem-sucedida de modelos matemáticos úteis e processos físicos complexos.

Comparação com Experimentos ou Observações. Finalmente, tendo obtido a solução (ou, pelo menos, alguma informação sobre ela), você precisa interpretar essa informação no contexto onde o problema apareceu. Em particular, você deve sempre verificar que a solução matemática parece razoável do ponto de vista físico. Se possível, calcule a solução em pontos selecionados e compare-a com valores observados experimentalmente. Ou questione se o comportamento da solução após muito tempo é consistente com as observações. Ou examine as soluções correspondentes a determinados valores especiais dos parâmetros no problema. É claro que o fato de a solução matemática parecer razoável não garante que esteja correta. No entanto, se as previsões do modelo matemático são seriamente inconsistentes com as observações do sistema físico que o modelo é suposto de descrever, isso sugere que foram feitos erros na resolução do problema matemático, que o modelo matemático precisa ser refinado, ou que as observações precisam ser feitas com mais cuidado.

Os exemplos nesta seção são típicos de aplicações onde aparecem equações diferenciais de primeira ordem.

Exemplo 1

Misturas

No instante $t = 0$, um tanque contém Q_0 lb de sal dissolvido em 100 gal (cerca de 455 l); veja a Fig. 2.3.1. Suponha que água contendo 1/4 lb (cerca de 113 g) de sal por galão está entrando no tanque a uma taxa de r galões por minuto e que o líquido, bem misturado, está saindo do tanque à mesma taxa. Escreva o problema de valor inicial que descreve esse fluxo. Encontre a quantidade de sal $Q(t)$ no tanque em qualquer instante t e ache, também, a quantidade limite Q_L presente após um período muito longo de tempo. Se $r = 3$ e $Q_0 = 2Q_L$, encontre o instante T após o qual o nível de sal está dentro de uma faixa a 2% de Q_L. Encontre, também, a taxa de fluxo necessária para que o valor de T não exceda 45 minutos.

Vamos supor que o sal não é criado nem destruído no tanque. Portanto, as variações na quantidade de sal devem-se, apenas, aos fluxos de entrada e saída no tanque. Mais precisamente, a taxa de variação de sal no tanque, dQ/dt, é igual à razão de entrada do sal menos a razão de saída. Em símbolos,

$$\frac{dQ}{dt} = \text{taxa de entrada} - \text{taxa de saída} \qquad (1)$$

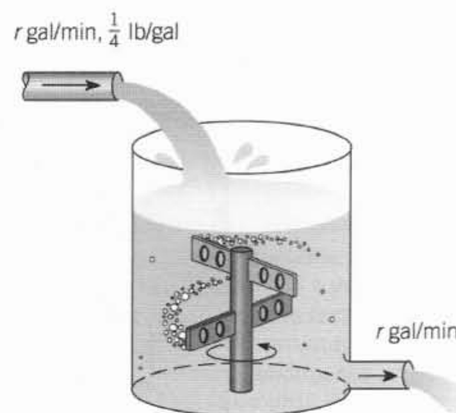


FIG. 2.3.1 O tanque de água do Exemplo 1.

A taxa de entrada no tanque é a concentração 1/4 lb/gal vezes a taxa do fluxo de entrada r gal/min, ou $(r/4)$ lb/min. Para calcular a taxa de saída de sal do tanque, precisamos multiplicar a concentração de sal no tanque pela taxa do fluxo de saída, r gal/min.

Como as taxas dos fluxos de entrada e de saída são iguais, o volume de água no tanque permanece constante em 100 galões e, como o líquido está "bem mexido", a concentração em todo o tanque é a mesma, a saber, $[Q(t)/100]$ lb/gal. Portanto, a taxa segundo a qual o sal deixa o tanque é $[rQ(t)/100]$ lb/min. Assim, a equação diferencial que governa esse processo é

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{r}{4} - \frac{rQ}{100}. \tag{2}$$

A condição inicial é

$$Q(0) = Q_0. \tag{3}$$

Pensando sobre o problema do ponto de vista físico, poderíamos antecipar que a mistura originalmente no tanque será substituída, finalmente, pela mistura que está entrando, cuja concentração é de 1/4 lb/gal. Em conseqüência, poderíamos esperar que a quantidade de sal no tanque, após um longo período, estará perto de 25 lb. Podemos também encontrar a quantidade limite Q_L = 25 igualando dQ/dt a zero na Eq. (2) e resolvendo a equação algébrica resultante para Q.

Para resolver o problema analiticamente, note que a Eq. (2) é linear e separável. Escrevendo-a na forma usual para uma equação linear, temos

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}. \tag{4}$$

Logo, o fator integrante é $e^{rt/100}$ e a solução geral é

$$Q(t) = 25 + ce^{-rt/100}, \tag{5}$$

onde c é uma constante arbitrária. Para satisfazer a condição inicial (3), precisamos escolher $c = Q_0 - 25$. Portanto, a solução do problema de valor inicial (2), (3) é

$$Q(t) = 25 + (Q_0 - 25)e^{-rt/100} \tag{6}$$

ou

$$Q(t) = 25(1 - e^{-rt/100}) + Q_0e^{-rt/100}. \tag{7}$$

Da Eq. (6) ou (7), você pode ver que $Q(t) \to 25$ quando $t \to \infty$, logo o valor limite Q_L é 25, confirmando nossa intuição física. Além disso, $Q(t)$ se aproxima mais rapidamente do limite quando r aumenta. Ao interpretar a solução (7), note que a segunda parcela na expressão à direita do sinal de igualdade é a porção do sal original que permanece no instante t, enquanto a primeira parcela fornece a quantidade de sal no tanque devido à ação dos processos de fluxo. A Fig. 2.3.2 mostra gráficos da solução para $r = 3$ e diversos valores de Q_0.

Suponha, agora, que $r = 3$ e $Q_0 = 2Q_L = 50$; então a Eq. (6) fica

$$Q(t) = 25 + 25e^{-0,03t}. \tag{8}$$

Como 2% de 25 é 0,5, queremos encontrar o instante T no qual $Q(t)$ tem o valor 25,5. Substituindo $t = T$ e $Q = 25,5$ na Eq. (8) e resolvendo para T, encontramos

$$T = (\ln 50)/0,03 \cong 130,4 \text{ (min)}. \tag{9}$$

Para determinar r de modo que $T = 45$, volte à Eq. (6), faça $t = 45$, $Q_0 = 50$, $Q(t) = 25,5$ e resolva para r. O resultado é

$$r = (100/45) \ln 50 \cong 8,69 \text{ gal/min}. \tag{10}$$

Como esse exemplo é hipotético, a validade do modelo não está em questão. Se as taxas de fluxo são como enunciadas e se a concentração de sal no tanque é uniforme, então a equação diferencial (1) fornece uma descrição precisa do processo de fluxo. Embora esse exemplo particular não tenha um significado especial, modelos desse tipo são usados, freqüentemente, em problemas envolvendo poluentes em um lago, ou quantidade de remédio em um órgão do corpo, por exemplo, em vez de um tanque de água salgada. Nesses casos, as taxas de fluxo podem não ser fáceis de determinar, ou podem variar com o tempo. Analogamente, a concentração pode estar longe de ser uniforme em alguns casos. Finalmente, as taxas de fluxo de entrada e de saída podem ser diferentes, o que significa que a variação da quantidade de líquido no problema também tem que ser levada em consideração.

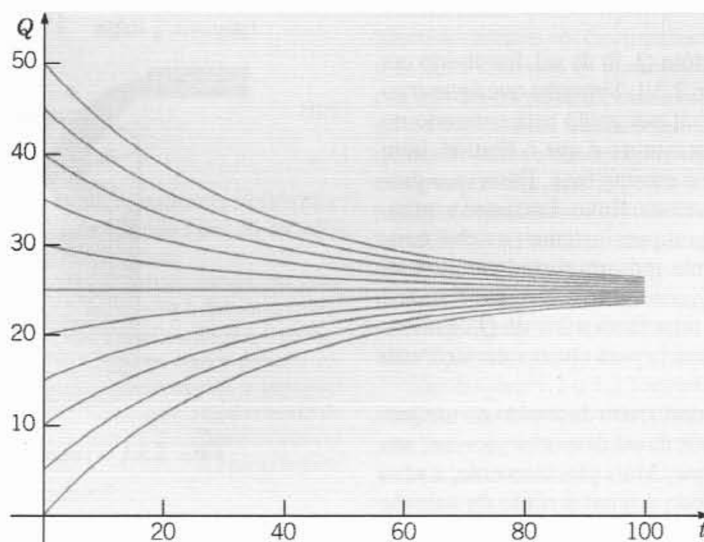


FIG. 2.3.2 Soluções do problema de valor inicial (2), (3) para $r = 3$ e diversos valores de Q_0.

Exemplo 2

Juros Compostos

Suponha que uma certa quantidade de dinheiro é depositada em um banco ou fundo de investimento que paga juros a uma taxa anual r. O valor $S(t)$ do investimento em qualquer instante t depende da freqüência na qual os juros são compostos, bem como da taxa de juros. Instituições financeiras têm políticas diferentes sobre a composição dos juros: algumas calculam os juros mensalmente, outras semanalmente, outras até diariamente. Se supusermos que os juros são calculados *continuamente*, podemos escrever um problema de valor inicial que descreva o crescimento do investimento.

A taxa de variação do valor do investimento é dS/dt e essa quantidade é igual à taxa segundo a qual o investimento aumenta, que é a taxa de juros r vezes o valor corrente do investimento S. Assim,

$$dS/dt = rS \tag{11}$$

é a equação diferencial que governa o processo. Suponha que sabemos, também, o valor do investimento em um instante particular, por exemplo,

$$S(0) = S_0. \tag{12}$$

Então, a solução do problema de valor inicial (11), (12) nos dá o saldo $S(t)$ na conta em qualquer instante t. Esse problema de valor inicial pode ser resolvido facilmente, já que a equação diferencial (11) é linear e separável. Logo, resolvendo as Eqs. (11) e (12), encontramos

$$S(t) = S_0e^{rt}. \tag{13}$$

Portanto, uma conta bancária onde os juros são compostos continuamente cresce exponencialmente.

Vamos comparar, agora, os resultados desse modelo contínuo com a situação onde os juros são compostos em intervalos de tempo finitos. Se os juros são calculados uma vez por ano, então, após t anos,

$$S(t) = S_0(1 + r)^t.$$

Se os juros são calculados duas vezes por ano, então, ao final de 6 meses, o valor do investimento é $S_0[1 + (r/2)]$ e, ao final de 1 ano, é $S_0[1 + (r/2)]^2$. Assim, ao final de t anos, temos

$$S(t) = S_0\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t}.$$

Em geral, se os juros são calculados m vezes ao ano, então

$$S(t) = S_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}. \tag{14}$$

A relação entre as fórmulas (13) e (14) fica mais clara se lembrarmos, do cálculo, que

$$\lim_{m\to\infty} S_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = S_0e^{rt}.$$

Esse mesmo modelo pode ser aplicado da mesma forma a investimentos em geral, onde se pode acumular dividendos e até ganhos de capital, além de juros. Devido a isso, vamos nos referir de agora em diante a r como sendo a taxa de rendimento.

A Tabela 2.3.1 mostra o efeito do aumento da freqüência de cálculo para uma taxa de rendimento r de 8%. As segunda e terceira colunas são calculadas usando-se a Eq. (14) para o cálculo trimestral e o diário, respectivamente, e a quarta coluna é calculada pela Eq. (13) para o cálculo contínuo. Os resultados mostram que a freqüência de cálculo não é particularmente importante na maioria dos casos. Por exemplo, durante um período de 10 anos, a diferença entre o cálculo trimestral e o contínuo é de R$17,50 por R$1000,00 investidos, ou menos de R$2,00 por ano. A diferença seria um pouco maior para taxas de rendimento maiores e seria um pouco menor para taxas de rendimento menores. Pela primeira linha da tabela, vemos que, para a taxa de rendimento $r = 8\%$, os juros compostos anuais calculados trimestralmente correspondem a 8,24% e os calculados diariamente ou continuamente correspondem a 8,33%.

TABELA 2.3.1 Crescimento de Capital a uma Taxa de Rendimento de $r = 8\%$ para Diversas Composições dos Juros

	$S(t)/S(t_0)$ da Eq. (14)		$S(t)/S(t_0)$
Anos	$m = 4$	$m = 365$	da Eq. (13)
1	1,0824	1,0833	1,0833
2	1,1717	1,1735	1,1735
5	1,4859	1,4918	1,4918
10	2,2080	2,2253	2,2255
20	4,8754	4,9522	4,9530
30	10,7652	11,0203	11,0232
40	23,7699	24,5239	24,5325

Voltando ao caso da composição contínua, vamos supor que podem existir depósitos e saques, além do acréscimo de juros, dividendos ou ganhos de capital. Se supusermos que os depósitos ou saques são feitos a uma taxa constante k, então a Eq. (11) é substituída por

$$dS/dt = rS + k,$$

ou, em forma padrão,

$$dS/dt - rS = k, \tag{15}$$

onde a constante k é positiva para depósitos e negativa para saques.

A Eq. (15) é claramente linear com fator integrante e^{-rt}, logo sua solução geral é

$$S(t) = ce^{rt} - (k/r),$$

onde c é uma constante arbitrária. Para satisfazer a condição inicial (12), precisamos escolher $c = S_0 + (k/r)$. Logo, a solução do problema de valor inicial (15), (12) é

$$S(t) = S_0e^{rt} + (k/r)(e^{rt} - 1). \tag{16}$$

A primeira parcela na fórmula (16) é a parte de $S(t)$ devida ao rendimento acumulado sobre o investimento inicial S_0 e a segunda parcela é a parte devida à taxa k de depósito ou saque.

A vantagem de enunciar o problema dessa forma geral, sem valores específicos para S_0, r ou k, é a generalidade da fórmula resultante, (16), para $S(t)$. Com essa fórmula, podemos comparar, facilmente, os resultados de programas de investimento diferentes ou taxas diferentes de rendimento.

Por exemplo, suponha que uma pessoa abre uma conta (PREV) para complementar sua aposentadoria com 25 anos e faz investimentos anuais de R$2000,00 daí para a frente de um modo contínuo. Supondo uma taxa de rendimento de 8% ao ano, qual será o saldo na conta PREV quando a pessoa tiver 65 anos? Temos $S_0 = 0$, $r = 0{,}08$, $k =$ R$2000,00 e queremos determinar $S(40)$. Da Eq. (16), temos

$$S(40) = (25.000)(e^{3.2} - 1) = \$588.313. \tag{17}$$

É interessante observar que a quantia total investida é de R\$80.000, de modo que a quantia a mais, R\$508.313, resulta do rendimento acumulado sobre o investimento. O saldo depois de 40 anos é bastante sensível à taxa suposta. Por exemplo, $S(40)$ = R\$508.948 se $r = 0{,}075$ e $S(40)$ = R\$681.508 se $r = 0{,}085$.

Vamos examinar, agora, as hipóteses que usamos no modelo. Primeiro, supusemos que o rendimento é composto continuamente e que o capital adicional é investido continuamente. Nenhum desses fatos é verdadeiro em uma situação financeira real. Supusemos, também, que a taxa de rendimento r é constante durante todo o período em questão, enquanto, de fato, ela provavelmente flutuará bastante. Embora não possamos prever taxas futuras de maneira confiável, podemos usar a fórmula (16) para determinar os efeitos aproximados das projeções de taxas diferentes. É possível, também, considerar r e k na Eq. (15) como funções de t, em vez de constantes; é claro que, nesse caso, a solução pode ser muito mais complicada do que a Eq. (16).

O problema de valor inicial (15), (12) e a solução (16) também podem ser usados para analisar outras diversas situações financeiras, incluindo pensões, hipotecas, financiamentos de imóveis e financiamentos de carros.

Exemplo 3

Produtos Químicos em um Açude

Considere um açude contendo, inicialmente, 10 milhões de galões (cerca de 45 milhões de litros) de água fresca. O açude recebe um fluxo indesejável de produtos químicos a uma taxa de 5 milhões de galões por ano e a mistura sai do açude a uma mesma taxa. A concentração $\gamma(t)$ de produtos químicos na água que está entrando varia periodicamente com o tempo de acordo com a fórmula $\gamma(t) = 2 + \text{sen } 2t$ g/gal. Construa um modelo matemático desse processo de fluxo e determine a quantidade de produtos químicos no açude em qualquer instante. Faça um gráfico da solução e descreva, em palavras, o efeito da variação na concentração de produtos químicos entrando.

Como os fluxos de entrada e saída de água são iguais, a quantidade de água no açude permanece constante e igual a 10^7 galões. Vamos denotar o tempo por t, medido em anos, e a quantidade de produtos químicos por $Q(t)$, medido em gramas. Esse exemplo é semelhante ao Exemplo 1 e aplica-se o mesmo princípio de fluxos de entrada e saída. Assim,

$$\frac{dQ}{dt} = \text{taxa de entrada} - \text{taxa de saída}$$

onde "taxa de entrada" e "taxa de saída" se referem às taxas segundo as quais os produtos químicos entram e saem do açude, respectivamente. A taxa segundo a qual os produtos químicos entram é dada por

$$\text{taxa de entrada} = (5 \times 10^6)\ \text{gal/ano}\ (2 + \text{sen } 2t)\ \text{g/gal}. \quad (18)$$

A concentração de produtos químicos no açude é $Q(t)/10^7$ g/gal, de modo que a taxa de saída é

$$\begin{aligned} \text{taxa de saída} &= (5 \times 10^6)\ \text{gal/ano}\,[Q(t)/10^7]\ \text{g/gal} \quad (19) \\ &= Q(t)/2\ \text{g/ano}. \end{aligned}$$

Obtemos, então, a equação diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = (5 \times 10^6)(2 + \text{sen } 2t) - \frac{Q(t)}{2}, \quad (20)$$

onde cada parcela tem unidades de g/ano.

Para tornar os coeficientes mais tratáveis, é conveniente usar uma nova variável dependente definida por $q(t) = Q(t)/10^6$ ou $Q(t) = 10^6 q(t)$. Isso significa que $q(t)$ é medido em milhões de gramas, ou megagramas. Fazendo essa substituição na Eq. (20), cada parcela passa a conter o fator 10^6, que pode ser cancelado. Se trocarmos o lado da parcela envolvendo $q(t)$, do lado direito, em relação ao sinal de igualdade, para o esquerdo, temos, finalmente,

$$\frac{dq}{dt} + \tfrac{1}{2}q = 10 + 5\,\text{sen } 2t. \quad (21)$$

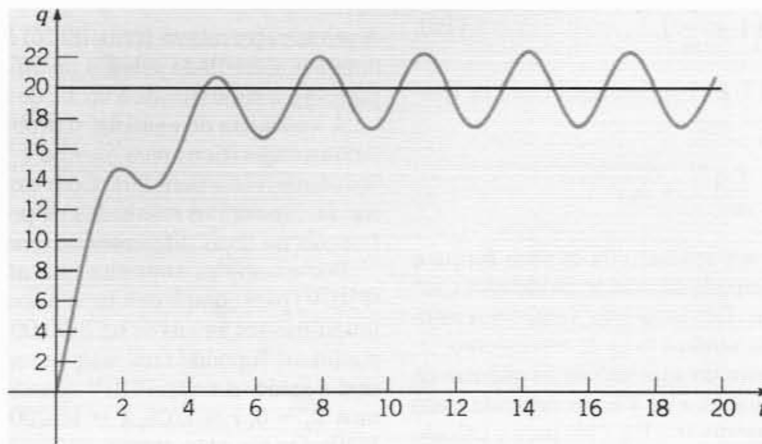


FIG. 2.3.3 Solução do problema de valor inicial (21), (22).

Originalmente, não existiam produtos químicos no açude, logo a condição inicial é

$$q(0) = 0. \tag{22}$$

A Eq. (21) é linear e, embora a expressão à direita do sinal de igualdade seja uma função do tempo, o coeficiente de $q(t)$ é constante. Portanto, o fator integrante é $e^{t/2}$. Multiplicando a Eq. (21) por esse fator e integrando a equação resultante, obtemos a solução geral

$$q(t) = 20 - \tfrac{40}{17}\cos 2t + \tfrac{10}{17}\operatorname{sen} 2t + ce^{-t/2}. \tag{23}$$

A condição inicial (22) implica que $c = -300/17$, logo a solução do problema de valor inicial (21), (22) é

$$q(t) = 20 - \tfrac{40}{17}\cos 2t + \tfrac{10}{17}\operatorname{sen} 2t - \tfrac{300}{17}e^{-t/2}. \tag{24}$$

A Fig. 2.3.3 mostra o gráfico da solução (24) junto com a reta $q = 20$. A parcela exponencial na solução é importante para valores pequenos de t, mas diminui rapidamente quando t cresce. Mais tarde, a solução consiste em uma oscilação, devido às parcelas sen $2t$ e cos $2t$, em torno do nível constante $q = 20$. Note que, se a parcela sen $2t$ não estivesse presente na Eq. (21), então $q = 20$ seria a solução de equilíbrio da equação.

Vamos considerar, agora, o quão adequado é esse modelo matemático para esse problema. O modelo baseia-se em diversas hipóteses ainda não enunciadas explicitamente. Em primeiro lugar, a quantidade de água no açude é inteiramente controlada pelas taxas de fluxo de entrada e saída — nada é perdido por evaporação ou absorção pelo solo e nada é acrescentado pelas chuvas. O mesmo é válido para os produtos químicos; eles entram e saem do açude, mas nem um pouco é absorvido por peixes ou outros organismos que vivem no açude. Além disso, supusemos que a concentração de produtos químicos no açude é uniforme no açude inteiro. Se os resultados obtidos desse modelo são precisos ou não depende fortemente da validade dessas hipóteses que simplificam o problema.

Exemplo 4

Velocidade de Escape

Um corpo de massa constante m é projetado para fora da Terra em uma direção perpendicular à superfície da Terra com uma velocidade inicial v_0. Supondo desprezível a resistência do ar, mas levando em consideração a variação do campo gravitacional da Terra com a distância, encontre uma fórmula para a velocidade desse corpo em movimento. Encontre, também, a velocidade inicial necessária para levantar o corpo até uma altitude máxima dada ξ acima da superfície da Terra e a menor velocidade inicial para a qual o corpo não retorna à Terra; essa última é a **velocidade de escape**.

Vamos colocar o eixo positivo dos x apontando para fora do centro da Terra, ao longo da linha do movimento, com $x = 0$ na superfície da Terra; veja a Fig. 2.3.4. A figura está desenhada horizontalmente para lembrá-lo de que a gravidade está direcionada para o centro da Terra, o que não é, necessariamente, para baixo de uma perspectiva longe da superfície da Terra. A força gravitacional agindo sobre o corpo (isto é, seu peso) é inversamente proporcional ao quadrado da distância ao centro da Terra e é dada por $w(x) = -k/(x + R)^2$, onde k é uma constante, R é o raio da Terra e o sinal de menos significa que $w(x)$ aponta na direção negativa dos x. Sabemos que, na superfície da Terra, $w(0)$ é dada por $-mg$, onde g é a aceleração da gravidade no nível do mar. Portanto, $k = mgR^2$ e

$$w(x) = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}. \tag{25}$$

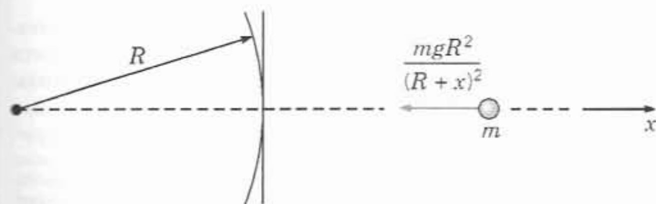


FIG. 2.3.4 Um corpo no campo gravitacional da Terra.

Como não existem outras forças agindo sobre o corpo, a equação de movimento é

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}, \tag{26}$$

e a condição inicial é

$$v(0) = v_0. \tag{27}$$

Infelizmente, a Eq. (26) envolve variáveis demais, já que depende de t, x e v. Para consertar essa situação, podemos eliminar t da Eq. (26) considerando x, em vez de t, como a variável independente. Precisamos expressar, então, dv/dt em função de dv/dx pela regra da cadeia; logo,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx},$$

e a Eq. (26) é substituída por

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(R+x)^2}. \tag{28}$$

A Eq. (28) é separável, mas não-linear, logo, separando as variáveis e integrando, obtemos

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{R+x} + c. \tag{29}$$

Como $x = 0$ quando $t = 0$, a condição inicial (27) em $t = 0$ pode ser substituída pela condição $v = v_0$ quando $x = 0$. Portanto, $c = (v_0^2/2) - gR$ e

$$v = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{R+x}}. \tag{30}$$

Note que a Eq. (30) fornece a velocidade em função da altitude, em vez de em função do tempo. O sinal de mais tem que ser escolhido se o corpo está subindo e o sinal de menos se o corpo está caindo de volta na Terra.

Para determinar a altitude máxima atingida pelo corpo fazemos $v = 0$ e $x = \xi$ na Eq. (30) e depois resolvemos para ξ, obtendo

$$\xi = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2}. \qquad (31)$$

Resolvendo a Eq. (31) para v_0, encontramos a velocidade inicial necessária para levantar o corpo até a altitude ξ, a saber,

$$v_0 = \sqrt{2gR\frac{\xi}{R + \xi}}. \qquad (32)$$

A velocidade de escape v_e é encontrada, então, fazendo-se $\xi \to \infty$. Temos, então,

$$v_e = \sqrt{2gR}. \qquad (33)$$

O valor numérico de v_e é de, aproximadamente, 6,9 milhas/s ou 11,1 km/s.

Esses cálculos para a velocidade de escape desprezam os efeitos da resistência do ar, de modo que a velocidade de escape real (incluindo o efeito da resistência do ar) é um pouco maior. Por outro lado, a velocidade de escape efetiva pode ser reduzida substancialmente se o corpo for transportado a uma distância considerável acima do nível do mar antes de ser lançado. Ambas as forças gravitacional e de atrito ficam bastante reduzidas; a resistência do ar, em particular, diminui rapidamente quando a altitude aumenta. Você deve manter em mente, também, que pode ser impossível, na prática, dar uma velocidade inicial muito grande instantaneamente; veículos espaciais, por exemplo, recebem sua aceleração inicial durante um período de vários minutos.

Problemas

1. Considere um tanque usado em determinados experimentos hidrodinâmicos. Após um experimento, o tanque contém 200 litros de uma solução de tinta a uma concentração de 1 g/l. Para preparar para o próximo experimento, o tanque tem que ser lavado com água fresca entrando a uma taxa de 2 litros por minuto, a solução bem misturada saindo à mesma taxa. Encontre o tempo necessário para que a concentração de tinta no tanque atinja 1% de seu valor original.
2. Um tanque contém, inicialmente, 120 litros de água pura. Uma mistura contendo uma concentração de γ g/l de sal entra no tanque a uma taxa de 2 l/min e a solução, bem misturada, sai do tanque à mesma taxa. Encontre uma fórmula, em função de γ, para a quantidade de sal no tanque em qualquer instante t. Encontre, também, a quantidade limite de sal no tanque quando $t \to \infty$.
3. Um tanque contém, originalmente, 100 galões (cerca de 455 litros) de água fresca. É despejada, então, água no tanque contendo 1/2 lb (cerca de 227 g) de sal por galão a uma taxa de 2 galões por minuto e a mistura sai do tanque à mesma taxa. Após 10 minutos, o processo é parado e é despejada água fresca no tanque a uma taxa de 2 galões por min, com a mistura saindo, novamente, à mesma taxa. Encontre a quantidade de sal no tanque após mais 10 minutos.
4. Um tanque, com uma capacidade de 500 galões, contém, originalmente, 200 galões (cerca de 910 litros) de uma solução de água com 100 lb (cerca de 45,4 kg) de sal. Uma solução de água contendo 1 lb de sal por galão entra a uma taxa de 3 galões por minuto e permite-se que a mistura saia a uma taxa de 2 galões por minuto. Encontre a quantidade de sal no tanque em qualquer instante anterior ao instante em que o tanque começa a transbordar. Encontre a concentração (em libras por galão) de sal no tanque quando ele está a ponto de transbordar. Compare essa concentração com o limite teórico de concentração se o tanque tivesse capacidade infinita.
5. Um tanque contém 100 galões (cerca de 455 litros) de água e 50 onças (cerca de 1,42 kg) de sal. Água contendo uma concentração de sal de $1/4\,(1 + 1/2 \operatorname{sen} t)$ oz/gal entra no tanque a uma taxa de 2 galões por minuto e a mistura no tanque sai à mesma taxa.
(a) Encontre a quantidade de sal no tanque em qualquer instante.
(b) Desenhe a solução para um período de tempo suficientemente grande de modo que você possa ver o comportamento limite da solução.
(c) O comportamento limite da solução é uma oscilação em torno de um determinado nível constante. Qual é esse nível? Qual a amplitude da oscilação?
6. Suponha que um tanque contendo um determinado líquido tem um dreno perto do fundo. Seja $h(t)$ a altura da superfície acima do dreno no instante t. O princípio de Torricelli[2] afirma que a velocidade v do fluxo no dreno é igual à velocidade de uma partícula em queda livre (sem atrito) de uma altura h.
(*a*) Mostre que $v = \sqrt{2gh}$, onde g é a aceleração da gravidade.
(b) Igualando a taxa do fluxo no dreno à taxa de variação da quantidade de líquido no tanque, mostre que $h(t)$ satisfaz a equação
$$A(h)\frac{dh}{dt} = -\alpha a\sqrt{2gh}, \qquad \text{(i)}$$
onde $A(h)$ é a área da seção reta do tanque à altura h e a é a área da abertura do dreno. A constante α é o coeficiente de contração que considera o fato observado que a seção reta do jato de líquido fluindo é menor do que a. O valor de α para a água é cerca de 0,6.
(c) Considere um tanque de água com o formato de um cilindro circular reto com 3 m de altura acima do dreno. O tanque tem 1 m de raio e o raio da abertura circular do dreno é de 0,1 m. Se o tanque está cheio de água inicialmente, determine quanto tempo vai levar para esvaziar o tanque até o nível do dreno.
7. Suponha que é investida uma quantia S_0 a uma taxa de rendimento anual r composto continuamente.
(a) Encontre o tempo T necessário, em função de r, para a quantia original dobrar de valor.
(b) Determine T se $r = 7\%$.
(c) Encontre a taxa de rendimento que tem que ser usada para que o investimento inicial dobre em 8 anos.
8. Um jovem, sem capital inicial, investe k reais por ano a uma taxa anual de rendimento r. Suponha que os investimentos são feitos continuamente e que o rendimento é composto continuamente.
(a) Determine a quantia $S(t)$ acumulada em qualquer instante t.
(b) Se $r = 7{,}5\%$, determine k de modo que esteja disponível R$1 milhão para a aposentadoria após 40 anos.
(c) Se k = R$2000/ano, determine a taxa de rendimento r que precisa ser aplicada para se ter R$1 milhão após 40 anos.
9. Uma pessoa, ao se formar na faculdade, pega R$8000 emprestados para comprar um carro. A financeira cobra taxas de juros anuais de 10%. Supondo que os juros são compostos continua-

[2]Evangelista Torricelli (1608-1647), sucessor de Galileu como matemático da corte em Florença, publicou este resultado em 1644. Ele também é conhecido por ter construído o primeiro barômetro de mercúrio e por ter feito contribuições importantes na área de geometria.

mente e que a pessoa faz pagamentos contínuos a uma taxa constante anual k, determine a taxa de pagamento k necessária para que o empréstimo seja pago em 3 anos. Determine, também, o total de juros pagos durante o período de 3 anos.

10. Um comprador de imóvel não pode pagar mais que R$800/mês para o financiamento de sua casa própria. Suponha que a taxa de juros é de 9% ao ano e que o financiamento é de 20 anos. Suponha que os juros são compostos continuamente e que os pagamentos também são feitos continuamente.
(a) Determine o empréstimo máximo que esse comprador pode pedir.
(b) Determine os juros totais pagos durante todo o empréstimo.

11. Uma pessoa recém-graduada obteve um empréstimo de R$100.000 a uma taxa de 9% ao ano para comprar um apartamento. Antecipando aumentos regulares de salário, o comprador espera efetuar pagamentos a uma taxa mensal de $800(1 + t/120)$, onde t é o número de meses desde que o empréstimo foi feito.
(a) Supondo que essa programação de pagamentos possa ser mantida, quando o empréstimo estará liquidado?
(b) Supondo o mesmo programa de pagamento, qual o empréstimo máximo que pode ser liquidado em exatamente 20 anos?

12. Uma ferramenta importante em pesquisa arqueológica é a datação por carbono radioativo desenvolvida pelo químico americano Willard F. Libby.[3] Essa é uma maneira de determinar a idade de restos de certas madeiras e plantas, assim como de ossos, humanos ou de animais, ou de artefatos enterrados nos mesmos níveis. A datação por carbono radioativo é baseada no fato de que algumas madeiras ou plantas contêm quantidades residuais de carbono-14, um isótopo radioativo do carbono. Esse isótopo é acumulado durante a vida da planta e começa a decair na sua morte. Como a meia-vida do carbono é longa (aproximadamente 5730 anos[4]), podem ser medidas quantidades remanescentes de carbono-14 após muitos milhares de anos. Mesmo que a fração da quantidade original de carbono-14 ainda presente seja muito pequena, através de medidas adequadas feitas em laboratório, a *proporção* da quantidade original de carbono-14 que permanece pode ser determinada precisamente. Em outras palavras, se $Q(t)$ é a quantidade de carbono-14 no instante t e se Q_0 é a quantidade original, então a razão $Q(t)/Q_0$ pode ser determinada, pelo menos se essa quantidade não for pequena demais. Técnicas atuais de medida permitem a utilização desse método para períodos de tempo até em torno de 50.000 anos ou mais.
(a) Supondo que Q satisfaz a equação diferencial $Q' = -rQ$, determine a constante de decaimento r para o carbono-14.
(b) Encontre uma expressão para $Q(t)$ em qualquer instante t se $Q(0) = Q_0$.
(c) Suponha que são descobertos certos restos de plantas nos quais a quantidade residual atual de carbono-14 é 20% da quantidade original. Determine a idade desses restos.

13. A população de mosquitos em determinada área cresce a uma taxa proporcional à população atual e, na ausência de outros fatores, a população dobra a cada semana. Existem, inicialmente, 200.000 mosquitos na área e os predadores (pássaros, morcegos, etc.) comem 20.000 mosquitos/dia. Determine a população de mosquitos na área em qualquer instante t.

14. Suponha que uma determinada população tem uma taxa de crescimento que varia com o tempo e que essa população satisfaz a equação diferencial

$$dy/dt = (0{,}5 + \operatorname{sen} t)y/5.$$

(a) Se $y(0) = 1$, encontre (ou estime) o instante τ no qual a população dobra. Escolha outra condição inicial e determine se o tempo τ em que ela dobra depende da população inicial.
(b) Suponha que a taxa de crescimento é substituída pelo seu valor médio 1/10. Determine o tempo τ nesse caso.
(c) Suponha que a parcela $\operatorname{sen} t$ na equação diferencial é substituída por $\operatorname{sen} 2\pi t$, isto é, a variação na taxa de crescimento tem uma freqüência substancialmente maior. Qual o efeito disso sobre o tempo em que a população dobra?
(d) Faça os gráficos das soluções obtidas em (a), (b) e (c) em um mesmo par de eixos.

15. Suponha que uma determinada população satisfaz o problema de valor inicial

$$dy/dt = r(t)y - k, \qquad y(0) = y_0,$$

onde a taxa de crescimento $r(t)$ é dada por $r(t) = (1 + \operatorname{sen} t)/5$ e k representa a taxa predatória.
(a) Suponha que $k = 1/5$. Faça o gráfico de y em função de t para diversos valores de y_0 entre 1/2 e 1.
(b) Estime a população inicial crítica y_c abaixo da qual a população se torna extinta.
(c) Escolha outros valores para k e encontre o y_c correspondente para cada um deles.
(d) Use os dados encontrados em (a) e (b) para fazer o gráfico de y_c em função de k.

16. A lei do resfriamento de Newton diz que a temperatura de um objeto muda a uma taxa proporcional à diferença entre sua temperatura e a do ambiente que o rodeia. Suponha que a temperatura de uma xícara de café obedece à lei do resfriamento de Newton. Se o café estava a uma temperatura de 200°F (cerca de 93°C)[5] ao ser colocado na xícara e, 1 minuto depois, esfriou para 190°F em uma sala a 70°F, determine quando o café atinge a temperatura de 150°F.

17. A transferência de calor de um corpo para o ambiente que o rodeia por radiação, segundo a lei de Stefan-Boltzmann[6], é descrita pela equação diferencial

$$\frac{du}{dt} = -\alpha(u^4 - T^4), \qquad \text{(i)}$$

onde $u(t)$ é a temperatura absoluta do corpo no instante t, T é a temperatura absoluta do ambiente e α é uma constante que depende dos parâmetros físicos corpo. No entanto, se u é muito maior do que T, então as soluções da Eq. (i) podem ser bem aproximadas pelas soluções da equação mais simples

$$\frac{du}{dt} = -\alpha u^4. \qquad \text{(ii)}$$

Suponha que um corpo com temperatura inicial de 2000°K está imerso em um meio à temperatura de 300°K e que $\alpha = 2{,}0 \times 10^{-12}\ °K^{-3}/s$.
(a) Determine a temperatura do corpo em qualquer instante resolvendo a Eq. (ii).
(b) Faça o gráfico de u em função de t.
(c) Encontre o instante τ no qual $u(\tau) = 600$, isto é, o dobro da temperatura ambiente. Até esse instante, o erro na utilização da Eq. (ii) para aproximar as soluções da Eq. (i) não é maior do que 1%.

18. Considere uma caixa isolada termicamente (um edifício, talvez) com temperatura interna $u(t)$. De acordo com a lei do resfriamento de Newton, u satisfaz a equação diferencial

$$\frac{du}{dt} = -k[u - T(t)], \qquad \text{(i)}$$

[3]Willard F. Libby (1908-1980) nasceu na zona rural do Colorado, nos Estados Unidos, e estudou na Universidade da Califórnia em Berkeley. Começou a desenvolver o método de datação por carbono radioativo em 1947 na Universidade de Chicago. Recebeu o Prêmio Nobel de química em 1960 por esse trabalho.

[4]*McGraw-Hill Encyclopedia of Science and Technology* (8[th] Ed.) (New York: McGraw-Hill, 1997), Vol. 5, p. 48.

[5]A fórmula que relaciona graus Fahrenheit e graus Celsius é $(F - 32)/9 = C/5$. (*N.T.*)

[6]Jozef Stefan (1835–1893), professor de Física em Viena, enunciou a lei de radiação em bases empíricas em 1879. Seu discípulo Ludwig Boltzmann (1844–1906) a deduziu teoricamente através dos princípios de termodinâmica em 1884. Boltzmann é mais conhecido por seu trabalho pioneiro em mecânica estatística.

onde $T(t)$ é a temperatura ambiene (externa). Suponha que $T(t)$ varia senoidalmente; por exemplo, suponha que $T(t) = T_0 + T_1 \cos \omega t$.
(a) Resolva a Eq. (i) e expresse $u(t)$ em função de t, k, T_0, T_1 e ω. Observe que parte de sua solução tende a zero quando t torna-se muito grande; essa é chamada de parte transiente. A parte restante da solução é chamada de estado estacionário; denote-a por $S(t)$.
(b) Suponha que t é medido em horas e que $\omega = \pi/12$, correspondendo a um período de 24 horas para $T(t)$. Além disso, suponha que $T_0 = 60°F$ (cerca de 15,5°C), $T_1 = 15°F$ (cerca de −9,4°C) e $k = 0{,}2$/h. Desenhe os gráficos de $S(t)$ e $T(t)$ em função de t no mesmo conjunto de eixos. A partir de seu gráfico, estime a amplitude R da parte oscilatória de $S(t)$. Além disso, estime a defasagem de tempo entre os máximos correspondentes de $T(t)$ e de $S(t)$.
(c) Suponha agora que k, T_0, T_1 e ω não estão especificados. Escreva a parte oscilatória de $S(t)$ na forma $R \cos [\omega(t - \tau)]$. Use identidades trigonométricas para encontrar expressões para R e τ. Suponha que T_1 e ω assumem os valores dados no item (b) e desenhe os gráficos de R e τ em função de k.

19. Considere um lago de volume constante V contendo, no instante t, uma quantidade $Q(t)$ de poluentes, distribuídos uniformemente no lago, com uma concentração $c(t)$, onde $c(t) = Q(t)/V$. Suponha que entra no lago água contendo uma concentração k de poluentes a uma taxa r e que a água deixa o lago à mesma taxa. Suponha que os poluentes são, também, adicionados diretamente ao lago a uma taxa constante P. Note que as hipóteses feitas negligenciam uma série de fatores que podem ser importantes em alguns casos — por exemplo, a água adicionada ou perdida por precipitação, absorção ou evaporação; o efeito estratificador de diferenças de temperatura em um lago profundo; a tendência de irregularidades na costa produzirem baías protegidas; e o fato de que os poluentes não são depositados uniformemente no lago, mas (em geral) em pontos isolados de sua periferia. Os resultados a seguir têm que ser interpretados levando-se em consideração que fatores desse tipo foram desprezados.
(a) Se, no instante $t = 0$, a concentração de poluentes é c_0, encontre uma fórmula para a concentração $c(t)$ em qualquer instante t. Qual a concentração limite quando $t \to \infty$?
(b) Se termina a adição de poluentes ao lago ($k = 0$ e $P = 0$ para $t > 0$), determine o intervalo de tempo T necessário para que a concentração de poluentes seja reduzida a 50% de seu valor original; e a 10% de seu valor original.
(c) A Tabela 2.3.2 contém dados[7] para diversos lagos na região dos grandes lagos americanos. Usando esses dados, determine, do item (b), o tempo T necessário para reduzir a contaminação de cada um desses lagos a 10% de seu valor original.

TABELA 2.3.2 Dados sobre Volume e Fluxo nos Grandes Lagos Americanos

Lago	V (km³ × 10³)	r (km³/ano)
Superior	12,2	65,2
Michigan	4,9	158
Erie	0,46	175
Ontário	1,6	209

20. Uma bola de massa 0,15 kg é atirada para cima com velocidade inicial de 20 m/s do teto de um edifício com 30 m de altura. Despreze a resistência do ar.
(a) Encontre a altura máxima, acima do chão, atingida pela bola.
(b) Supondo que a bola não bate no prédio ao descer, encontre o instante em que ela atinge o solo.
(c) Desenhe os gráficos da velocidade e da posição em função do tempo.

21. Suponha que as condições são como no Problema 20 exceto que existe uma força devido à resistência do ar de $|v|/30$, onde v é a velocidade medida em m/s.
(a) Encontre a altura máxima, acima do chão, atingida pela bola.
(b) Encontre o instante em que a bola atinge o solo.
(c) Desenhe os gráficos da velocidade e da posição em função do tempo. Compare esses gráficos com os gráficos correspondentes do Problema 20.

22. Suponha que as condições são como no Problema 20 exceto que existe uma força devido à resistência do ar de $v^2/1325$, onde v é a velocidade medida em m/s.
(a) Encontre a altura máxima, acima do chão, atingida pela bola.
(b) Encontre o instante em que a bola atinge o solo.
(c) Desenhe os gráficos da velocidade e da posição em função do tempo. Compare esses gráficos com os gráficos correspondentes dos Problemas 20 e 21.

23. Um homem de 180 lb (cerca de 82 kg) cai verticalmente de uma altitude de 5000 ft (cerca de 1524 m) e abre o pára-quedas após 10 segundos de queda livre. Suponha que a força da resistência do ar é de $0{,}75|v|$ quando o pára-quedas está fechado e de $12|v|$ quando está aberto, onde a velocidade v é medida em pés/s.
(a) Encontre a velocidade do homem quando o pára-quedas abre.
(b) Encontre a distância que ele caiu até a abertura do pára-quedas.
(c) Qual é a velocidade limite v_L depois que o pára-quedas abre?
(d) Determine por quanto tempo o homem permanece no ar após a abertura do pára-quedas.
(e) Faça o gráfico da velocidade em função do tempo desde o início da queda até o homem atingir o solo.

24. Um trenó foguete com velocidade inicial de 150 milhas/h (cerca de 241 km/h) tem sua velocidade diminuída por um canal de água. Suponha que durante o processo de freagem a aceleração a é dada por $a(v) = -\mu v^2$, onde v é a velocidade e μ é uma constante.
(a) Como no Exemplo 4 do texto, use a relação $dv/dt = v(dv/dx)$ para escrever a equação de movimento em função de v e de x.
(b) Se é necessária uma distância de 2000 pés (cerca de 6562 m) para o trenó atingir a velocidade de 15 milhas/h, determine o valor de μ.
(c) Encontre o tempo τ necessário para o trenó atingir a velocidade de 15 milhas/h.

25. Um corpo de massa constante m é projetado verticalmente para cima com uma velocidade inicial v_0 em um meio que oferece uma resistência $k|v|$, onde k é uma constante. Despreze mudanças na força gravitacional.
(a) Encontre a altura máxima x_m atingida pelo corpo e o instante t_m no qual essa altura máxima é atingida.
(b) Mostre que, se $kv_0/mg < 1$, então t_m e x_m são iguais a

$$t_m = \frac{v_0}{g}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{3}\left(\frac{kv_0}{mg}\right)^2 - \cdots\right],$$

$$x_m = \frac{v_0^2}{2g}\left[1 - \frac{2}{3}\frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{2}\left(\frac{kv_0}{mg}\right)^2 - \cdots\right].$$

(c) Mostre que a quantidade kv_0/mg é adimensional.

26. Um corpo de massa m é projetado verticalmente para cima com uma velocidade inicial v_0 em um meio que oferece uma resistência $k|v|$, onde k é uma constante. Suponha que a atração gravitacional da Terra é constante.
(a) Encontre a velocidade $v(t)$ do corpo em qualquer instante t.
(b) Use o resultado do item (a) para calcular o limite de $v(t)$ quando $k \to 0$, isto é, quando a resistência do ar tende a zero.

[7]Esse problema baseia-se no artigo de R. H. Rainey, "*Natural Displacement of Pollution from the Great Lakes*", *Science 155* (1967), pp. 1242-1243, de onde foi tirada a informação contida na tabela.

Esse resultado coincide com a velocidade de uma massa m projetada verticalmente para cima com uma velocidade inicial v_0 no vácuo?

(c) Use o resultado do item (a) para calcular o limite de $v(t)$ quando $m \to 0$, isto é, quando a massa tende a zero.

27. Três forças (veja a Fig. 2.3.5) agem em um corpo caindo em um fluido relativamente denso (óleo, por exemplo): uma força de resistência R, uma força de empuxo B e seu peso w devido à gravidade. A força de empuxo é igual ao peso do fluido deslocado pelo objeto. Para um corpo esférico de raio a movendo-se lentamente, a força de resistência é dada pela lei de Stokes[8] $R = 6\pi\mu a|v|$, onde v é a velocidade do corpo e μ é o coeficiente de viscosidade do fluido.

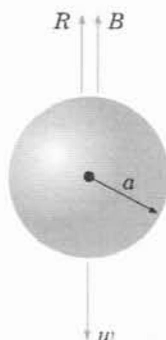


FIG. 2.3.5 Um corpo caindo em um fluido denso.

(a) Encontre a velocidade limite de uma esfera sólida de raio a e densidade ρ em queda livre em um meio de densidade ρ' e coeficiente de viscosidade μ.

(b) Em 1910, o físico americano R. A. Millikan[9] estudou o movimento de gotículas minúsculas de óleo caindo em um campo elétrico. O campo de intensidade E exerce uma força Ee em uma gotícula com carga e. Suponha que E tenha sido ajustada de modo que a gotícula é mantida estacionária ($v = 0$) e que w e B são como descritos anteriormente. Encontre uma fórmula para e. Millikan repetiu esse experimento muitas vezes e foi capaz de deduzir a carga de um elétron a partir dos dados obtidos.

28. Uma massa de 0,25 kg cai, a partir do repouso, em um meio com uma resistência de $0{,}2|v|$, onde v é medida em m/s.

(a) Se a massa cai de uma altura de 30 m, encontre sua velocidade ao atingir o solo.

(b) Se a massa não atinge uma velocidade de mais de 10 m/s, encontre a altura máxima da qual ela pode cair.

(c) Suponha que a força de resistência é $k|v|$, onde v é medida em m/s e k é uma constante. Se a massa cai de uma altura de 30 m e tem que atingir o solo com uma velocidade que não pode ser maior do que 10 m/s, determine o coeficiente k.

29. Suponha que um foguete é projetado da superfície da Terra diretamente para cima com velocidade inicial $v_0 = \sqrt{2gR}$, onde R é o raio da Terra. Despreze a resistência do ar.

(a) Encontre uma fórmula para a velocidade v em função da distância x à superfície da Terra.

(b) Encontre o tempo necessário para o foguete percorrer 240.000 milhas (a distância aproximada da Terra à Lua). Suponha que $R = 4000$ milhas.

30. Sejam $v(t)$ e $w(t)$, respectivamente, as componentes horizontal e vertical da velocidade de uma bola de beisebol rebatida (ou jogada). Na ausência de resistência do ar, v e w satisfazem as equações diferenciais

$$dv/dt = 0, \qquad dw/dt = -g.$$

(a) Mostre que

$$v = u\cos A, \qquad w = -gt + u\,\mathrm{sen}\,A,$$

onde u é a velocidade inicial da bola e A é o ângulo inicial de elevação.

(b) Sejam $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente, as coordenadas horizontal e vertical da bola no instante t. Se $x(0) = 0$ e $y(0) = h$, encontre $x(t)$ e $y(t)$ em qualquer instante t.

(c) Sejam $g = 32$ ft/s^2, $u = 125$ ft/s e $h = 3$ ft (1 ft tem, aproximadamente, 30,5 cm). Desenhe a trajetória da bola para diversos valores do ângulo inicial A, isto é, faça o gráfico paramétrico[10] de $x(t)$ e $y(t)$.

(d) Suponha que o muro que limita o campo externo está a uma distância L e tem altura H. Encontre uma relação entre u e A que tem que ser satisfeita para que a bola passe por cima do muro.

(e) Suponha que $L = 350$ ft e $H = 10$ ft. Usando a relação no item (d), encontre (ou estime através de um gráfico) o conjunto de valores de A que correspondem a uma velocidade inicial $u = 110$ ft/s.

(f) Para $L = 350$ e $H = 10$, encontre a velocidade inicial mínima u e o ângulo ótimo correspondente A para os quais a bola passa por cima do muro.

31. Um modelo mais realista (do que o do Problema 30) para a trajetória de uma bola de beisebol inclui a resistência do ar. Nesse caso, as equações de movimento são

$$dv/dt = -rv, \qquad dw/dt = -g - rw,$$

onde r é o coeficiente da resistência do ar.

(a) Determine $v(t)$ e $w(t)$ em função da velocidade inicial u e do ângulo inicial de elevação A.

(b) Encontre $x(t)$ e $y(t)$ se $x(0) = 0$ e $y(0) = h$.

(c) Faça o gráfico da trajetória da bola para $r = 1/5$, $u = 125$, $h = 3$ e diversos valores de A. Como essas trajetórias diferem das do Problema 30 com $r = 0$?

(d) Supondo que $r = 1/5$ e $h = 3$, encontre a velocidade inicial mínima e o ângulo ótimo A para os quais a bola passa por cima de um muro que dista 350 ft e tem 10 ft de altura. Compare esse resultado com o do Problema 30(f).

32. **O Problema da Braquistócrona.** Um dos problemas famosos na história da matemática é o problema da braquistócrona[11]: encontrar a curva ao longo da qual uma partícula desliza, sem fricção, em tempo mínimo, de um ponto dado P para um outro ponto Q, o segundo ponto estando mais baixo do que o primeiro, mas não diretamente abaixo (veja a Fig. 2.3.6). Esse problema foi colocado por Johann Bernoulli em 1696 como um desafio aos matemáticos de sua época. Soluções corretas foram encontradas por Johann Bernoulli e por seu irmão Jakob Bernoulli, além de Isaac Newton, Gottfried Leibniz e Marquês de L'Hospital. O problema da braquistócrona é importante no desenvolvimento da matemática como um dos precursores do cálculo das variações.

Para resolver esse problema, é conveniente colocar o ponto superior P na origem e orientar os eixos como na Fig. 2.3.6. O

---

[8] George Gabriel Stokes (1819-1903), professor em Cambridge, foi um dos matemáticos aplicados mais importantes do século XIX. As equações básicas da mecânica dos fluidos (equações de Navier-Stokes) levam seu nome, assim como um dos teoremas fundamentais do cálculo vetorial. Foi, também, um dos pioneiros no uso de séries divergentes (assintóticas), um assunto de grande interesse e importância hoje em dia.

[9] Robert A. Millikan (1868-1953) estudou em Oberlin College e na Universidade de Colúmbia. Mais tarde foi professor na Universidade de Chicago e no Instituto de Tecnologia da Califórnia. Seu trabalho contendo a determinação da carga de um elétron foi publicado em 1910. Por esse e outros trabalhos sobre o efeito fotoelétrico recebeu o Prêmio Nobel em 1923.

[10] Desenhe o gráfico usando os eixos x e y, calculando pares $(x(t), y(t))$ para diversos valores do parâmetro t. (*N.T.*)

[11] A palavra "braquistócrona" vem das palavras gregas *brachistos*, que significa o mais curto, e *chronos*, que significa tempo.

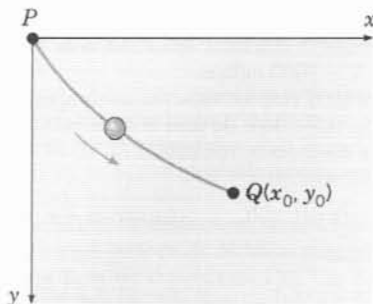


FIG. 2.3.6 A braquistócrona.

ponto inferior Q tem coordenadas (x_0, y_0). É possível, então, mostrar que a curva de tempo mínimo é dada por uma função $y = \phi(x)$ que satisfaz a equação diferencial

$$(1 + y'^2)y = k^2, \qquad \text{(i)}$$

onde k^2 é uma certa constante positiva a ser determinada mais tarde.

(a) Resolva a Eq. (i) para y'. Por que é necessário escolher a raiz quadrada positiva?

(b) Defina uma nova variável t pela relação

$$y = k^2 \operatorname{sen}^2 t. \qquad \text{(ii)}$$

Mostre que a equação encontrada em (a) fica, então, na forma

$$2k^2 \operatorname{sen}^2 t\, dt = dx. \qquad \text{(iii)}$$

(c) Fazendo $\theta = 2t$, mostre que a solução da Eq. (iii) para a qual $x = 0$ quando $y = 0$ é dada por

$$x = k^2(\theta - \operatorname{sen}\theta)/2, \qquad y = k^2(1 - \cos\theta)/2. \qquad \text{(iv)}$$

As Eqs. (iv) são as equações paramétricas da solução da Eq. (i) cujo gráfico contém o ponto (0, 0). O gráfico das Eqs. (iv) é chamado de **ciclóide**.

(d) Fazendo uma escolha apropriada da constante k, o gráfico da ciclóide também contém o ponto (x_0, y_0) e é solução do problema da braquistócrona. Encontre k se $x_0 = 1$ e $y_0 = 2$.

2.4 Diferenças entre Equações Lineares e Não-Lineares

Até agora, estivemos preocupados, principalmente, em mostrar que equações diferenciais de primeira ordem podem ser usadas para se investigar muitos tipos diferentes de problemas nas ciências naturais e apresentar métodos de resolução de tais equações se elas forem lineares ou separáveis. Agora está na hora de voltar nossa atenção para questões mais gerais sobre equações diferenciais e de explorar, mais detalhadamente, algumas maneiras importantes em que as equações não-lineares diferem das lineares.

Existência e Unicidade de Soluções. Discutimos, até agora, diversos problemas de valor inicial, cada um dos quais tendo solução e, aparentemente, apenas uma solução. Isso nos leva a perguntar se isso é verdade para todos os problemas de valor inicial para equações de primeira ordem. Em outras palavras, todo problema de valor inicial tem exatamente uma solução? Essa pode ser uma pergunta relevante mesmo para quem não é matemático. Se você encontrar um problema de valor inicial durante a investigação de um problema físico, você pode querer saber se ele tem solução antes de gastar um bocado de tempo e esforço para resolvê-lo. Além disso, se conseguir encontrar uma solução, você pode estar interessado em saber se deve continuar a procurar outras soluções possíveis ou se pode ter certeza de que não existem outras soluções. Para equações lineares, as respostas a essas perguntas são dadas pelo teorema fundamental a seguir.

Teorema 2.4.1

Se as funções p e g são contínuas em um intervalo aberto I: $\alpha < t < \beta$ contendo o ponto $t = t_0$, então existe uma única função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação diferencial

$$y' + p(t)y = g(t) \qquad (1)$$

para cada t em I e que também satisfaz a condição inicial

$$y(t_0) = y_0, \qquad (2)$$

onde y_0 é um valor inicial arbitrário prescrito.

Observe que o Teorema 2.4.1 afirma que o problema de valor inicial dado *tem* solução e, também, que tem *apenas uma* solução. Em outras palavras, o teorema afirma tanto a *existência* quanto a *unicidade* da solução do problema de valor inicial (1), (2). Além disso, ele diz que a solução existe em qualquer intervalo I, contendo o ponto inicial t_0, no qual os coeficientes p e g são contínuos. Isto é, a solução pode ser descontínua, ou deixar de existir, apenas em pontos onde pelo menos uma das funções, p ou g, é descontínua. Tais pontos podem ser identificados, com freqüência, com um simples olhar.

A demonstração desse teorema está parcialmente contida na discussão, na Seção 2.1, que leva à fórmula [Eq. (32) na Seção 2.1]

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t)dt + c, \qquad (3)$$

onde [Eq. (30) na Seção 2.1]

$$\mu(t) = \exp \int p(t)\, dt. \qquad (4)$$

A dedução na Seção 2.1 mostra que, se a Eq. (1) tem solução, então ela tem que ser dada pela Eq. (3). Analisando um pouco mais a fundo essa dedução, podemos concluir, também, que a Eq. (1) tem que ter, de fato, solução. Como p é contínua para $\alpha < t < \beta$, μ está definida nesse intervalo e é uma função diferenciável não-nula. Multiplicando a Eq. (1) por $\mu(t)$, obtemos

$$[\mu(t)y]' = \mu(t)g(t). \qquad (5)$$

Como ambas as funções μ e g são contínuas, a função μg é integrável e a Eq. (3) segue da Eq. (5). Além disso, a integral de μg é diferenciável, de modo que y dado pela Eq. (3) existe e é diferenciável no intervalo $\alpha < t < \beta$. Substituindo a fórmula para y dada pela Eq. (3) na Eq. (1) ou na Eq. (5), pode-se verificar facilmente que y satisfaz a equação diferencial no intervalo $\alpha < t < \beta$. Finalmente, a condição inicial (2) determina a constante c de maneira única, de modo que existe apenas uma solução do problema de valor inicial, completando, então, a demonstração.

A Eq. (4) determina o fator integrante $\mu(t)$ a menos de um fator multiplicativo que depende do limite inferior de integração. Se escolhermos esse limite inferior como sendo t_0, então

$$\mu(t) = \exp \int_{t_0}^{t} p(s)\, ds, \tag{6}$$

e segue que $\mu(t_0) = 1$. Usando o fator integrante dado pela Eq. (6) e escolhendo o limite inferior de integração na Eq. (3) também como t_0, obtemos a solução geral da Eq. (1) na forma

$$y = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int_{t_0}^{t} \mu(s)g(s)ds + c\right] \tag{7}$$

Para satisfazer a condição inicial (2), precisamos escolher $c = y_0$. Assim, a solução do problema de valor inicial (1), (2) é

$$y = \frac{1}{\mu(t)}\left[\int_{t_0}^{t} \mu(s)g(s)ds + y_0\right], \tag{8}$$

onde $\mu(t)$ é dado pela Eq. (6).

Considerando, agora, equações diferenciais não-lineares, precisamos substituir o Teorema 2.4.1 por um teorema mais geral, tal como o seguinte:

Teorema 2.4.2

Suponha que as funções f e $\partial f/\partial y$ são contínuas em um retângulo $\alpha < t < \beta$, $\gamma < y < \delta$ contendo o ponto (t_0, y_0). Então, em algum intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$ contido em $\alpha < t < \beta$, existe uma única solução $y = \phi(t)$ do problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0. \tag{9}$$

Observe que as hipóteses no Teorema 2.4.2 se reduzem às do Teorema 2.4.1 se a equação diferencial for linear. De fato, nesse caso $f(t, y) = -p(t)y + g(t)$ e $\partial f(t, y)/\partial y = -p(t)$, de modo que a continuidade de f e de $\partial f/\partial y$ é equivalente à continuidade de p e g. A demonstração do Teorema 2.4.1 foi relativamente simples porque pôde se basear na fórmula (3) que dá a solução para uma equação linear arbitrária. Não existe fórmula correspondente para a solução da equação diferencial (9), de modo que a demonstração do Teorema 2.4.2 é muito mais difícil. Ela é discutida, até certo ponto, na Seção 2.8, e em maior profundidade em livros mais avançados de equações diferenciais.

Observamos que as condições enunciadas no Teorema 2.4.2 são suficientes, mas não necessárias, para garantir a existência de uma única solução do problema de valor inicial (9) em algum intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$. Isto é, a conclusão permanece válida sob hipóteses ligeiramente mais fracas sobre a função f. De fato, a existência de uma solução (mas não sua unicidade) pode ser estabelecida baseando-se apenas na continuidade de f.

Uma conseqüência geométrica importante da unicidade nos Teoremas 2.4.1 e 2.4.2 é que os gráficos de duas soluções não podem se intersectar. Caso contrário, existiriam duas soluções satisfazendo a condição inicial correspondente ao ponto de interseção, contradizendo o Teorema 2.4.1 ou o 2.4.2.

Vamos considerar alguns exemplos.

Exemplo 1

Use o Teorema 2.4.1 para encontrar um intervalo no qual o problema de valor inicial

$$ty' + 2y = 4t^2, \tag{10}$$
$$y(1) = 2 \tag{11}$$

tem uma única solução.

Escrevendo a Eq. (10) na forma padrão (1), temos

$$y' + (2/t)y = 4t,$$

de modo que $p(t) = 2/t$ e $g(t) = 4t$. Logo, para essa equação, g é contínua para todo t, enquanto p é contínua apenas para $t < 0$ ou $t > 0$. O intervalo $t > 0$ contém a condição inicial, portanto, o Teorema 2.4.1 garante que o problema (10), (11) tem uma única solução no intervalo $0 < t < \infty$. No Exemplo 3 da Seção 2.1 vimos que a solução desse problema de valor inicial é

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}, \qquad t > 0. \tag{12}$$

Suponha, agora, que a condição inicial é modificada para $y(-1) = 2$. Então, o Teorema 2.4.1 garante a existência de uma única solução para $t < 0$. Como você pode verificar facilmente, a solução é dada, novamente, pela Eq. (12) mas, agora, no intervalo $-\infty < t < 0$.

Exemplo 2

Aplique o Teorema 2.4.2 ao problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}, \qquad y(0) = -1. \tag{13}$$

Note que o Teorema 2.4.1 não se aplica a esse problema, já que a equação diferencial não é linear. Para aplicar o Teorema 2.4.2, observe que

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)^2}.$$

Assim, cada uma dessas funções é contínua em toda parte exceto na reta $y = 1$. Em conseqüência, pode-se desenhar um retângulo contendo o ponto inicial $(0, -1)$ no qual ambas f e $\partial f/\partial y$ são contínuas. Portanto, o Teorema 2.4.2 garante que o

problema de valor inicial tem uma única solução em algum intervalo em torno de $x = 0$. No entanto, mesmo que o retângulo possa ser esticado infinitamente nas direções dos x positivo e negativo, isso não significa, necessariamente, que a solução existe para todo x. De fato, o problema de valor inicial (13) foi resolvido no Exemplo 2 da Seção 2.2 e a solução existe apenas para $x > -2$.

Suponha, agora, que mudamos a condição inicial para $y(0) = 1$. O ponto inicial pertence, agora, à reta $y = 1$, de modo que não é possível desenhar nenhum retângulo contendo esse ponto dentro do qual f e $\partial f/\partial y$ são contínuas. Em conseqüência, o Teorema 2.4.2 não diz nada sobre soluções possíveis desse problema modificado. No entanto, se separarmos as variáveis e integrarmos, como na Seção 2.2, encontramos que

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c.$$

Além disso, se $x = 0$ e $y = 1$, então $c = -1$. Finalmente, resolvendo para y, obtemos

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x}. \tag{14}$$

A Eq. (14) fornece duas funções que satisfazem a equação diferencial dada para $x > 0$ e que também satisfazem a condição inicial $y(0) = 1$.

Exemplo 3

Considere o problema de valor inicial

$$y' = y^{1/3}, \qquad y(0) = 0 \tag{15}$$

para $t \geq 0$. Aplique o Teorema 2.4.2 a esse problema de valor inicial e depois resolva o problema.

A função $f(t, y) = y^{1/3}$ é contínua em toda a parte mas $\partial f/\partial y = y^{-2/3}/3$ não existe quando $y = 0$, logo não é contínua aí. Assim, o Teorema 2.4.2 não se aplica a esse problema e não podemos concluir nada dele. No entanto, pela observação após o Teorema 2.4.2, a continuidade de f garante a existência de soluções, embora não garanta a unicidade.

Para compreender a situação mais claramente, precisamos resolver, de fato, o problema, o que é fácil de fazer, já que a equação é separável. Temos, então,

$$y^{-1/3}dy = dt,$$

logo

$$\tfrac{3}{2}y^{2/3} = t + c$$

e

$$y = \left[\tfrac{2}{3}(t + c)\right]^{3/2}.$$

A condição inicial é satisfeita se $c = 0$, de modo que

$$y = \phi_1(t) = \left(\tfrac{2}{3}t\right)^{3/2}, \qquad t \geq 0 \tag{16}$$

satisfaz ambas as Eqs. (15). Por outro lado, a função

$$y = \phi_2(t) = -\left(\tfrac{2}{3}t\right)^{3/2}, \qquad t \geq 0 \tag{17}$$

é, também, uma solução do problema de valor inicial. Além disso, a função

$$y = \psi(t) = 0, \qquad t \geq 0 \tag{18}$$

é ainda outra solução. De fato, não é difícil mostrar que, para qualquer t_0 positivo, as funções

$$y = \chi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq t < t_0, \\ \pm\left[\tfrac{2}{3}(t - t_0)\right]^{3/2}, & \text{se } t \geq t_0 \end{cases} \tag{19}$$

são contínuas, diferenciáveis (em particular em $t = t_0$) e soluções do problema de valor inicial (15). Portanto, esse problema tem uma família infinita de soluções; veja a Fig. 2.4.1, onde aparecem algumas dessas soluções.

Como já observamos, a não unicidade das soluções do problema (15) não contradiz o teorema de existência e unicidade, já que o teorema não é aplicável se o ponto inicial pertence ao eixo dos t. Se (t_0, y_0) é qualquer ponto que não pertence ao eixo dos t, no entanto, então o teorema garante que existe uma única solução da equação diferencial $y' = y^{1/3}$ cujo gráfico contém o ponto (t_0, y_0).

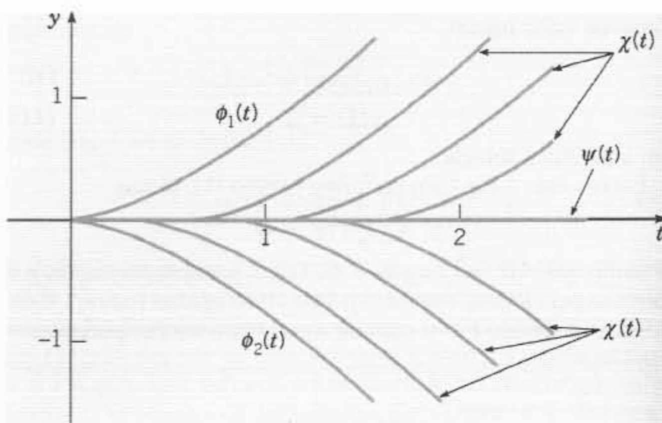


FIG. 2.4.1 Diversas soluções do problema de valor inicial $y' = y^{1/3}$, $y(0) = 0$.

Intervalo de Definição. De acordo com o Teorema 2.4.1, a solução da equação linear (1),

$$y' + p(t)y = g(t),$$

sujeita à condição inicial $y(t_0) = y_0$, existe em qualquer intervalo em torno de $t = t_0$ no qual as funções p e g são contínuas. Assim, assíntotas verticais ou outras descontinuidades na solução só podem ocorrer em pontos de descontinuidade de p ou de g. Por exemplo, as soluções no Exemplo 1 (com uma exceção) são assintóticas ao eixo dos y, correspondendo à descontinuidade em $t = 0$ do coeficiente $p(t) = 2/t$, mas nenhuma das soluções deixa de existir ou de ser diferenciável em outro ponto. A solução ex-

cepcional mostra que as soluções podem permanecer contínuas, algumas vezes, mesmo nos pontos de descontinuidade dos coeficientes.

Por outro lado, para um problema de valor inicial não-linear satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.4.2, o intervalo no qual a solução existe pode ser difícil de determinar. A solução $y = \phi(t)$ existe, com certeza, enquanto o ponto $[t, \phi(t)]$ permanece em uma região na qual as hipóteses do Teorema 2.4.2 são satisfeitas. Isso é o que determina o valor de h no teorema. No entanto, como $\phi(t)$ não é conhecida em geral, pode ser impossível localizar o ponto $[t, \phi(t)]$ em relação a essa região. De qualquer jeito, o intervalo no qual existe uma solução pode não ter uma relação simples com a função f na equação diferencial $y' = f(t, y)$. Isso é ilustrado pelo exemplo a seguir.

Exemplo 4

Resolva o problema de valor inicial

$$y' = y^2, \qquad y(0) = 1, \tag{20}$$

e determine o intervalo no qual a solução existe.

O Teorema 2.4.2 garante que esse problema tem solução única, já que $f(t, y) = y^2$ e $\partial f/\partial y = 2y$ são contínuas em toda a parte. Para encontrar a solução, separamos as variáveis e integramos, obtendo

$$y^{-2}\, dy = dt \tag{21}$$

e

$$-y^{-1} = t + c.$$

Então, resolvendo para y, temos

$$y = -\frac{1}{t + c}. \tag{22}$$

Para satisfazer a condição inicial, precisamos escolher $c = -1$, logo

$$y = \frac{1}{1 - t} \tag{23}$$

é a solução do problema de valor inicial dado. É claro que a solução torna-se ilimitada quando $t \to 1$; portanto, a solução existe apenas no intervalo $-\infty < t < 1$. Não existe, no entanto, nenhuma indicação na equação diferencial propriamente dita de que o ponto $t = 1$ é especial de algum modo. Além disso, se a condição inicial for substituída por

$$y(0) = y_0, \tag{24}$$

então a constante c na Eq. (22) tem que ser escolhida como $c = -1/y_0$, e segue que

$$y = \frac{y_0}{1 - y_0 t} \tag{25}$$

é a solução do problema de valor inicial com condição inicial (24). Note que a solução (25) torna-se ilimitada quando $t \to 1/y_0$, de modo que o intervalo de existência dessa solução é $-\infty < t < 1/y_0$ se $y_0 > 0$ e é $1/y_0 < t < \infty$ se $y_0 < 0$. Esse exemplo ilustra uma outra característica de equações não-lineares: as singularidades da solução podem depender, de modo essencial, tanto das condições iniciais quanto da equação diferencial.

Solução Geral. Uma outra maneira na qual as equações lineares e não-lineares diferem é em relação ao conceito de solução geral. Para uma equação linear de primeira ordem, pode-se obter uma solução contendo uma constante arbitrária, a partir da qual obtêm-se todas as soluções possíveis atribuindo-se valores a essa constante. Para equações não-lineares, isso pode não acontecer; mesmo que se encontre uma solução contendo uma constante arbitrária, podem existir outras soluções que não podem ser obtidas atribuindo-se valores a essa constante. Por exemplo, para a equação diferencial $y' = y^2$ no Exemplo 4, a fórmula na Eq. (22) contém uma constante arbitrária, mas não inclui todas as soluções da equação diferencial. Para ver isso, note que a função $y = 0$ para todo t é certamente uma solução da equação diferencial, mas não pode ser obtida da Eq. (22) atribuindo-se um valor para c. Poderíamos antecipar que algo desse tipo fosse acontecer nesse exemplo, já que, ao colocar a equação na forma (21), precisamos supor que y não é zero. No entanto, a existência de soluções "adicionais" não é raro para equações não-lineares; um exemplo menos óbvio é dado no Problema 22. Portanto, usaremos a expressão "solução geral" apenas ao discutir equações lineares.

Soluções Implícitas. Lembre-se novamente de que, para um problema de valor inicial para uma equação linear de primeira ordem, a Eq. (8) fornece uma fórmula explícita para a solução $y = \phi(t)$. Desde que as primitivas necessárias sejam encontradas, o valor da solução em qualquer ponto pode ser determinado substituindo-se, simplesmente, o valor apropriado de t na equação. A situação para equações não-lineares é muito menos satisfatória. Em geral, o melhor que podemos esperar é encontrar uma equação

$$F(t, y) = 0 \tag{26}$$

envolvendo t e y que é satisfeita pela solução $y = \phi(t)$. E isso pode ser feito apenas para equações diferenciais de determinados tipos específicos, das quais as equações separáveis são as mais importantes. A Eq. (26) é dita uma integral, ou a primeira integral, da equação diferencial e (como já observamos) seu gráfico é uma curva integral, ou, talvez, uma família de curvas integrais. Supondo que a Eq. (26) possa ser encontrada, ela define a solução implicitamente, isto é, para cada valor de t, precisamos resolver a Eq. (26) para encontrar o valor correspondente de y. Se a Eq. (26) for suficientemente simples, pode ser possível resolver para y por métodos analíticos obtendo-se, assim, uma fórmula explícita para a solução. No entanto, na maioria das vezes, isso não será possível e você terá que recorrer a cálculos numéricos para determinar o valor de y para um valor dado de t. Uma vez calculados diversos pares de valores de t e de y, muitas vezes é útil colocá-los em um gráfico e traçar uma curva integral que os contém. Você deveria fazer isso em um computador, se possível.

Os Exemplos 2, 3 e 4 são problemas não-lineares nos quais é fácil obter uma fórmula explícita para a solução $y = \phi(t)$. Por

outro lado, os Exemplos 1 e 3 na Seção 2.2 são casos nos quais é melhor deixar a solução em forma implícita e usar meios numéricos para calculá-la para valores particulares da variável independente. Essa última situação é mais típica; a menos que a relação implícita seja quadrática em y, ou tenha outra forma particularmente simples, as chances são de que ela não poderá ser resolvida exatamente por métodos analíticos. De fato, na maior parte dos casos, é impossível encontrar uma fórmula implícita para a solução de uma equação não-linear de primeira ordem.

Construção Gráfica ou Numérica de Curvas Integrais. Devido à dificuldade em se obter soluções analíticas exatas de equações diferenciais não-lineares, métodos que geram soluções aproximadas ou outras informações qualitativas sobre as soluções têm uma importância correspondentemente maior. Já vimos, na Seção 1.1, como construir campos de direções para uma equação diferencial. O campo de direções mostra, muitas vezes, a forma qualitativa das soluções e pode ajudar, também, a identificar regiões no plano ty onde as soluções apresentam características interessantes que merecem uma investigação analítica ou numérica mais profunda. A Seção 2.5 discute mais métodos gráficos para equações de primeira ordem. É dada, na Seção 2.7, uma introdução a métodos numéricos para equações de primeira ordem, e uma discussão sistemática de métodos numéricos aparece no Cap. 8. No entanto, não é necessário estudar os algoritmos numéricos propriamente ditos para usar efetivamente um dos muitos pacotes de programas que geram e fazem os gráficos de aproximações de soluções de problemas de valor inicial.

Resumo. A equação linear $y' + p(t)y = g(t)$ tem diversas propriedades boas que podem ser resumidas nas seguintes afirmações:

1. Supondo que os coeficientes são contínuos, existe uma solução geral contendo uma constante arbitrária que inclui todas as soluções da equação diferencial. Uma solução particular que satisfaz uma condição inicial dada pode ser obtida escolhendo-se o valor apropriado da constante arbitrária.
2. Existe uma fórmula para a solução, a saber, Eq. (7) ou Eq. (8). Além disso, embora envolva duas integrações, a fórmula para a solução $y = \phi(t)$ é explícita, em vez de ser uma equação que define ϕ implicitamente.
3. Os possíveis pontos de descontinuidade, ou singularidades, da solução podem ser identificados (sem resolver o problema) encontrando-se, simplesmente, os pontos de descontinuidade dos coeficientes. Dessa forma, se os coeficientes forem contínuos para todo t, então a solução existe e é contínua para todo t.

Nenhuma dessas afirmações é verdadeira, em geral, para equações não-lineares. Embora uma equação não-linear possa ter uma solução envolvendo uma constante arbitrária, podem existir outros tipos de solução. Não existe fórmula geral para soluções de equações não-lineares. Se você for capaz de integrar uma equação não-linear, provavelmente obterá uma equação que define soluções implicitamente, ao invés de explicitamente. Finalmente, as singularidades das soluções de equações não-lineares podem ser encontradas, em geral, só quando se resolve a equação e se examina a solução. É provável que as singularidades dependam tanto da condição inicial quanto da equação diferencial.

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, determine (sem resolver o problema) um intervalo no qual a solução do problema de valor inicial dado certamente existe.

1. $(t-3)y' + (\ln t)y = 2t, \quad y(1) = 2$
2. $t(t-4)y' + y = 0, \quad y(2) = 1$
3. $y' + (\operatorname{tg} t)y = \operatorname{sen} t, \quad y(\pi) = 0$
4. $(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2, \quad y(-3) = 1$
5. $(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2, \quad y(1) = -3$
6. $(\ln t)y' + y = \operatorname{cotg} t, \quad y(2) = 3$

Nos problemas de 7 a 12, determine a região do plano ty onde as hipóteses do Teorema 2.4.2 são satisfeitas.

7. $y' = \dfrac{t-y}{2t+5y}$
8. $y' = (1-t^2-y^2)^{1/2}$
9. $y' = \dfrac{\ln|ty|}{1-t^2+y^2}$
10. $y' = (t^2+y^2)^{3/2}$
11. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1+t^2}{3y-y^2}$
12. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{(\operatorname{cotg} t)y}{1+y}$

Nos problemas de 13 a 16, resolva o problema de valor inicial dado e determine de que modo o intervalo no qual a solução existe depende do valor inicial y_0.

13. $y' = -4t/y, \quad y(0) = y_0$
14. $y' = 2ty^2, \quad y(0) = y_0$
15. $y' + y^3 = 0, \quad y(0) = y_0$
16. $y' = t^2/y(1+t^3), \quad y(0) = y_0$

Nos problemas de 17 a 20, desenhe um campo de direções e faça um gráfico (ou esboço do gráfico) de diversas soluções da equação diferencial. Descreva como as soluções parecem se comportar quando t cresce e como esse comportamento depende do valor inicial y_0 quando $t = 0$.

17. $y' = ty(3-y)$
18. $y' = y(3-ty)$
19. $y' = -y(3-ty)$
20. $y' = t-1-y^2$

21. Considere o problema de valor inicial $y' = y^{1/3}$, $y(0) = 0$ do Exemplo 3 no texto.
(a) Existe uma solução cujo gráfico contém o ponto (1, 1)? Se existir, encontre-a.
(b) Existe uma solução cujo gráfico contém o ponto (2, 1)? Se existir, encontre-a.
(c) Considere todas as soluções possíveis do problema de valor inicial dado. Determine o conjunto de valores que essas soluções assumem em $t = 2$.
22. (a) Verifique que ambas as funções $y_1(t) = 1 - t$ e $y_2(t) = -t^2/4$ são soluções do problema de valor inicial

$$y' = \frac{-t + (t^2+4y)^{1/2}}{2}, \qquad y(2) = -1.$$

Onde essas soluções são válidas?
(b) Explique por que a existência de duas soluções do problema dado não contradiz a parte de unicidade do Teorema 2.4.2.
(c) Mostre que $y = ct + c^2$, onde c é uma constante arbitrária, satisfaz a equação diferencial no item (a) para $t \geq -2c$. Se $c =$

-1, a condição inicial também é satisfeita e obtém-se a solução $y = y_1(t)$. Mostre que não existe escolha de c que forneça a segunda solução, $y = y_2(t)$.

23. (a) Mostre que $\phi(t) = e^{2t}$ é uma solução de $y' - 2y = 0$ e que $y = c\,\phi(t)$ também é solução dessa equação para qualquer valor da constante c.
(b) Mostre que $\phi(t) = 1/t$ é uma solução de $y' + y^2 = 0$ para $t > 0$, mas que $y = c\,\phi(t)$ não é solução dessa equação a menos que $c = 0$ ou $c = 1$. Note que a equação no item (b) é não-linear, enquanto a no item (a) é linear.
24. Mostre que, se $y = \phi(t)$ é uma solução de $y' + p(t)y = 0$, então $y = c\,\phi(t)$ também é solução para qualquer valor da constante c.
25. Seja $y = y_1(t)$ uma solução de

$$y' + p(t)y = 0, \qquad \text{(i)}$$

e seja $y = y_2(t)$ uma solução de

$$y' + p(t)y = g(t). \qquad \text{(ii)}$$

Mostre que $y = y_1(t) + y_2(t)$ também é solução da Eq. (ii).
26. (a) Mostre que a solução (7) da equação linear geral (1) pode ser escrita na forma

$$y = cy_1(t) + y_2(t), \qquad \text{(i)}$$

onde c é uma constante arbitrária. Identifique as funções y_1 e y_2.
(b) Mostre que y_1 é uma solução da equação diferencial

$$y' + p(t)y = 0, \qquad \text{(ii)}$$

correspondente a $g(t) = 0$.
(c) Mostre que y_2 é uma solução da equação linear completa (1). Veremos mais tarde (por exemplo, na Seção 3.6) que soluções de equações lineares de ordem maior têm propriedades semelhantes à Eq. (i).

Equações de Bernoulli. Algumas vezes é possível resolver uma equação não-linear fazendo-se uma mudança na variável dependente que a transforma em uma equação linear. A mais importante dessas equações tem a forma

$$y' + p(t)y = q(t)y^n,$$

e é chamada de equação de Bernoulli, em honra a Jakob Bernoulli. Os problemas de 27 a 31 tratam de equações desse tipo.

27. (a) Resolva a equação de Bernoulli quando $n = 0$; quando $n = 1$.
(b) Mostre que, se $n \neq 0, 1$, então a substituição $v = y^{1-n}$ reduz a equação de Bernoulli a uma equação linear. Esse método de solução foi encontrado por Leibniz em 1696.

Nos problemas de 28 a 31, a equação dada é uma equação de Bernoulli. Resolva-a, em cada caso, usando o método de substituição mencionado no Problema 27(b).

28. $t^2y' + 2ty - y^3 = 0, \qquad t > 0$
29. $y' = ry - ky^2$, $r > 0$ e $k > 0$. Essa equação é importante em dinâmica populacional e é discutida em detalhes na Seção 2.5.
30. $y' = \epsilon y - \sigma y^3$, $\epsilon > 0$ e $\sigma > 0$. Essa equação aparece no estudo da estabilidade de fluxos de fluidos.
31. $dy/dt = (\Gamma \cos t + T)y - y^3$, onde Γ e T são constantes. Essa equação também aparece no estudo da estabilidade de fluxos de fluidos.

Coeficientes Descontínuos. Muitas vezes aparecem equações diferenciais lineares com uma ou ambas as funções p e g contendo descontinuidades do tipo salto. Se t_0 é um ponto de descontinuidade, então é preciso resolver a equação separadamente para $t < t_0$ e $t > t_0$. Depois, as duas soluções podem ser combinadas de modo a y ser contínua em t_0; isso é feito através de uma escolha apropriada das constantes arbitrárias. Os dois problemas a seguir ilustram essa situação. Observe que, em cada caso, é impossível fazer com que y' também seja contínua em t_0.

32. Resolva o problema de valor inicial

$$y' + 2y = g(t), \qquad y(0) = 0,$$

onde

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

33. Resolva o problema de valor inicial

$$y' + p(t)y = 0, \qquad y(0) = 1,$$

onde

$$p(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t \le 1, \\ 1, & t > 1. \end{cases}$$

2.5 Equações Autônomas e Dinâmica Populacional

Uma classe importante de equações de primeira ordem consiste naquelas nas quais a variável independente não aparece explicitamente. Tais equações são ditas **autônomas** e têm a forma

$$dy/dt = f(y). \qquad (1)$$

Discutiremos essas equações no contexto de crescimento ou declínio populacional de uma espécie dada, um assunto importante em campos que vão da medicina à ecologia, passando pela economia global. Diversas outras aplicações são mencionadas nos problemas. Lembre-se de que já consideramos, nas Seções 1.1 e 1.2, o caso particular da Eq. (1) onde $f(y) = ay + b$.

A Eq. (1) é separável, de modo que podemos aplicar a discussão feita na Seção 2.2, mas nosso objetivo principal nesta seção é mostrar como usar métodos numéricos para obter informação qualitativa importante sobre a equação diferencial sem resolvê-la. Os conceitos de estabilidade e instabilidade de soluções de equações diferenciais têm importância fundamental nesse esforço. Essas idéias foram introduzidas informalmente no Cap. 1, mas sem a utilização dessa terminologia. Elas são discutidas um pouco mais aqui e serão examinadas em maior profundidade e em um contexto mais geral no Cap. 9.

Crescimento Exponencial. Seja $y = \phi(t)$ a população de uma espécie dada no instante t. A hipótese mais simples sobre a variação da população é que a taxa de variação de y é proporcional[12] ao valor atual de y, isto é

$$dy/dt = ry, \qquad (2)$$

onde a constante de proporcionalidade r é chamada **taxa de crescimento ou declínio**, dependendo se é positiva ou negativa. Vamos supor aqui que $r > 0$, de modo que a população está crescendo.

Resolvendo a Eq. (2) sujeita à condição inicial

$$y(0) = y_0, \qquad (3)$$

obtemos

$$y = y_0 e^{rt}. \qquad (4)$$

[12] Aparentemente, o economista britânico Thomas Malthus (1766-1834) foi o primeiro a observar que muitas populações biológicas crescem a uma taxa proporcional à população. Seu primeiro artigo sobre populações apareceu em 1798.

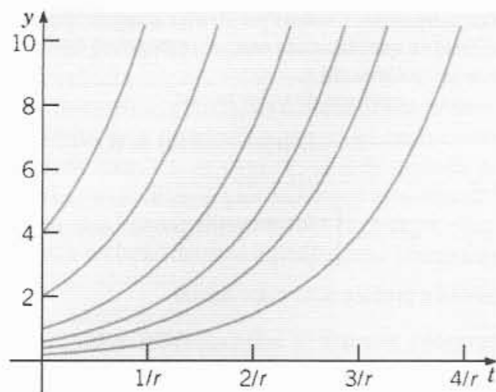


FIG. 2.5.1 Crescimento exponencial: y em função de t para $dy/dt = ry$.

Logo, o modelo matemático que consiste no problema de valor inicial (2), (3) com $r > 0$ prevê que a população crescerá exponencialmente sempre, como ilustrado na Fig. 2.5.1 para diversos valores de y_0. Sob condições ideais, observou-se que a Eq. (4) é razoavelmente precisa para muitas populações, pelo menos por períodos limitados de tempo. No entanto, é claro que tais condições ideais não podem perdurar indefinidamente; alguma hora as limitações sobre o espaço, o suprimento de comida ou outros recursos reduzirá a taxa de crescimento e acabará inibindo o crescimento exponencial.

Crescimento Logístico. Para levar em consideração o fato de que a taxa de crescimento depende, realmente, da população, vamos substituir a constante r na Eq. (2) por uma função $h(y)$, obtendo, assim, a equação modificada

$$dy/dt = h(y)y. \qquad (5)$$

Queremos, agora, escolher $h(y)$ de modo que $h(y) \approx r > 0$ quando y for pequeno, $h(y)$ decresça quando y crescer e $h(y) < 0$ quando y for suficientemente grande. A função mais simples que tem essas propriedades é $h(y) = r - ay$, onde a é, também, uma constante positiva. Usando essa função na Eq. (5), obtemos

$$dy/dt = (r - ay)y. \qquad (6)$$

A Eq. (6) é conhecida como a equação de Verhulst[13] ou **equação logística**. Muitas vezes, é conveniente escrever a equação logística na forma equivalente

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y, \qquad (7)$$

onde $K = r/a$. A constante r é chamada de **taxa de crescimento intrínseco**, isto é, a taxa de crescimento na ausência de qualquer fator limitador. A interpretação de K ficará clara em breve.

Investigaremos as soluções da Eq. (7) em algum detalhe mais adiante nesta seção. Antes disso, no entanto, vamos mostrar como você pode desenhar, facilmente, um esboço *qualitativamente correto* das soluções. Os mesmos métodos também podem ser aplicados à equação mais geral (1).

Vamos, primeiro, procurar soluções da Eq. (7) do tipo mais simples possível, isto é, funções constantes. Para tal solução, $dy/dt = 0$ para todo t, logo, qualquer solução constante da Eq. (7) tem que satisfazer a equação algébrica

$$r(1 - y/K)y = 0.$$

Portanto, as soluções constantes são $y = \phi_1(t) = 0$ e $y = \phi_2(t) = K$. Essas soluções são chamadas de **soluções de equilíbrio** da Eq. (7) porque correspondem ao caso em que não há variação no valor de y quando t cresce. De maneira análoga, qualquer solução de equilíbrio da Eq. (1), mais geral, pode ser encontrada encontrando-se as raízes de $f(y) = 0$. Os zeros de $f(y)$ também são chamados de **pontos críticos**.

Para visualizar outras soluções da Eq. (7) e esboçar seus gráficos rapidamente, começamos desenhando o gráfico de $f(y)$ em função de y. No caso da Eq. (7), $f(y) = r(1 - y/K)y$, de modo que o gráfico é a parábola ilustrada na Fig. 2.5.2. Os pontos de interseção com o eixo dos y são $(0, 0)$ e $(K, 0)$, correspondendo aos pontos críticos da Eq. (7), e o vértice da parábola está em $(K/2, rK/4)$. Observe que $dy/dt > 0$ para $0 < y < K$; portanto, y é uma função crescente de t quando y está nesse intervalo; isso é indicado pelas setas apontando para a direita próximas ao eixo dos y na Fig. 2.5.2. Analogamente, se $y > K$, então $dy/dt < 0$; portanto, y é decrescente, como indicado pela seta apontando para a esquerda na Fig. 2.5.2.

Nesse contexto, o eixo dos y é muitas vezes chamado de **reta de fase** e está reproduzida na Fig. 2.5.3*a* na sua orientação vertical, a mais comum. Os pontos em $y = 0$ e $y = K$ são os pontos críticos ou soluções de equilíbrio. As setas indicam mais uma vez que y é crescente sempre que $0 < y < K$ e decrescente sempre que $y > K$.

Além disso, da Fig. 2.5.2, note que, se y está próximo de 0 ou de K, então o coeficiente angular $f(y)$ fica próximo de zero, de modo que as curvas soluções são quase horizontais. Elas se tornam mais inclinadas quando o valor de y se afasta de 0 ou de K.

Para esboçar os gráficos das soluções da Eq. (7) no plano ty, começamos com as soluções de equilíbrio $y = 0$ e $y = K$; depois desenhamos outras curvas crescentes quando $0 < y < K$, decrescentes quando $y > K$ e que se aproximam de uma curva horizontal quando y se aproxima de um dos valores 0 ou K. Logo os gráficos das soluções da Eq. (7) têm que ter a forma geral ilustrada na Fig. 2.5.3*b*, independente dos valores de r e de K.

A Fig. 2.5.3*b* pode parecer mostrar que outras soluções intersectam a solução de equilíbrio $y = K$, mas isso é possível? Não; a unicidade no Teorema 2.4.2, o teorema fundamental de existência e unicidade, afirma que apenas uma solução pode conter um ponto dado no plano ty. Assim, embora outras soluções possam ser assintóticas à solução de equilíbrio quando $t \to \infty$, elas não podem intersectá-la em um instante finito.

Para continuar nossa investigação, podemos determinar a concavidade das curvas soluções e a localização dos pontos de inflexão encontrando d^2y/dt^2. Da equação diferencial (1) obtemos (pela regra da cadeia)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}f(y) = f'(y)\frac{dy}{dt} = f'(y)f(y). \qquad (8)$$

O gráfico de y em função de t é convexo[14] quando $y'' > 0$, isto é, quando f e f' têm o mesmo sinal. Analogamente, o gráfico é côn-

[13]P. F. Verhulst (1804-1849) foi um matemático belga que introduziu a Eq. (6) como um modelo para o crescimento populacional humano em 1838. Ele se referiu a esse crescimento como crescimento logístico; por isso, a Eq. (6) é chamada, muitas vezes, de equação logística. Ele não foi capaz de testar a precisão de seu modelo devido a dados inadequados de censo e não recebeu muita atenção até muitos anos depois. A concordância razoável do modelo com dados experimentais foi demonstrada por R. Pearl (1930) para populações de *Drosophila melanogaster* (mosca das frutas) e por G. F. Gause (1935) para populações de *Paramecium* e *Tribolium* (besouro da farinha).

[14]Isto é, tem a concavidade voltada para cima. (*N.T.*)

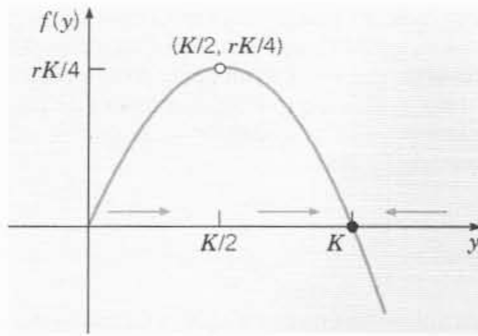


FIG. 2.5.2 Gráfico de $f(y)$ em função de y para $dy/dt = r(1 - y/K)y$.

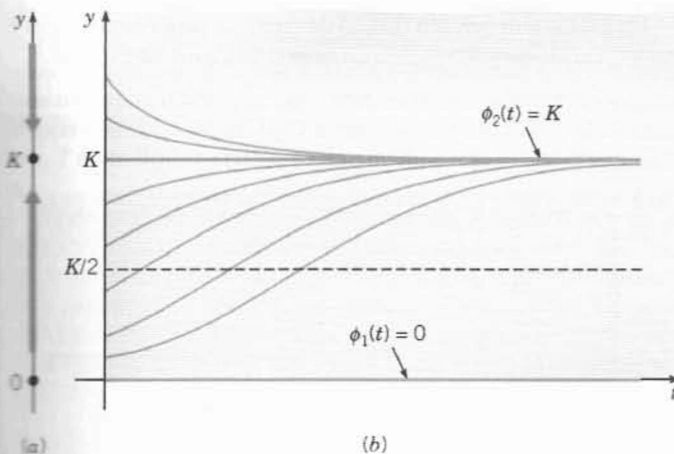


FIG. 2.5.3 Crescimento logístico: $dy/dt = r(1 - y/K)y$. (*a*) A reta de fase. (*b*) Gráficos de y em função de t.

cavo quando $y'' < 0$, o que ocorre quando f e f' têm sinais opostos. Os sinais de f e de f' podem ser identificados, facilmente, do gráfico de $f(y)$ em função de y. Podem ocorrer pontos de inflexão quando $f'(y) = 0$.

No caso da Eq. (7), as soluções são convexas para $0 < y < K/2$ onde f é positiva e crescente (veja a Fig. 2.5.2), de modo que ambas as funções f e f' são positivas. As soluções também são convexas para $y > K$, onde f é negativa e decrescente (f e f' são, ambas, negativas). Para $K/2 < y < K$, as soluções são côncavas, já que aqui f é positiva e decrescente, de modo que f é positiva e f' é negativa. Existe um ponto de inflexão sempre que o gráfico de y em função de t cruza a reta $y = K/2$. Os gráficos na Fig. 2.5.3b exibem essas propriedades.

Finalmente, note que K é uma cota superior que é aproximada, mas nunca atingida, para populações crescentes começando abaixo desse valor. Portanto, é natural se referir a K como sendo o **nível de saturação**, ou a **capacidade ambiental de sustentação**, para a espécie dada.

Uma comparação entre as Figs. 2.5.1 e 2.5.3b revela que as soluções da equação não-linear (7) são surpreendentemente diferentes das da equação linear (1), pelo menos para valores grandes de t. Independentemente do valor de K, isto é, não interessando quão pequeno seja a parcela não-linear da Eq. (7), as soluções da equação tendem a um valor finito quanto $t \to \infty$, enquanto as soluções da Eq. (1) crescem (exponencialmente) sem limite quando $t \to \infty$. Assim, mesmo uma minúscula parcela não-linear na equação diferencial tem um efeito decisivo na solução para valores grandes de t.

É suficiente, em muitas situações, ter informação qualitativa sobre a solução $y = \phi(t)$ da Eq. (7) ilustrada na Fig. 2.5.3b. Essa informação foi inteiramente obtida a partir do gráfico de $f(y)$ em função de y e sem resolver a equação diferencial (7). No entanto, se quisermos ter uma descrição mais detalhada sobre o crescimento logístico — por exemplo, se quisermos saber o valor da população em algum instante particular — então precisamos resolver a Eq. (7) sujeita à condição inicial (3). Se $y \neq 0$ e $y \neq K$, podemos escrever a Eq. (7) na forma

$$\frac{dy}{(1 - y/K)y} = r\,dt.$$

Usando expansão em frações parciais na expressão à esquerda do sinal de igualdade, temos

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1/K}{1 - y/K}\right) dy = r\,dt.$$

Integrando, obtemos

$$\ln|y| - \ln\left|1 - \frac{y}{K}\right| = rt + c, \tag{9}$$

onde c é uma constante arbitrária de integração a ser determinada pela condição inicial $y(0) = y_0$. Já observamos que, se $0 < y_0 < K$, então y permanece nesse intervalo para todo o tempo. Assim, nesse caso, podemos remover o módulo na Eq. (9) e, aplicando a exponencial nas expressões dos dois lados do sinal de igualdade, encontramos que

$$\frac{y}{1 - (y/K)} = Ce^{rt}, \tag{10}$$

onde $C = e^c$. Para satisfazer a condição inicial $y(0) = y_0$, precisamos escolher $C = y_0/[1 - (y_0/K)]$. Substituindo esse valor de C na Eq. (10) e resolvendo para y, obtemos

$$y = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}. \tag{11}$$

Deduzimos a solução (11) sob a hipótese de que $0 < y_0 < K$. Se $y_0 > K$, então os detalhes de tratamento da Eq. (9) são apenas ligeiramente diferentes e deixamos a seu cargo mostrar que a Eq. (11) também é válida nesse caso. Finalmente, note que a Eq. (11) também contém as soluções de equilíbrio $y = \phi_1(t) = 0$ e $y = \phi_2(t) = K$, correspondendo às condições iniciais $y_0 = 0$ e $y_0 = K$, respectivamente.

Todas as conclusões qualitativas a que chegamos anteriormente por raciocínio geométrico podem ser confirmadas examinando-se a solução (11). Em particular, se $y_0 = 0$, então a Eq. (11) diz que $y(t) = 0$ para todo t. Se $y_0 > 0$ e se fizermos $t \to \infty$ na Eq. (11), obtemos

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = y_0 K / y_0 = K.$$

Dessa forma, para cada $y_0 > 0$, a solução tende à solução de equilíbrio $y = \phi_2(t) = K$ assintoticamente quando $t \to \infty$. Portanto, dizemos que a solução constante $\phi_2(t) = K$ é uma **solução assintoticamente estável** da Eq. (7), ou que o ponto $y = K$ é um ponto de equilíbrio, ou crítico, assintoticamente estável. Após um

longo tempo, a população fica próxima ao nível de saturação K independente do tamanho inicial da população, desde que seja positivo. Outras soluções tendem à solução de equilíbrio mais rapidamente quando r aumenta.

Por outro lado, a situação para a solução de equilíbrio $y = \phi_1(t) = 0$ é bem diferente. Mesmo soluções que começam bem próximas de zero crescem quando t cresce e, como vimos, tendem a K quando $t \to \infty$. Dizemos que $\phi_1(t) = 0$ é uma **solução de equilíbrio instável** ou que $y = 0$ é um ponto de equilíbrio, ou crítico, instável. Isso significa que a única maneira de garantir que a solução permaneça nula é certificar-se de que seu valor inicial é *exatamente* igual a zero.

Exemplo 1

O modelo logístico foi aplicado à população de linguados gigantes em determinadas áreas do Oceano Pacífico.[15] Suponha que y, medido em quilogramas, seja a massa total, ou biomassa, da população de linguados gigantes em um instante t. Os parâmetros na equação logística são estimados como tendo os valores $r = 0,71$/ano e $K = 80,5 \times 10^6$ kg. Se a biomassa inicial é $y_0 = 0,25K$, encontre a biomassa 2 anos depois. Encontre, também, o instante τ para o qual $y(\tau) = 0,75K$.

É conveniente fazer uma mudança de escala na solução (11) em função da capacidade de sustentação K; escrevemos, então, a Eq. (11) na forma

$$\frac{y}{K} = \frac{y_0/K}{(y_0/K) + [1 - (y_0/K)]e^{-rt}}. \tag{12}$$

Usando os dados do problema, encontramos que

$$\frac{y(2)}{K} = \frac{0,25}{0,25 + 0,75e^{-1,42}} \cong 0,5797.$$

Em conseqüência, $y(2) \approx 46,7 \times 10^6$ kg.

Para encontrar τ, podemos resolver, primeiro, a Eq. (12) para t. Obtemos

$$e^{-rt} = \frac{(y_0/K)[1 - (y/K)]}{(y/K)[1 - (y_0/K)]};$$

logo,

$$t = -\frac{1}{r} \ln \frac{(y_0/K)[1 - (y/K)]}{(y/K)[1 - (y_0/K)]}. \tag{13}$$

Usando os valores dados de r e y_0/K, e fazendo $y/K = 0,75$, encontramos

$$\tau = -\frac{1}{0,71} \ln \frac{(0,25)(0,25)}{(0,75)(0,75)} = \frac{1}{0,71} \ln 9 \cong 3,095 \text{ anos}$$

Os gráficos de y/K em função de t para os parâmetros dados e para diversas condições iniciais estão ilustrados na Fig. 2.5.4.

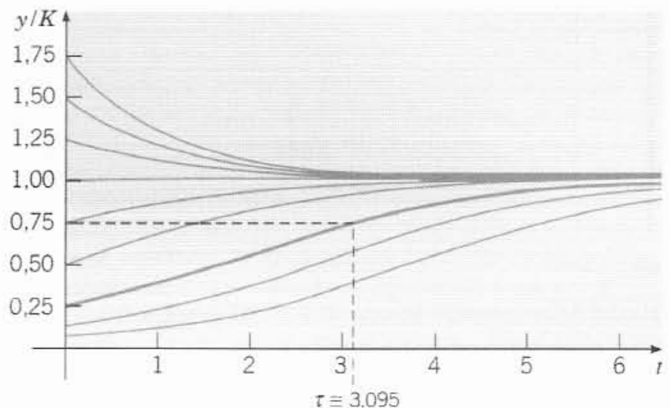


FIG. 2.5.4 Gráfico de y/K em função de t para o modelo de população de linguados gigantes no Oceano Pacífico.

Um Limiar Crítico. Vamos considerar, agora, a equação

$$\frac{dy}{dt} = -r\left(1 - \frac{y}{T}\right)y, \tag{14}$$

onde r e T são constantes positivas dadas. Observe que (exceto pela substituição do parâmetro K por T) essa equação difere da equação logística (7) apenas pela presença do sinal de menos na expressão à direita do sinal de igualdade. No entanto, como veremos, as soluções da Eq. (14) se comportam de maneira muito diferente das da Eq. (7).

Para a Eq. (14), o gráfico de $f(y)$ em função de y é a parábola ilustrada na Fig. 2.5.5. Os pontos de interseção com o eixo dos y são os pontos críticos $y = 0$ e $y = T$, correspondendo às soluções de equilíbrio $\phi_1(t) = 0$ e $\phi_2(t) = T$. Se $0 < y < T$, então $dy/dt < 0$, e y decresce quando t cresce. Por outro lado, se $y > T$, então $dy/dt > 0$ e y cresce quando t cresce. Assim, $\phi_1(t) = 0$ é uma solução de equilíbrio assintoticamente estável e $\phi_2(t) = T$ é uma instável. Além disso, $f'(y)$ é negativa para $0 < y < T/2$ e positiva para $T/2 < y < T$, de modo que o gráfico de y em função de t é convexo e côncavo, respectivamente, nesses intervalos. Como $f'(y)$ é positiva para $y > T$, o gráfico de y em função de t também é convexo aí.

A Fig. 2.5.6*a* mostra a reta de fase (o eixo dos y) para a Eq. (14). Os pontos em $y = 0$ e $y = T$ são pontos críticos, ou soluções de equilíbrio, e as setas indicam se as soluções são crescentes ou decrescentes.

As curvas solução da Eq. (14) podem ser esboçadas rapidamente. Primeiro desenhe as soluções de equilíbrio $y = 0$ e $y = T$. Depois esboce curvas na faixa $0 < y < T$ que decrescem quando t cresce e que mudam de concavidade quando cruzam a reta $y = T/2$. A seguir desenhe algumas curvas acima de $y = T$ que crescem cada vez, mais rapidamente quando t e y aumentam. Certifique-se de que todas as curvas se aproximam da horizontal quan-

[15] Uma boa fonte de informação sobre questões de dinâmica populacional e economia que tornam eficiente a utilização de reservas renováveis, com ênfase particular na pesca, é o livro de Clark listado nas referências ao final deste capítulo. Os valores dos parâmetros usados aqui são dados na página 53 desse livro e foram obtidos de um estudo feito por M. S. Mohring.

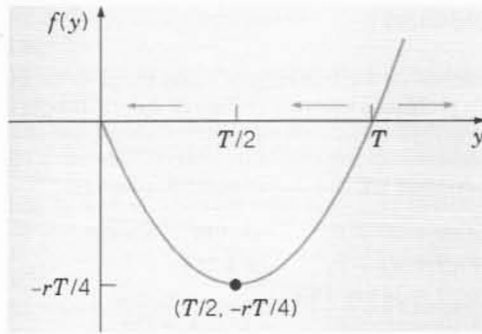


FIG. 2.5.5 Gráfico de $f(y)$ em função de y para $dy/dt = -r(1 - y/T)y$.

do t se aproxima de 0 ou de T. O resultado é a Fig. 2.5.6b, que é um esboço qualitativamente preciso das soluções da Eq. (14) para quaisquer valores de r e de T. É claro dessa figura que, à medida que o tempo cresce, y tende a zero ou cresce sem limite, dependendo se o valor inicial y_0 é menor ou maior do que T. Dessa forma, T é um **limiar crítico** abaixo do qual não existe crescimento.

Podemos confirmar as conclusões a que chegamos através de raciocínio geométrico resolvendo a equação diferencial (14). Isso pode ser feito separando as variáveis e integrando, como fizemos para a Eq. (7). No entanto, se notarmos que a Eq. (14) pode ser obtida da (7) substituindo-se K por T e r por $-r$, então podemos fazer essas mesmas substituições na Eq. (11) obtendo, assim,

$$y = \frac{y_0 T}{y_0 + (T - y_0)e^{rt}}, \tag{15}$$

que é a solução da Eq. (14) sujeita à condição inicial $y(0) = y_0$.

Se $0 < y_0 < T$, então segue da Eq. (15) que $y \to 0$ quando $t \to \infty$. Isso está de acordo com nossa análise geométrica qualitativa. Se $y_0 > T$, então o denominador na expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (15) é zero para um determinado valor finito de t. Vamos denotar esse valor por t^* e calculá-lo de

$$y_0 - (y_0 - T)e^{rt^*} = 0,$$

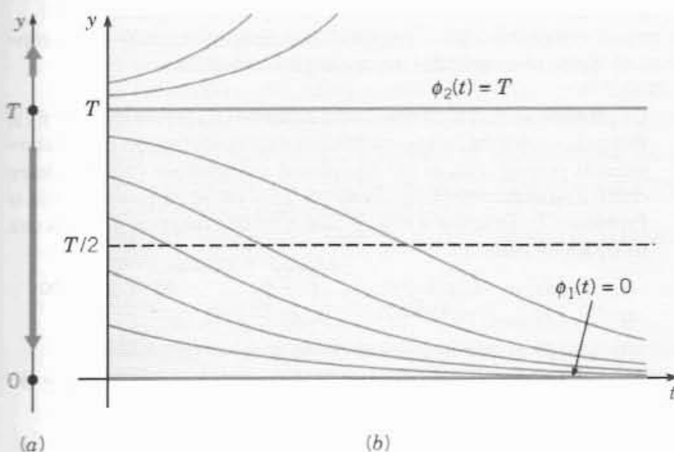


FIG. 2.5.6 Crescimento com limiar: $dy/dt = -r(1 - y/T)y$. (a) A reta de fase. (b) Gráfico de y em função de t.

o que nos dá

$$t^* = \frac{1}{r} \ln \frac{y_0}{y_0 - T}. \tag{16}$$

Assim, se a população inicial y_0 está acima do limiar T, o modelo de limiar prevê que o gráfico de y em função de t tem uma assíntota vertical em $t = t^*$; em outras palavras, a população torna-se ilimitada em um tempo finito, cujo valor depende de y_0, T e r. A existência e localização dessa assíntota não apareceu na análise geométrica, logo, nesse caso, a solução explícita forneceu informação adicional importante do ponto de vista qualitativo, além do quantitativo.

As populações de algumas espécies exibem o fenômeno de limiar. Se está presente uma quantidade muito pequena, a espécie não pode se propagar com sucesso e a população torna-se extinta. No entanto, se for possível juntar uma população maior do que o limiar crítico, então ocorre um crescimento ainda maior. Como é claro que uma população não pode se tornar ilimitada, a Eq. (14) tem que ser modificada, finalmente, para se levar isso em consideração.

Limiares críticos também ocorrem em outras situações. Por exemplo, em mecânica dos fluidos, equações da forma (7) ou (14) modelam, muitas vezes, a evolução de pequenas perturbações y em um fluxo *laminar* (ou suave). Por exemplo, se a Eq. (14) for válida e se $y < T$, então a perturbação é amortecida e o fluxo laminar persiste. No entanto, se $y > T$, a perturbação cresce e o fluxo laminar torna-se turbulento. Nesse caso, é costume se referir a T como a *amplitude crítica*. Experimentadores falam sobre manter o nível de perturbação suficientemente baixo de modo que possam estudar o fluxo laminar sobre um aerofólio, por exemplo.

Crescimento Logístico com um Limiar. Como mencionamos na última subseção, o modelo de limiar (14) precisa ser modificado de modo que não ocorra o crescimento ilimitado quando y está acima do limiar T. A maneira mais simples de fazer isso é introduzir um outro fator que tem o efeito de tornar dy/dt negativo quando y for grande. Assim, consideramos

$$\frac{dy}{dt} = -r\left(1 - \frac{y}{T}\right)\left(1 - \frac{y}{K}\right)y, \tag{17}$$

onde $r > 0$ e $0 < T < K$.

O gráfico de $f(y)$ em função de y é ilustrado na Fig. 2.5.7. Nesse problema existem três pontos críticos: $y = 0$, $y = T$ e $y = K$, correspondendo às soluções de equilíbrio $\phi_1(t) = 0$, $\phi_2(t) = T$ e $\phi_3(t) = K$, respectivamente. Da Fig. 2.5.7, é claro que $dy/dt > 0$ para $T < y < K$, logo y é crescente aí. O contrário é verdadeiro para $y < T$ e $y > K$. Em conseqüência, as soluções de equilíbrio $\phi_1(t)$ e $\phi_3(t)$ são assintoticamente estáveis, enquanto $\phi_2(t)$ é instável.

A reta de fase para a Eq. (17) está ilustrada na Fig. 2.5.8a e os gráficos de algumas soluções estão esboçados na Fig. 2.5.8b. Você deve se certificar de que compreende a relação entre essas duas figuras, assim como a relação entre as Figs. 2.5.7 e 2.5.8a. Da Fig. 2.5.8b vemos que, se y começa abaixo do limiar T, então y decresce até chegar à extinção. Por outro lado, se y começa acima de T, então y acaba se aproximando, finalmente, da capacidade de sustentação K. Os pontos de inflexão nos gráficos de y em função de t na Fig. 2.5.8b correspondem aos pontos de máxi-

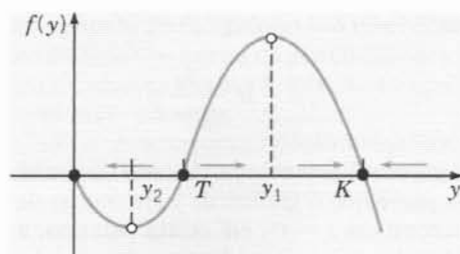


FIG. 2.5.7 Gráfico de $f(y)$ em função de y para $dy/dt = -r(1 - y/T)(1 - y/K)y$.

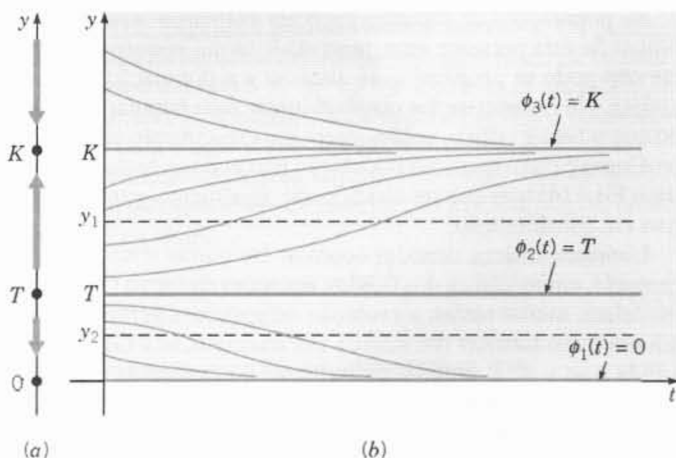


FIG. 2.5.8 Crescimento logístico com limiar: $dy/dt = -r(1 - y/T)(1 - y/K)y$. (*a*) A reta de fase. (*b*) Gráficos de y em função de t.

mo e mínimo, y_1 e y_2, respectivamente, no gráfico de $f(y)$ em função de y na Fig. 2.5.7. Esses valores podem ser obtidos diferenciando-se a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (17) em relação a y, igualando o resultado a zero e resolvendo para y. Obtemos

$$y_{1,2} = (K + T \pm \sqrt{K^2 - KT + T^2})/3, \qquad (18)$$

onde o sinal de mais fornece y_1 e o de menos, y_2.

Um modelo desse tipo geral descreve, aparentemente, a população de pombos selvagens[16] que existia nos Estados Unidos em números imensos até o final do século XIX. Foi muito caçado para comida e por esporte e, em conseqüência, seus números estavam drasticamente reduzidos na década de 1880. Infelizmente, esses pombos selvagens só podiam se reproduzir com sucesso quando presentes em grandes concentrações, correspondendo a um limiar relativamente grande T. Embora ainda existisse um número relativamente grande de pássaros individuais ao final da década de 1880, não havia um número suficiente concentrado em nenhum lugar que permitisse reprodução com sucesso e a população diminuiu rapidamente até a extinção. O último sobrevivente morreu em 1914. O declínio desenfreado na população de pombos selvagens de números imensos até a extinção em pouco mais de três décadas foi um dos primeiros fatores na preocupação sobre conservação naquele país.

[16] Ver, por exemplo, Oliver L. Austin, Jr., *Birds of the World* (New York: Golden Press, 1983), pp. 143-145.

Problemas

Os problemas de 1 a 6 envolvem equações da forma $dy/dt = f(y)$. Em cada problema, esboce o gráfico de $f(y)$ em função de y, determine os pontos críticos (de equilíbrio) e classifique cada um deles como assintoticamente estável ou instável. Desenhe a reta de fase e esboce diversos gráficos das soluções no plano ty.

1. $dy/dt = ay + by^2, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad y_0 \geq 0$
2. $dy/dt = ay + by^2, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad -\infty < y_0 < \infty$
3. $dy/dt = y(y-1)(y-2), \quad y_0 \geq 0$
4. $dy/dt = e^y - 1, \quad -\infty < y_0 < \infty$
5. $dy/dt = e^{-y} - 1, \quad -\infty < y_0 < \infty$
6. $dy/dt = -2(\text{arctg}\, y)/(1 + y^2), \quad -\infty < y_0 < \infty$
7. **Soluções de Equilíbrio Semi-estável.** Algumas vezes uma solução de equilíbrio tem a propriedade que soluções de um lado da solução de equilíbrio tendem a ela, enquanto as do outro lado se afastam dela (veja a Fig. 2.5.9). Nesse caso, a solução de equilíbrio é dita **semi-estável**.
(a) Considere a equação
$$dy/dt = k(1 - y)^2, \qquad \text{(i)}$$
onde k é uma constante positiva. Mostre que $y = 1$ é o único ponto crítico, com a solução de equilíbrio correspondente $\phi(t) = 1$.

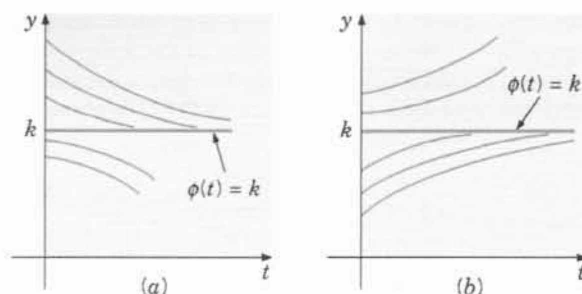


FIG. 2.5.9 Em ambos os casos a solução de equilíbrio $\phi(t) = k$ é semi-estável. (*a*) $dy/dt \leq 0$; (*b*) $dy/dt \geq 0$.

(b) Esboce o gráfico de $f(y)$ em função de y. Mostre que y é crescente como função de t se $y < 1$ e se $y > 1$. A reta de fase tem setas apontando para cima tanto abaixo quanto acima de $y = 1$. Assim, soluções abaixo da solução de equilíbrio tendem a ela, e as acima se afastam dela. Portanto, $\phi(t) = 1$ é semi-estável.
(c) Resolva a Eq. (i) sujeita à condição inicial $y(0) = y_0$ e confirme as conclusões a que chegou no item (b).

Os problemas de 8 a 13 envolvem equações da forma $dy/dt = f(y)$. Em cada problema, esboce o gráfico de $f(y)$ em função de y, determine os pontos críticos (de equilíbrio) e classifique cada um deles como assintoticamente estável, instável ou semi-estável (veja o Problema 7). Desenhe a reta de fase e esboce diversos gráficos das soluções no plano ty.

8. $dy/dt = -k(y-1)^2, \quad k > 0, \quad -\infty < y_0 < \infty$
9. $dy/dt = y^2(y^2 - 1), \quad -\infty < y_0 < \infty$
10. $dy/dt = y(1 - y^2), \quad -\infty < y_0 < \infty$
11. $dy/dt = ay - b\sqrt{y}, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad y_0 \geq 0$
12. $dy/dt = y^2(4 - y^2), \quad -\infty < y_0 < \infty$
13. $dy/dt = y^2(1 - y)^2, \quad -\infty < y_0 < \infty$
14. Considere a equação $dy/dt = f(y)$ e suponha que y_1 é um ponto crítico, isto é $f(y_1) = 0$. Mostre que a solução de equilíbrio cons-

tante $\phi(t) = y_1$ é assintoticamente estável se $f'(y_1) < 0$ e instável se $f'(y_1) > 0$.

15. Suponha que uma determinada população obedece à equação logística $dy/dt = ry[1 - (y/K)]$.
(a) Se $y_0 = K/3$, encontre o instante τ no qual a população inicial dobrou. Encontre o valor de τ correspondente a $r = 0{,}025$ por ano.
(b) Se $y_0/K = \alpha$, encontre o instante T no qual $y(T)/K = \beta$, onde $0 < \alpha, \beta < 1$. Note que $T \to \infty$ quando $\alpha \to 0$ ou $\beta \to 1$. Encontre o valor de T para $r = 0{,}025$ por ano, $\alpha = 0{,}1$ e $\beta = 0{,}9$.

16. Uma outra equação que tem sido usada para modelar o crescimento populacional é a equação de Gompertz[17],
$$dy/dt = ry\ln(K/y),$$
onde r e K são constantes positivas.
(a) Esboce o gráfico de $f(y)$ em função de y, encontre os pontos críticos e determine se cada um deles é assintoticamente estável ou instável.
(b) Para $0 \le y \le K$, determine onde o gráfico de y em função de t é convexo e onde é côncavo.
(c) Para cada y em $0 < y \le K$, mostre que dy/dt dado pela equação de Gompertz nunca é menor do que dy/dt dado pela equação logística.

17. (a) Resolva a equação de Gompertz
$$dy/dt = ry\ln(K/y),$$
sujeita à condição inicial $y(0) = y_0$.
Sugestão: Considere $u = \ln(y/K)$.
(b) Para os dados no Exemplo 1 no texto [$r = 0{,}71$ por ano, $K = 80{,}5 \times 10^6$ kg, $y_0/K = 0{,}25$], use o modelo de Gompertz para encontrar o valor previsto para $y(2)$.
(c) Para os mesmos dados do item (b), use o modelo de Gompertz para encontrar o instante τ no qual $y(\tau) = 0{,}75K$.

18. Um pequeno lago é formado à medida que se acumula água em uma depressão em forma de cone de raio a e profundidade h. Suponha que a água é acumulada a uma taxa constante k e é perdida, através de evaporação, a uma taxa proporcional à área de superfície.
(a) Mostre que o volume $V(t)$ de água no lago em um instante t satisfaz a equação diferencial
$$dV/dt = k - \alpha\pi(3a/\pi h)^{2/3}V^{2/3},$$
onde α é o coeficiente de evaporação.
(b) Encontre a profundidade de equilíbrio de água no lago. O equilíbrio é assintoticamente estável?
(c) Encontre uma condição que tem que ser satisfeita para que o lago não transborde.

19. Considere um tanque de água cilíndrico com a área da seção reta constante igual a A. A água é bombeada para o tanque a uma taxa constante k e escapa por um pequeno buraco de área a no fundo do tanque. Pelo princípio de Torricelli em hidrodinâmica (veja o Problema 6 na Seção 2.3), a taxa segundo a qual a água sai pelo buraco é $\alpha a\sqrt{2gh}$, onde h é a profundidade atual da água no tanque, g é a aceleração da gravidade e α é um coeficiente de contração que satisfaz $0{,}5 \le \alpha \le 1{,}0$.
(a) Mostre que a profundidade da água no tanque em qualquer instante satisfaz a equação
$$dh/dt = (k - \alpha a\sqrt{2gh})/A.$$
(b) Determine a profundidade de equilíbrio h_e da água e mostre que é assintoticamente estável. Observe que h_e não depende de A.

Explorando Recursos Renováveis. Suponha que a população y de uma determinada espécie de peixe (atum ou linguado gigante, por exemplo) em uma determinada área do oceano é descrita pela equação logística
$$dy/dt = r(1 - y/K)y.$$
Embora seja desejável usar essa fonte de alimentos, é intuitivamente claro que, se peixes demais forem pegos, então a população de peixes pode ficar reduzida abaixo de um nível útil, podendo até ser levada à extinção. Os Problemas 20 e 21 exploram algumas das questões envolvidas na formulação de uma estratégia racional para se gerir a exploração do peixe.[18]

20. Para um dado nível de esforço, é razoável supor que a taxa segundo a qual os peixes são pegos dependa da população y: quanto mais peixes existirem, mais fácil será pescá-los. Vamos supor, então, que a taxa segundo a qual os peixes são pegos é dada por Ey, onde E é uma constante positiva, em unidades de 1/tempo, que mede o esforço total para explorar a espécie de peixe em consideração. Para incluir esse efeito, a equação logística é substituída por
$$dy/dt = r(1 - y/K)y - Ey. \qquad \text{(i)}$$
Essa equação é conhecida por **modelo de Schaefer**, em honra ao biólogo M. B. Schaefer, que o aplicou a populações de peixes.
(a) Mostre que, se $E < r$, então existem dois pontos de equilíbrio, $y_1 = 0$ e $y_2 = K(1 - E/r) > 0$.
(b) Mostre que $y = y_1$ é assintoticamente instável e que $y = y_2$ é estável.
(c) Uma produção sustentável Y de peixes é uma taxa segundo a qual os peixes podem ser pegos indefinidamente. Essa produção é o produto do esforço E e da população assintoticamente estável y_2. Encontre Y em função do esforço E; o gráfico dessa função é conhecido como a curva produção-esforço.
(d) Determine E de modo a maximizar Y e encontre, assim, a **produção máxima sustentável** Y_m.

21. Vamos supor, neste problema, que os peixes são pegos a uma taxa constante h independente do tamanho da população. Então y satisfaz
$$dy/dt = r(1 - y/K)y - h. \qquad \text{(i)}$$
A hipótese de uma taxa constante de pesca h pode ser razoável quando y for grande, mas torna-se cada vez menor quando y vai diminuindo.
(a) Se $h < rK/4$, mostre que a Eq. (i) tem dois pontos de equilíbrio, y_1 e y_2, com $y_1 < y_2$; determine esses pontos.
(b) Mostre que y_1 é assintoticamente instável e y_2 é estável.
(c) Através do gráfico de $f(y)$ em função de y, mostre que, se a população inicial $y_0 > y_1$, então $y \to y_2$ quando $t \to \infty$, mas que, se $y_0 < y_1$, então y diminui à medida que t cresce. Note que $y = 0$ não é um ponto de equilíbrio, de modo que, se $y_0 < y_1$, a extinção será atingida em um instante finito.
(d) Se $h > rK/4$, mostre que y tende a zero quando t cresce, independente do valor de y_0.
(e) Se $h = rK/4$, mostre que existe um único ponto de equilíbrio $y = K/2$ e que esse ponto é semi-estável (veja o Problema 7). Assim, a produção máxima sustentável é $h_m = rK/4$, correspondente ao valor de equilíbrio $y = K/2$. Observe que h_m tem o mesmo valor que Y_m no Problema 20(d). A produção de peixes é considerada superexplorada se y é reduzido a um nível abaixo de $K/2$.

Epidemias. A utilização de métodos matemáticos para estudar a disseminação de doenças contagiosas vem da década de 1760, quando Daniel Bernoulli fez trabalhos sobre a varíola. Em anos mais

[17]Benjamin Gompertz (1779-1865) foi um atuário inglês. Desenvolveu seu modelo para crescimento populacional, publicado em 1825, ao construir tabelas de mortalidade para sua companhia de seguros.

[18]Um tratamento excelente desse tipo de problema, em profundidade muito maior do que o que esboçamos aqui, pode ser encontrado no livro de Clark mencionado anteriormente, especialmente nos dois primeiros capítulos. Diversas referências adicionais são mencionadas lá.

recentes, muitos modelos matemáticos têm sido propostos e estudados para diversas doenças diferentes.[19] Os problemas de 22 a 24 consideram alguns dos modelos mais simples e as conclusões que podem ser inferidas desses. Modelos semelhantes têm sido usados, também, para descrever a disseminação de boatos e de produtos de consumo.

22. Suponha que uma determinada população pode ser dividida em duas partes: os que têm a doença e podem infectar outros e os que não a têm, mas são suscetíveis. Sejam x a proporção dos indivíduos suscetíveis e y a proporção dos indivíduos infectados; então $x + y = 1$. Suponha que a doença espalha-se através do contato entre elementos doentes e sãos da população, e que a taxa de disseminação dy/dt é proporcional ao número de tais contatos. Além disso, suponha que elementos de ambos os grupos se movem livremente entre si, de modo que o número de contatos é proporcional ao produto de x e y. Como $x = 1 - y$, obtemos o problema de valor inicial

$$dy/dt = \alpha y(1 - y), \qquad y(0) = y_0, \qquad \text{(i)}$$

onde α é um fator de proporcionalidade positiva e y_0 é a população inicial de indivíduos infectados.

(a) Encontre os pontos de equilíbrio para a equação diferencial em (i) e determine se cada um é assintoticamente estável, semi-estável ou instável.

(b) Resolva o problema de valor inicial (i) e verifique que as conclusões a que você chegou no item (a) estão corretas. Mostre que $y(t) \to 1$ quando $t \to \infty$, o que significa que, certamente, a doença se espalhará por toda a população.

23. Algumas doenças (como o tifo) são disseminadas basicamente por *portadores*, indivíduos que podem transmitir a doença, mas que não exibem seus sintomas. Denote por x e y, respectivamente, a proporção de suscetíveis e portadores na população. Suponha que os portadores são identificados e removidos da população a uma taxa β, de modo que

$$dy/dt = -\beta y. \qquad \text{(i)}$$

Suponha, também, que a doença se propaga a uma taxa proporcional ao produto de x e y; assim,

$$dx/dt = -\alpha xy. \qquad \text{(ii)}$$

(a) Determine y em qualquer instante t resolvendo a Eq. (i) sujeita à condição inicial $y(0) = y_0$.

(b) Use o resultado do item (a) para encontrar x em qualquer instante t resolvendo a Eq. (ii) sujeita à condição inicial $x(0) = x_0$.

(c) Encontre a proporção da população que escapa à epidemia encontrando o valor limite de x quando $t \to \infty$.

24. O trabalho de Daniel Bernoulli na década de 1760 tinha como objetivo avaliar a eficácia de um programa controverso de vacinação contra a varíola, que era, na época, uma grande ameaça à saúde pública. Seu modelo pode ser aplicado, igualmente bem, a qualquer outra doença que, se uma pessoa a contrai e sobrevive, tem imunidade para o resto da vida.

Considere o grupo de indivíduos nascidos em um determinado ano ($t = 0$) e seja $n(t)$ o número de sobreviventes, t anos depois, entre esses indivíduos. Seja $x(t)$ o número de elementos desse grupo que não tiveram varíola até o ano t e que são, portanto, suscetíveis. Seja β a taxa segundo a qual os indivíduos suscetíveis contraem varíola e seja ν a taxa segundo a qual as pessoas que contraíram varíola morrem da doença. Finalmente, seja $\mu(t)$ a taxa de mortes de todas as outras causas, exceto a varíola. Então, dx/dt, a taxa segundo a qual o número de indivíduos suscetíveis decresce, é dada por

$$dx/dt = -[\beta + \mu(t)]x. \qquad \text{(i)}$$

A primeira parcela na expressão entre colchetes na Eq. (i) é a taxa segundo a qual os indivíduos suscetíveis contraem varíola e a segunda é a taxa de mortalidade de todas as outras causas. Temos, também,

$$dn/dt = -\nu\beta x - \mu(t)n, \qquad \text{(ii)}$$

onde dn/dt é a taxa de mortalidade de todo o grupo e as duas parcelas na expressão à direita do sinal de igualdade correspondem às taxas de mortalidade devido à varíola e a todas as outras causas, respectivamente.

(a) Seja $z = x/n$ e mostre que z satisfaz o problema de valor inicial

$$dz/dt = -\beta z(1 - \nu z), \qquad z(0) = 1. \qquad \text{(iii)}$$

Observe que o problema de valor inicial (iii) não depende de $\mu(t)$.

(b) Encontre $z(t)$ resolvendo Eq. (iii).

(c) Bernoulli estimou que $\nu = \beta = 1/8$. Usando esses valores, determine a proporção de pessoas com 20 anos que não tiveram varíola.

Obs.: Baseado no modelo que acabamos de descrever e usando os melhores dados sobre mortalidade disponíveis na época, Bernoulli calculou que, se as mortes por varíola pudessem ser eliminadas ($\nu = 0$), poder-se-ia adicionar aproximadamente 3 anos à vida média esperada (em 1760) de 26 anos e 7 meses. Portanto, ele apoiou o programa de vacinação.

Pontos de Bifurcação. Para uma equação da forma

$$dy/dt = f(a, y), \qquad \text{(i)}$$

onde a é um parâmetro real, os pontos críticos (soluções de equilíbrio) dependem, em geral, do valor de a. Quando a aumenta ou diminui, muitas vezes ocorre que em um determinado valor de a, denominado **ponto de bifurcação**, pontos críticos coincidem ou se afastam e soluções de equilíbrio podem se perder ou podem aparecer. Pontos de bifurcação são de muito interesse em diversas aplicações, porque perto deles a natureza da solução da equação diferencial em questão sofre uma mudança abrupta. Por exemplo, em mecânica dos fluidos, um fluxo suave (laminar) pode se tornar turbulento. Ou uma coluna carregada axialmente pode entortar subitamente e exibir um deslocamento lateral grande. Ou, quando a quantidade de um dos elementos em uma determinada mistura química é aumentada, padrões de ondas espirais de cores variadas pode aparecer de repente em um fluido originalmente inerte. Os Problemas de 25 a 27 descrevem três tipos de bifurcação que podem ocorrer em equações simples da forma (i).

25. Considere a equação

$$dy/dt = a - y^2. \qquad \text{(ii)}$$

(a) Encontre todos os pontos críticos da equação (ii). Observe que não existe ponto crítico se $a < 0$, existe um ponto crítico se $a = 0$ e existem dois pontos críticos se $a > 0$.

(b) Desenhe a reta de fase em cada caso e determine se cada ponto crítico é assintoticamente estável, semi-estável ou instável.

(c) Esboce diversas soluções da Eq. (ii) no plano ty para cada caso.

(d) Se fizermos o gráfico de localização dos pontos críticos em função de a no plano ay, obteremos a Fig. 2.5.10. Essa figura é chamada de **diagrama de bifurcação** para a Eq. (ii). A bifurcação em $a = 0$ é chamada de **nó-sela**. Esse nome é mais natural no contexto de sistemas de segunda ordem, que são discutidos no Cap. 9.

26. Considere a equação

$$dy/dt = ay - y^3 = y(a - y^2) \qquad \text{(iii)}$$

(a) Considere novamente os casos $a < 0$, $a = 0$ e $a > 0$. Em cada caso, encontre os pontos críticos, desenhe a reta de fase e

[19]Uma fonte padrão é o livro de Bailey listado nas referências. Os modelos nos problemas de 22 a 24 são discutidos por Bailey nos Caps. 5, 10 e 20, respectivamente.

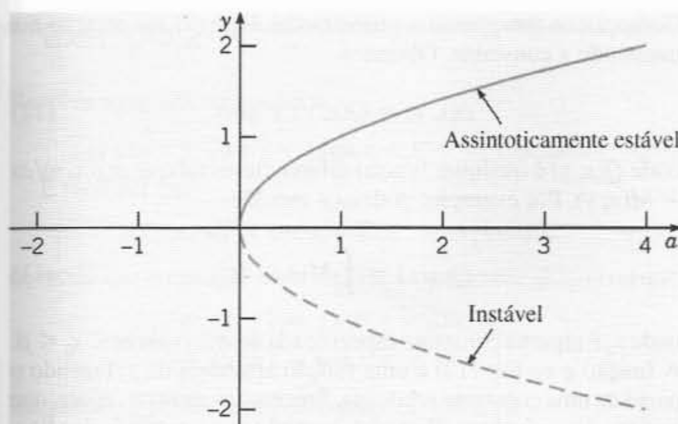


FIG. 2.5.10 Diagrama de bifurcação para $y' = a - y^2$.

determine se cada ponto crítico é assintoticamente estável, semi-estável ou instável.
(b) Esboce diversas soluções da Eq. (iii) no plano ty em cada caso.
(c) Desenhe o diagrama de bifurcação para a Eq. (iii), isto é, faça o gráfico da localização dos pontos críticos em função de a. Para a Eq. (iii), o ponto de bifurcação em $a = 0$ é chamado de bifurcação **sela-nó**; seu diagrama pode sugerir porque esse nome é apropriado.

27. Considere a equação

$$dy/dt = ay - y^2 = y(a - y) \qquad \text{(iv)}$$

(a) Mais uma vez, considere os casos $a < 0$, $a = 0$ e $a > 0$. Em cada caso, encontre os pontos críticos, desenhe a reta de fase e determine se cada ponto crítico é assintoticamente estável, semi-estável ou instável.
(b) Esboce diversas soluções da Eq. (iv) no plano ty em cada caso.
(c) Desenhe o diagrama de bifurcação para a Eq. (iv). Observe que, para a Eq. (iv), existe o mesmo número de pontos críticos para $a < 0$, $a = 0$ e $a > 0$, mas a estabilidade muda. Para $a < 0$ a solução de equilíbrio $y = 0$ é assintoticamente estável e $y = a$ é instável, enquanto, para $a > 0$, a situação é invertida. Houve, então uma **mudança de estabilidade** quando a passa pelo ponto $a = 0$. Esse tipo de bifurcação é chamado de **bifurcação transcrítica.**

28. **Reações Químicas.** Uma reação química de segunda ordem envolve a interação (colisão) de uma molécula de uma substância P com uma molécula de uma substância Q para produzir uma molécula de uma nova substância X; isso é denotado por $P + Q \to X$. Suponha que p e q, onde $p \neq q$, são as concentrações iniciais de P e Q, respectivamente, e seja $x(t)$ a concentração de X no instante t. Então, $p - x(t)$ e $q - x(t)$ são as concentrações de P e Q no instante t e a taxa segundo a qual ocorre a reação é dada pela equação

$$dx/dt = \alpha(p - x)(q - x), \qquad \text{(i)}$$

onde α é uma constante positiva.
(a) Se $x(0) = 0$, determine o valor limite de $x(t)$ quando $t \to \infty$ sem resolver a equação diferencial. Depois, resolva a equação diferencial e encontre $x(t)$ para todo t.
(b) Se as substâncias P e Q são as mesmas, então $p = q$ e a Eq. (i) é substituída por

$$dx/dt = \alpha(p - x)^2. \qquad \text{(ii)}$$

Se $x(0) = 0$, determine o valor limite de $x(t)$ quando $t \to \infty$ sem resolver a equação diferencial. Depois, resolva a equação diferencial e encontre $x(t)$ para todo t.

2.6 Equações Exatas e Fatores Integrantes

Para equações de primeira ordem, existem vários métodos de integração aplicáveis a diversas classes de problemas. As mais importantes entre essas são as equações lineares e as separáveis, já discutidas anteriormente. Vamos considerar, agora, uma classe de equações conhecidas como equações exatas, para as quais existe, também, um método bem definido de solução. Mantenha em mente, no entanto, que essas equações de primeira ordem que podem ser resolvidas por métodos de integração elementares são bastante especiais; a maior parte das equações de primeira ordem não pode ser resolvida desse modo.

Exemplo 1

Resolva a equação diferencial

$$2x + y^2 + 2xyy' = 0. \qquad (1)$$

A equação não é linear nem separável, logo os métodos apropriados para esses tipos de equação não são aplicáveis. No entanto, note que a função $\psi(x, y) = x^2 + xy^2$ tem a propriedade

$$2x + y^2 = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad 2xy = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \qquad (2)$$

Portanto, a equação diferencial pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (3)$$

Supondo que y é uma função de x e usando a regra da cadeia, podemos escrever a Eq. (3) na forma equivalente

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + xy^2) = 0. \qquad (4)$$

Logo,

$$\psi(x, y) = x^2 + xy^2 = c, \qquad (5)$$

onde c é uma constante arbitrária, é uma equação que define, implicitamente, as soluções da Eq. (1).

O passo-chave na resolução da Eq. (1) foi o reconhecimento de que existe uma função ψ que satisfaz a Eq. (2). Mais geralmente, suponha dada a equação diferencial

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0. \qquad (6)$$

Suponha que podemos identificar uma função ψ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) = N(x, y), \qquad (7)$$

e tal que $\psi(x, y) = c$ define $y = \phi(x)$ implicitamente como uma função diferenciável de x. Então,

$$M(x, y) + N(x, y)y' = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\psi[x, \phi(x)]$$

e a equação diferencial (6) torna-se

$$\frac{d}{dx}\psi[x, \phi(x)] = 0. \tag{8}$$

Nesse caso, (6) é dita uma equação diferencial **exata**. Soluções da Eq. (6), ou da equação equivalente (8), são dadas implicitamente por

$$\psi(x, y) = c, \tag{9}$$

onde c é uma constante arbitrária.

Foi relativamente fácil, no Exemplo 1, ver que a equação diferencial era exata e, de fato, foi fácil encontrar sua solução, reconhecendo-se a função necessária ψ. Para equações mais complicadas, pode não ser possível fazer isso tão facilmente. O teorema a seguir fornece um método sistemático de determinar se uma equação diferencial dada é exata.

Teorema 2.6.1

Suponha que as funções M, N, M_y e N_x, onde os índices denotam derivadas parciais, são contínuas na região retangular[20] R: $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$. Então, a Eq. (6)

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0,$$

é uma equação diferencial exata em R se, e somente se,

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \tag{10}$$

em cada ponto de R. Isto é, existe uma função ψ satisfazendo as Eqs. (7),

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \qquad \psi_y(x, y) = N(x, y),$$

se, e somente se, M e N satisfazem a Eq. (10).

A demonstração desse teorema tem duas partes. Primeiro, vamos mostrar que, se existe uma função ψ tal que as Eqs. (7) são válidas, então a Eq. (10) é satisfeita. Calculando M_y e N_x das Eqs. (7), obtemos

$$M_y(x, y) = \psi_{xy}(x, y), \quad N_x(x, y) = \psi_{yx}(x, y). \tag{11}$$

Como M_y e N_x são contínuas, ψ_{xy} e ψ_{yx} também são contínuas. Isso garante a igualdade entre elas e a Eq. (10) segue.

Vamos mostrar agora que, se M e N satisfazem a Eq. (10), então a Eq. (6) é exata. A demonstração envolve a construção de uma função ψ satisfazendo as Eqs. (7),

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \qquad \psi_y(x, y) = N(x, y).$$

Começamos integrando a primeira das Eqs. (7) em relação a x mantendo y constante. Obtemos

$$\psi(x, y) = Q(x, y) + g(y) \tag{12}$$

onde $Q(x, y)$ é qualquer função diferenciável tal que $\partial Q(x, y)/\partial x = M(x, y)$. Por exemplo, podemos escolher

$$Q(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(s, y)\, ds, \tag{13}$$

onde x_0 é alguma constante especificada no intervalo $\alpha < x_0 < \beta$. A função g na Eq. (12) é uma função arbitrária de y, fazendo o papel de uma constante arbitrária. Precisamos mostrar, agora, que sempre é possível escolher $g(y)$ de modo que a segunda das Eqs. (7) seja satisfeita, isto é, $\psi_y = N$. Diferenciando a Eq. (12) em relação a y e igualando o resultado a $N(x, y)$, obtemos

$$\psi_y(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) + g'(y) = N(x, y)$$

Resolvendo, então, para $g'(y)$, temos

$$g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y). \tag{14}$$

Para que possamos determinar $g(y)$ da Eq. (14), a expressão à direita do sinal de igualdade, apesar de sua aparência, tem que ser uma função só de y. Para estabelecer que isso é verdade, podemos diferenciar a expressão em questão em relação a x, obtendo

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \tag{15}$$

Trocando a ordem de integração na segunda parcela da Eq. (15), temos

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y),$$

ou, já que $\partial Q/\partial x = M$,

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x, y),$$

que é zero por causa da Eq. (10). Portanto, apesar de sua forma aparente, a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (14) não depende, de fato, de x. Logo, encontramos $g(y)$ integrando a Eq. (14) e, substituindo o resultado na Eq. (12), obtemos a função desejada $\psi(x, y)$. Isso completa a demonstração do Teorema 2.6.1.

É possível obter uma expressão explícita para $\psi(x, y)$ através de integrais (veja o Problema 17) mas, ao resolver equações exatas específicas é mais simples e mais fácil, em geral, repetir o procedimento usado na demonstração acima. Em outras palavras, integrar $\psi_x(x, y) = M$ em relação a x, incluindo uma função arbitrária $g(y)$ de y ao invés de uma constante, depois diferenciar o resultado em relação a y e igualar a N. Finalmente, usar essa última equação para resolver para $g(y)$. O próximo exemplo ilustra esse procedimento.

[20] Não é essencial que a região seja retangular, basta que seja simplesmente conexa. Em duas dimensões, isso significa que a região não tem "buracos" em seu interior. Assim, por exemplo, regiões retangulares ou circulares são simplesmente conexas, mas uma região anular não o é. Podem ser encontrados maiores detalhes na maior parte dos livros de cálculo avançado.

Exemplo 2

Resolva a equação diferencial

$$(y\cos x + 2xe^y) + (\operatorname{sen} x + x^2e^y - 1)y' = 0. \quad (16)$$

É fácil ver que

$$M_y(x, y) = \cos x + 2xe^y = N_x(x, y),$$

de modo que a equação dada é exata. Logo, existe $\psi(x, y)$ tal que

$$\psi_x(x, y) = y\cos x + 2xe^y,$$
$$\psi_y(x, y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y - 1.$$

Integrando a primeira dessas equações, obtemos

$$\psi(x, y) = y\operatorname{sen} x + x^2e^y + g(y). \quad (17)$$

Fazendo $\psi_y = N$, temos

$$\psi_y(x, y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y + g'(y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y - 1.$$

Portanto, $g'(y) = -1$ e $g(y) = -y$. A constante de integração pode ser omitida, já que serve qualquer solução da equação diferencial precedente; não precisamos da mais geral. Substituindo $g(y)$ na Eq. (17) temos

$$\psi(x, y) = y\operatorname{sen} x + x^2e^y - y.$$

Logo, as soluções da Eq. (16) são dadas implicitamente por

$$y\operatorname{sen} x + x^2e^y - y = c. \quad (18)$$

Exemplo 3

Resolva a equação diferencial

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0. \quad (19)$$

Aqui,

$$M_y(x, y) = 3x + 2y, \qquad N_x(x, y) = 2x + y;$$

como $M_y \neq N_x$, a equação diferencial dada não é exata. Para ver que ela não pode ser resolvida pelo método descrito acima, vamos procurar uma função ψ tal que

$$\psi_x(x, y) = 3xy + y^2, \quad \psi_y(x, y) = x^2 + xy. \quad (20)$$

Integrando a primeira das Eqs. (20), obtemos

$$\psi(x,y) = \tfrac{3}{2}x^2y + xy^2 + g(y), \quad (21)$$

onde g é uma função arbitrária dependendo apenas de y. Para tentar satisfazer a segunda das Eqs. (19), vamos calcular ψ_y da Eq. (21) e igualá-la a N, obtendo

$$\tfrac{3}{2}x^2 + 2xy + g'(y) = x^2 + xy$$

ou

$$g'(y) = -\tfrac{1}{2}x^2 - xy. \quad (22)$$

Como a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (22) depende tanto de x quanto de y, é impossível resolver a Eq. (22) para $g(y)$. Portanto, não existe $\psi(x, y)$ satisfazendo as Eqs. (20).

Fatores Integrantes. Algumas vezes é possível transformar uma equação diferencial que não é exata em uma exata, multiplicando-se a equação por um fator integrante apropriado. Lembre-se de que esse procedimento foi utilizado para resolver equações lineares na Seção 2.1. Para investigar a possibilidade de implementar essa idéia mais geralmente, vamos multiplicar a equação

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \quad (23)$$

por uma função μ e depois tentar escolher μ de modo que a equação resultante

$$\mu(x, y)M(x, y)\,dx + \mu(x, y)N(x, y)\,dy = 0 \quad (24)$$

seja exata. Pelo Teorema 2.6.1, a Eq. (23) é exata se, e somente se,

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x. \quad (25)$$

Como M e N são funções dadas, a Eq. (24) diz que o fator integrante μ tem que satisfazer a equação diferencial de primeira ordem

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0. \quad (26)$$

Se for possível encontrar uma função μ satisfazendo a Eq. (26), então a Eq. (24) vai ser exata. A solução da Eq. (24) pode ser obtida, então, pelo método descrito na primeira parte desta seção. A solução encontrada dessa maneira também satisfaz a Eq. (23), já que o fator integrante μ pode ser cancelado da Eq. (24).

Uma equação diferencial parcial da forma (26) pode ter mais de uma solução; se for esse o caso, qualquer uma das soluções pode ser usada como fator integrante para a Eq. (23). Essa possibilidade de não unicidade do fator integrante está ilustrada no Exemplo 4.

Infelizmente, a Eq. (24), que determina o fator integrante μ, é, em geral, pelo menos tão difícil de resolver quanto a equação original (23). Portanto, embora fatores integrantes sejam, em princípio, ferramentas poderosas para a resolução de equações diferenciais, eles só podem ser encontrados, na prática, em casos especiais. As situações mais importantes em que se pode encontrar fatores integrantes simples ocorre quando μ é uma função de apenas uma das variáveis x ou y, em vez de depender de ambas. Vamos determinar condições necessárias sobre M e N para que a Eq. (22) tenha um fator integrante μ dependendo apenas de x. Supondo que μ é uma função só de x, temos

$$(\mu M)_y = \mu M_y, \qquad (\mu N)_x = \mu N_x + N\frac{d\mu}{dx}.$$

Assim, para que $(\mu M)_y$ seja igual a $(\mu N)_x$, é necessário que

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu. \tag{27}$$

Se $(M_y - N_x)/N$ depende apenas de x, então existe um fator integrante μ que depende, também, só de x; além disso, $\mu(x)$ pode ser encontrado resolvendo-se a Eq. (27), que é, ao mesmo tempo, linear e separável.

Um procedimento semelhante pode ser usado para se determinar sob que condição a Eq. (23) tem um fator integrante que depende apenas de y; veja o Problema 23.

Exemplo 4

Encontre um fator integrante para a equação

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \tag{19}$$

e, depois, resolva a equação.

Mostramos, no Exemplo 3, que essa equação não é exata. Vamos verificar se existe um fator integrante que depende apenas de x. Calculando a quantidade $(M_y - N_x)/N$, encontramos que

$$\frac{M_y(x, y) - N_x(x, y)}{N(x, y)} = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}. \tag{28}$$

Logo, existe um fator integrante μ que é função só de x e que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x}. \tag{29}$$

Portanto,

$$\mu(x) = x. \tag{30}$$

Multiplicando a Eq. (19) por esse fator integrante, obtemos

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0. \tag{31}$$

Essa última equação é exata e é fácil mostrar que suas soluções são dadas implicitamente por

$$x^3y + \tfrac{1}{2}x^2y^2 = c. \tag{32}$$

As soluções também podem ser encontradas, sem dificuldades, de forma explícita, já que a Eq. (32) é quadrática em y. Você também pode verificar que um segundo fator integrante para a Eq. (19) é

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xy(2x + y)},$$

e que a mesma solução é obtida, embora com dificuldade muito maior, se esse fator integrante for usado (veja o Problema 32).

Problemas

Determine se cada uma das equações nos problemas de 1 a 12 são exatas. Para as exatas, encontre a solução.

1. $(2x + 3) + (2y - 2)y' = 0$
2. $(2x + 4y) + (2x - 2y)y' = 0$
3. $(3x^2 - 2xy + 2)\,dx + (6y^2 - x^2 + 3)\,dy = 0$
4. $(2xy^2 + 2y) + (2x^2y + 2x)y' = 0$
5. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax + by}{bx + cy}$
6. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax - by}{bx - cy}$
7. $(e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x)\,dx + (e^x \cos y + 2\cos x)\,dy = 0$
8. $(e^x \operatorname{sen} y + 3y)\,dx - (3x - e^x \operatorname{sen} y)\,dy = 0$
9. $(ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\operatorname{sen} 2x + 2x)\,dx$
   $+ (xe^{xy}\cos 2x - 3)\,dy = 0$
10. $(y/x + 6x)\,dx + (\ln x - 2)\,dy = 0, \quad x > 0$
11. $(x \ln y + xy)\,dx + (y \ln x + xy)\,dy = 0; \quad x > 0, \quad y > 0$
12. $\dfrac{x\,dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \dfrac{y\,dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$

Nos Problemas 13 e 14, resolva o problema de valor inicial dado e determine, pelo menos aproximadamente, onde a solução é válida.

13. $(2x - y)\,dx + (2y - x)\,dy = 0, \quad y(1) = 3$
14. $(9x^2 + y - 1)\,dx - (4y - x)\,dy = 0, \quad y(1) = 0$

Nos Problemas 15 e 16, encontre o valor de b para o qual a equação dada é exata e, então, resolva-a usando esse valor de b.

15. $(xy^2 + bx^2y)\,dx + (x + y)x^2\,dy = 0$
16. $(ye^{2xy} + x)\,dx + bxe^{2xy}\,dy = 0$
17. Suponha que a Eq. (6) satisfaz as condições do Teorema 2.6.1 em um retângulo R e é portanto, exata. Mostre que uma função $\psi(x, y)$ possível é

$$\psi(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(s, y_0)\,ds + \int_{y_0}^{y} N(x, t)\,dt$$

onde (x_0, y_0) é um ponto em R.

18. Mostre que qualquer equação separável

$$M(x) + N(y)y' = 0,$$

também é exata.

Mostre que as equações nos problemas de 19 a 22 não são exatas, mas tornam-se exatas ao serem multiplicadas por um fator integrante. Depois resolva as equações.

19. $x^2y^3 + x(1 + y^2)y' = 0, \quad \mu(x, y) = 1/xy^3$
20. $\left(\dfrac{\operatorname{sen} y}{y} - 2e^{-x}\operatorname{sen} x\right)dx + \left(\dfrac{\cos y + 2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy = 0,$
    $\mu(x, y) = ye^x$
21. $y\,dx + (2x - ye^y)\,dy = 0, \quad \mu(x, y) = y$
22. $(x + 2)\operatorname{sen} y\,dx + x\cos y\,dy = 0, \quad \mu(x, y) = xe^x$

23. Mostre que, se $(N_x - M_y)/M = Q$, onde Q é uma função apenas de y, então a equação diferencial

$$M + Ny' = 0$$

tem um fator integrante da forma

$$\mu(y) = \exp \int Q(y)\, dy.$$

24. Mostre que, se $(N_x - M_y)/(xM - yN) = R$, onde R depende apenas da quantidade xy, então a equação diferencial

$$M + Ny' = 0$$

tem um fator integrante da forma $\mu(xy)$. Encontre uma fórmula geral para esse fator integrante.

Nos problemas de 25 a 31, encontre um fator integrante e resolva a equação dada.

25. $(3x^2y + 2xy + y^3)\, dx + (x^2 + y^2)\, dy = 0$
26. $y' = e^{2x} + y - 1$
27. $dx + (x/y - \text{sen}\, y)\, dy = 0$
28. $y\, dx + (2xy - e^{-2y})\, dy = 0$
29. $e^x\, dx + (e^x \cot y + 2y \csc y)\, dy = 0$
30. $[4(x^3/y^2) + (3/y)]\, dx + [3(x/y^2) + 4y]\, dy = 0$
31. $\left(3x + \dfrac{6}{y}\right) + \left(\dfrac{x^2}{y} + 3\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{dy}{dx} = 0$

Sugestão: Veja o Problema 24.

32. Resolva a equação diferencial

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$

usando o fator integrante $\mu(x, y) = [xy(2x + y)]^{-1}$. Verifique que a solução é a mesma que a obtida no Exemplo 4 com um fator integrante diferente.

2.7 Aproximações Numéricas: o Método de Euler

Lembre-se de dois fatos importantes sobre o problema de valor inicial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

Primeiro, se f e $\partial f/\partial y$ são contínuas, então o problema de valor inicial (1) tem uma única solução $y = \phi(t)$ em algum intervalo contendo o ponto inicial $t = t_0$. Segundo, não é possível, em geral, encontrar a solução ϕ por manipulações simbólicas da equação diferencial. Consideramos, até agora, as principais exceções dessa afirmação, a saber, equações diferenciais que são lineares, separáveis ou exatas, ou que podem ser transformadas em um desses tipos. De qualquer jeito, continua sendo verdade que, para a vasta maioria dos problemas de valor inicial de primeira ordem, as soluções não podem ser encontradas por meios analíticos como os considerados na primeira parte deste capítulo.

Portanto, é importante sermos capazes de abordar o problema de outras maneiras. Como já vimos, uma dessas maneiras é desenhar um campo de direções para a equação diferencial (o que não envolve resolver a equação) e, depois, visualizar o comportamento das soluções pelo campo de direções. Isso tem a vantagem de ser um processo relativamente simples, mesmo para equações diferenciais complicadas. No entanto, por si mesmo ele não serve para cálculos quantitativos ou comparações e isso é, muitas vezes, um defeito grave.

Uma outra maneira é calcular valores aproximados da solução $y = \phi(t)$ do problema de valor inicial (1) para valores selecionados de t. Idealmente, os valores aproximados da solução serão acompanhados de cotas para os erros que garantem um nível de precisão para as aproximações. Existem inúmeros métodos, hoje em dia, que produzem aproximações numéricas de soluções de equações diferenciais e o Cap. 8 é devotado a uma discussão mais completa de alguns deles. Vamos introduzir, aqui, o mais velho e mais simples de tais métodos, desenvolvido por Euler por volta de 1768. É chamado o **método da reta tangente** ou o **método de Euler**.

Vamos considerar como poderíamos aproximar a solução $y = \phi(t)$ das Eqs. (1) próximo de $t = t_0$. Sabemos que o gráfico da solução contém o ponto (t_0, y_0) e, da equação diferencial, sabemos, também, que a inclinação da reta tangente ao gráfico nesse ponto é $f(t_0, y_0)$. Podemos escrever, então, uma equação para a reta tangente à curva solução em (t_0, y_0), a saber,

$$y = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0). \tag{2}$$

A reta tangente é uma boa aproximação para a curva solução em um intervalo suficientemente curto, de modo que a inclinação da reta tangente à curva solução não seja muito diferente de seu valor no ponto inicial; veja a Fig. 2.7.1. Assim, se t_1 estiver suficientemente próximo de t_0, podemos aproximar $\phi(t_1)$ pelo valor y_1 obtido substituindo-se $t = t_1$ na equação da reta tangente no ponto $t = t_0$; logo,

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)(t_1 - t_0). \tag{3}$$

Para continuar, podemos tentar repetir o processo. Infelizmente, não sabemos o valor $\phi(t_1)$ da solução em t_1. O melhor que podemos fazer é usar o valor aproximado y_1 em seu lugar. Construímos, então, a reta contendo o ponto (t_1, y_1) com coeficiente angular $f(t_1, y_1)$,

$$y = y_1 + f(t_1, y_1)(t - t_1). \tag{4}$$

Para aproximar o valor de $\phi(t)$ em um ponto próximo t_2, usamos a Eq. (4), obtendo

$$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)(t_2 - t_1). \tag{5}$$

Continuando desse modo, usamos o valor de y calculado em cada etapa para determinar o coeficiente angular para a próxima aproximação. A expressão geral para y_{n+1} em função de t_n, t_{n+1} e y_n é

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)(t_{n+1} - t_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

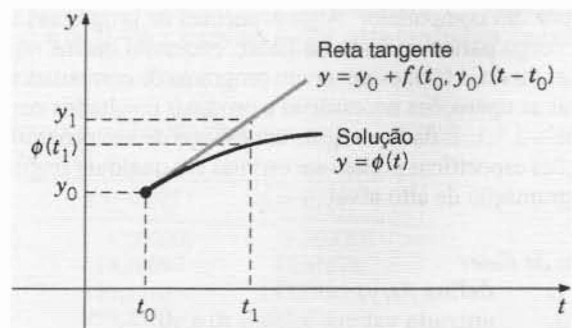


FIG. 2.7.1 Uma aproximação pela reta tangente.

Se introduzirmos a notação $f_n = f(t_n, y_n)$, podemos escrever a Eq. (6) como

$$y_{n+1} = y_n + f_n \cdot (t_{n+1} - t_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \quad (7)$$

Finalmente, se supusermos que existe um tamanho uniforme para o passo h entre os pontos $t_0, t_1, t_r, \ldots$, então $t_{n+1} = t_n + h$ para cada n e obtemos a fórmula de Euler como

$$y_{n+1} = y_n + f_n h, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \quad (8)$$

Para usar o método de Euler, basta calcular a Eq. (7) ou a Eq. (8) repetidamente, dependendo se o passo é constante ou não, usando o resultado de cada passo para calcular o próximo. Dessa maneira gera-se uma seqüência de valores $y_1, y_2, y_3, \ldots$ que aproximam o valor da solução nos pontos $t_1, t_2, t_3, \ldots$. Se, em vez de uma seqüência de pontos, você precisa de uma função para aproximar a solução $\phi(t)$, então você pode usar a função linear por partes construída da coleção de segmentos de retas tangentes. Em outras palavras, y é dado pela Eq. (2) em $[t_0, t_1]$, pela Eq. (4) em $[t_1, t_2]$ e, em geral, por

$$y = y_n + f(t_n, y_n)(t - t_n) \quad (9)$$

em $[t_n, t_{n+1}]$.

Exemplo 1

Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 3 + e^{-t} - \tfrac{1}{2}y, \qquad y(0) = 1. \quad (10)$$

Use o método de Euler com passos de tamanho $h = 0{,}1$ para encontrar valores aproximados das soluções das Eqs. (10) em t = 0,1; 0,2; 0,3 e 0,4. Compare-os com os valores reais da solução do problema de valor inicial.

Procedendo como na Seção 2.1, encontramos as soluções das Eqs. (10),

$$y = \phi(t) = 6 - 2e^{-t} - 3e^{-t/2}. \quad (11)$$

Para usar o método de Euler, observamos que, nesse caso, $f(t, y) = 3 + e^{-t} - y/2$. Usando os valores iniciais $t_0 = 0$ e $y_0 = 1$, vemos que

$$f_0 = f(t_0, y_0) = f(0, 1) = 3 + e^0 - 0{,}5 = 3 + 1 - 0{,}5 = 3{,}5$$

e então, usando a Eq. (8) com $n = 0$,

$$y_1 = y_0 + f_0 h = 1 + (3{,}5)(0{,}1) = 1{,}35.$$

No próximo passo, temos

$$f_1 = f(0{,}1; 1{,}35) = 3 + e^{-0{,}1} - (0{,}5)(1{,}35) \cong 3 + 0{,}904837 - 0{,}675 \cong 3{,}229837$$

e, então,

$$y_2 = y_1 + f_1 h \cong 1{,}35 + (3{,}229837)(0{,}1) \cong 1{,}672984.$$

Repetindo os cálculos duas vezes mais, obtemos

$$f_2 \cong 2{,}982239, \qquad y_3 \cong 1{,}971208$$

e

$$f_3 \cong 2{,}755214, \qquad y_4 \cong 2{,}246729.$$

A Tabela 2.7.1 mostra esses valores calculados, os valores correspondentes da solução (11) e a diferença entre os dois, que é o erro na aproximação numérica.

TABELA 2.7.1 Uma Comparação entre a Solução Exata e o Método de Euler com $h = 0{,}1$ para $y' = 3 + e^{-t} - y/2$, $y(0) = 1$.

t	Exata	Euler com $h = 0{,}1$	Erro
0,0	1,0000	1,0000	0,0000
0,1	1,3366	1,3500	0,0134
0,2	1,6480	1,6730	0,0250
0,3	1,9362	1,9712	0,0350
0,4	2,2032	2,2467	0,0435

O objetivo do Exemplo 1 é mostrar os detalhes da implementação de alguns poucos passos do método de Euler, de modo a deixar bastante claro quais os cálculos que são executados. É claro que cálculos como os executados no Exemplo 1 são feitos, em geral, por um computador. Alguns pacotes de programas incluem o código para o método de Euler, enquanto outros não. De qualquer modo, é fácil escrever um programa de computador para executar as operações necessárias e produzir resultados como os da Tabela 2.7.1. É dado a seguir um esboço de um programa; as instruções específicas podem ser escritas em qualquer linguagem de programação de alto nível.

Método de Euler

Passo 1. **defina** $f(t, y)$
Passo 2. **entrada** valores iniciais $t0$ e $y0$
Passo 3. **entrada** tamanho do passo h e número n de passos
Passo 4. **saída** $t0$ e $y0$
Passo 5. **para** j de 1 até n **faça**
Passo 6. $k1 = f(t, y)$
$y = y + h * k1$
$t = t + h$
Passo 7. **saída** t e y
Passo 8. **fim**

A saída desse algoritmo pode ser listar os números na tela ou imprimi-los por uma impressora, como na terceira coluna da Tabela 2.7.1. Uma outra possibilidade é apresentar os resultados calculados de modo gráfico.

Exemplo 2

Considere, novamente, o problema de valor inicial (10),

$$\frac{dy}{dt} = 3 + e^{-t} - \tfrac{1}{2}y, \qquad y(0) = 1.$$

Use o método de Euler com passo de vários tamanhos para calcular valores aproximados da solução para $0 \leq t \leq 5$. Compare os resultados calculados com os valores correspondentes da solução exata (11),

$$y = \phi(t) = 6 - 2e^{-t} - 3e^{-t/2}.$$

Usamos os tamanhos de passo $h = 0{,}1$; 0,05; 0,025 e 0,01, correspondendo a 50, 100, 200 e 500 passos, respectivamente, para ir de $t = 0$ até $t = 5$. Os resultados desses cálculos, juntos com os valores da solução exata, estão apresentados na Tabela 2.7.2. Todos os valores computados foram arredondados para quatro casas decimais, embora tenham sido usados mais dígitos durante os cálculos intermediários.

TABELA 2.7.2 Uma Comparação entre a Solução Exata e o Método de Euler com Diversos Tamanhos de Passos h para $y' = 3 + e^{-t} - y/2$, $y(0) = 1$.

t	Exata	$h = 0{,}1$	$h = 0{,}05$	$h = 0{,}025$	$h = 0{,}01$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,0	3,4446	3,5175	3,4805	3,4624	3,4517
2,0	4,6257	4,7017	4,6632	4,6443	4,6331
3,0	5,2310	5,2918	5,2612	5,2460	5,2370
4,0	5,5574	5,6014	5,5793	5,5683	5,5617
5,0	5,7403	5,7707	5,7555	5,7479	5,7433

Que conclusões podemos tirar dos dados na Tabela 2.7.2? Em primeiro lugar, para um t fixo, os valores aproximados calculados tornam-se mais precisos quando o tamanho do passo h diminui. Isso é o que esperaríamos, é claro, mas é encorajador verificar que os dados confirmam nossa expectativa. Por exemplo, para $t = 1$ o valor aproximado com $h = 0{,}1$ ultrapassa o valor exato por aproximadamente 2%, enquanto o valor aproximado com $h = 0{,}01$ só o ultrapassa por 0,2%. Nesse caso, reduzindo-se o tamanho do passo por um fator de 10 (e executando 10 vezes mais cálculos) também se reduz o erro por um fator de aproximadamente 10. Uma segunda observação que pode ser feita a partir da Tabela 2.7.2 é que, para um tamanho de passo fixo h, as aproximações tornam-se mais precisas quando t aumenta. Por exemplo, para $h = 0{,}1$, o erro para $t = 5$ fica em torno de 0,5%, comparado com 2% para $t = 1$. Um exame dos dados em pontos intermediários que não aparecem na Tabela 2.7.2 revelaria onde ocorre o erro máximo para um tamanho dado de passo e quão grande ele é.

Levando tudo em consideração, o método de Euler parece funcionar bastante bem para esse problema. Resultados razoavelmente bons podem ser obtidos mesmo para um tamanho de passo moderadamente grande como $h = 0{,}1$ e a aproximação pode ser melhorada diminuindo-se h.

Vamos considerar um outro exemplo.

Exemplo 3

Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 4 - t + 2y, \qquad y(0) = 1. \tag{12}$$

A solução geral dessa equação diferencial foi encontrada no Exemplo 2 da Seção 2.1 e a solução do problema de valor inicial (12) é

$$y = -\tfrac{7}{4} + \tfrac{1}{2}t + \tfrac{11}{4}e^{2t}. \tag{13}$$

Use o método de Euler com diversos tamanhos de passos para encontrar valores aproximados da solução no intervalo $0 \leq t \leq 5$. Compare os resultados com os valores correspondentes da solução (13).

Usando o mesmo conjunto de valores para o tamanho do passo utilizado no Exemplo 2, obtemos os resultados apresentados na Tabela 2.7.3.

Os dados na Tabela 2.7.3 confirmam, novamente, nossa expectativa de que, para um valor dado de t, a precisão melhora ao se reduzir o tamanho do passo h. Por exemplo, para $t = 1$, o erro percentual diminui de 17,3%, quando $h = 0{,}1$, para 2,1%, quando $h = 0{,}01$. No entanto, o erro cresce bem rapidamente, quando t cresce, para um h fixo. Mesmo para $h = 0{,}01$, o erro em $t = 5$ é de 9,4% e é muito maior para tamanhos de passos

TABELA 2.7.3 Uma Comparação entre a Solução Exata e o Método de Euler com Diversos Tamanhos de Passos h para $y' = 4 - t + 2y$, $y(0) = 1$.

t	Exata	$h = 0{,}1$	$h = 0{,}05$	$h = 0{,}025$	$h = 0{,}01$
0,0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
1,0	19,06990	15,77728	17,25062	18,10997	18,67278
2,0	149,3949	104,6784	123,7130	135,5440	143,5835
3,0	1109,179	652,5349	837,0745	959,2580	1045,395
4,0	8197,884	4042,122	5633,351	6755,175	7575,577
5,0	60.573,53	25.026,95	37.897,43	47.555,35	54.881,32

maiores. É claro que a precisão necessária depende de para que serão usados os resultados, mas os erros na Tabela 2.7.3 são grandes demais para a maioria das aplicações em ciências ou em engenharia. Para melhorar a situação, poderíamos tentar passos ainda menores ou restringir os cálculos a um intervalo bem pequeno a partir do ponto inicial. De qualquer modo, é claro que o método de Euler funciona bem pior nesse exemplo do que no Exemplo 2.

Para compreender melhor o que está acontecendo nesses exemplos, vamos olhar de novo o método de Euler para o problema de valor inicial geral

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0,$$

cuja solução denotamos por $\phi(t)$. Lembre-se de que uma equação diferencial de primeira ordem tem uma família infinita de soluções, indexadas por uma constante arbitrária c, e que a condição inicial determina um dos elementos dessa família infinita especificando o valor de c. Assim, $\phi(t)$ é o elemento dessa família infinita de soluções que satisfaz a condição inicial $\phi(t_0) = y_0$.

Em seu primeiro passo, o método de Euler aproxima o gráfico de $y = \phi(t)$ por sua reta tangente ao ponto inicial (t_0, y_0) e isso produz o valor aproximado y_1 em t_1. Em geral $y_1 \neq \phi(t_1)$, de modo que, em seu segundo passo, o método de Euler usa a reta tangente a uma solução próxima $y = \phi_1(t)$ no ponto (t_1, y_1), não a tangente a $y = \phi(t)$. E é desse modo em cada passo. O método de Euler usa uma sucessão de retas tangentes a uma seqüência de soluções diferentes $\phi(t)$, $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$, ... da equação diferencial. Em cada passo, é construída a reta tangente à solução cujo gráfico contém o ponto determinado pelo passo precedente, como ilustrado na Fig. 2.7.2. A qualidade da aproximação depois de muitos passos depende fortemente do comportamento do conjunto de soluções cujos gráficos contêm os pontos (t_n, y_n) para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

No Exemplo 2, a solução geral da equação diferencial é

$$y = 6 - 2e^{-t} + ce^{-t/2} \tag{14}$$

e a solução do problema de valor inicial (10) corresponde a $c = -3$. Essa família de soluções é uma família convergente, já que a parcela envolvendo a constante arbitrária c tende a zero quando $t \to \infty$. Não importa muito quais soluções estamos aproximando por retas tangentes na implementação do método de Euler, já que todas as soluções estão ficando cada vez mais próximas quando t aumenta.

Por outro lado, no Exemplo 3, a solução geral da equação diferencial é

$$y = -\tfrac{7}{4} + \tfrac{1}{2}t + ce^{2t}, \tag{15}$$

e essa é uma família divergente. Note que as soluções correspondentes a dois valores próximos de c tornam-se arbitrariamente longe uma da outra quando t aumenta. No Exemplo 3, estamos tentando seguir a solução para $c = 11/4$ mas, ao usar o método de Euler, estamos, de fato, em cada passo, seguindo uma outra solução que se afasta da desejada cada vez mais rápido quando t aumenta. Isso explica por que os erros no Exemplo 3 são muito maiores do que os erros no Exemplo 2.

Ao se usar um procedimento numérico como o método de Euler, deve-se sempre manter em mente a questão de se os resultados são suficientemente precisos para serem úteis. Nos exemplos precedentes, a precisão dos resultados numéricos pode ser calculada diretamente, comparando-se com a solução obtida analiticamente. Mas, em geral, é claro que uma solução analítica não está disponível ao se empregar um procedimento numérico, de modo que precisamos de cotas, ou, pelo menos, estimativas, para o erro que não necessite de informação sobre a solução exata. Apresentaremos, no Cap. 8, alguma informação sobre a análise de erros e discutiremos, também, diversos algoritmos mais eficientes, do ponto de vista computacional, do que o método de Euler. No entanto, o melhor que podemos esperar de uma aproximação numérica é que ela reflita o comportamento da solução exata. Dessa forma, um elemento de uma família divergente de soluções sempre vai ser mais difícil de aproximar do que um elemento de uma família convergente. Finalmente, lembre-se de que desenhar um campo de direções é, muitas vezes, uma primeira etapa bastante útil para compreender o comportamento das equações diferenciais e suas soluções.

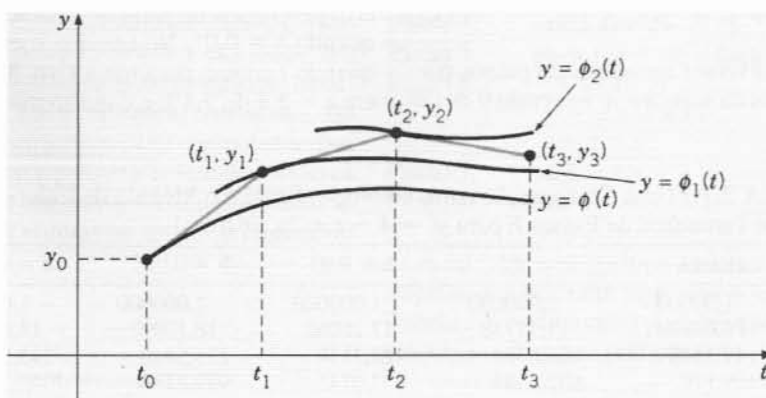


FIG. 2.7.2 O método de Euler.

Problemas

Muitos dos problemas nesta seção dependem de cálculos numéricos bastante extensos. A quantidade de cálculos razoáveis que você deve fazer depende, fortemente, do tipo de equipamento computacional disponível. Alguns passos dos cálculos necessários podem ser executados em praticamente qualquer calculadora, ou até mesmo a mão, se necessário. Para fazer mais, você vai ver que é desejável ter pelo menos uma calculadora programável, enquanto, para alguns problemas, é necessário um computador.

Lembre-se, também, de que resultados numéricos podem variar um pouco, dependendo de como seu programa é construído e como seu computador executa os passos aritméticos, arredonda etc. Variações pequenas na última casa decimal podem ser atribuídas a causas desse tipo e não indicam, necessariamente, que alguma coisa está errada. As respostas no final do livro são dadas com seis dígitos na maior parte das vezes, embora mais dígitos tenham sido usados nos cálculos intermediários.

Nos problemas de 1 até 4:
(a) Encontre valores aproximados da solução para o problema de valor inicial dado em $t = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$ e $0{,}4$ usando o método de Euler com $h = 0{,}1$.
(b) Repita o item (a) com $h = 0{,}05$. Compare com os resultados encontrados em (a).
(c) Repita o item (a) com $h = 0{,}025$. Compare com os resultados encontrados em (a) e (b).
(d) Encontre a solução $y = \phi(t)$ do problema dado e calcule $\phi(t)$ em $t = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$ e $0{,}4$. Compare esses valores com os resultados encontrados em (a), (b) e (c).

1. $y' = 3 + t - y, \quad y(0) = 1$
2. $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$
3. $y' = 0{,}5 - t + 2y, \quad y(0) = 1$
4. $y' = 3\cos t - 2y, \quad y(0) = 0$

Nos problemas de 5 a 10, desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada e diga se você acha que as soluções estão convergindo ou divergindo.

5. $y' = 5 - 3\sqrt{y}$
6. $y' = y(3 - ty)$
7. $y' = (4 - ty)/(1 + y^2)$
8. $y' = -ty + 0{,}1y^3$
9. $y' = t^2 + y^2$
10. $y' = (y^2 + 2ty)/(3 + t^2)$

Nos problemas de 11 a 14, use o método de Euler para encontrar valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0{,}5$; 1; 1,5; 2; 2,5 e 3:
(a) Com $h = 0{,}1$.
(b) Com $h = 0{,}05$.
(c) Com $h = 0{,}025$.
(d) Com $h = 0{,}01$.

11. $y' = 5 - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
12. $y' = y(3 - ty), \quad y(0) = 0{,}5$
13. $y' = (4 - ty)/(1 + y^2), \quad y(0) = -2$
14. $y' = -ty + 0{,}1y^3, \quad y(0) = 1$
15. Considere o problema de valor inicial

$$y' = 3t^2/(3y^2 - 4), \qquad y(1) = 0.$$

(a) Use a fórmula de Euler (6) com $h = 0{,}1$ para obter valores aproximados da solução em $t = 1{,}2$; 1,4; 1,6 e 1,8.
(b) Repita o item (a) com $h = 0{,}05$.
(c) Compare os resultados dos itens (a) e (b). Note que eles estão razoavelmente próximos para $t = 1{,}2$; 1,4 e 1,6, mas são bem diferentes para $t = 1{,}8$. Note também (da equação diferencial) que a reta tangente à solução é paralela ao eixo dos y quando $y = \pm 2/\sqrt{3} \cong \pm 1{,}155$. Explique como isso pode causar tanta diferença nos valores calculados.

16. Considere o problema de valor inicial

$$y' = t^2 + y^2, \qquad y(0) = 1.$$

Use o método de Euler com $h = 0{,}1$; 0,05; 0,025 e 0,01 para explorar a solução desse problema para $0 \le t \le 1$. Qual a sua melhor estimativa para o valor da solução em $t = 0{,}8$? Em $t = 1$? Seus resultados são consistentes com o campo de direções no Problema 9?

17. Considere o problema de valor inicial

$$y' = (y^2 + 2ty)/(3 + t^2), \qquad y(1) = 2.$$

Use o método de Euler com $h = 0{,}1$; 0,05; 0,025 e 0,01 para explorar a solução desse problema para $1 \le t \le 3$. Qual a sua melhor estimativa para o valor da solução em $t = 2{,}5$? Em $t = 3$? Seus resultados são consistentes com o campo de direções no Problema 10?

18. Considere o problema de valor inicial

$$y' = -ty + 0{,}1y^3, \qquad y(0) = \alpha,$$

onde α é um número dado.
(a) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial (ou examine, novamente, o do Problema 8). Observe que existe um valor crítico de α no intervalo $2 \le \alpha \le 3$ que separa as soluções convergentes das divergentes. Denote esse valor crítico por α_0.
(b) Use o método de Euler com $h = 0{,}01$ para estimar α_0. Faça isso restringindo α_0 a um intervalo $[a, b]$, onde $b - a = 0{,}01$.

19. Considere o problema de valor inicial

$$y' = y^2 - t^2, \qquad y(0) = \alpha,$$

onde α é um número dado.
(a) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial. Observe que existe um valor crítico de α no intervalo $0 \le \alpha \le 1$ que separa as soluções convergentes das divergentes. Denote esse valor crítico por α_0.
(b) Use o método de Euler com $h = 0{,}01$ para estimar α_0. Faça isso restringindo α_0 a um intervalo $[a, b]$, onde $b - a = 0{,}01$.

20. **Convergência do Método de Euler.** Pode-se mostrar que, sob condições apropriadas para f, a aproximação numérica gerada pelo método de Euler para o problema de valor inicial $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ converge para a solução exata quando o tamanho h do passo diminui. Isso é ilustrado pelo exemplo a seguir. Considere o problema de valor inicial

$$y' = 1 - t + y, \qquad y(t_0) = y_0.$$

(a) Mostre que a solução exata é $y = \phi(t) = (y_0 - t_0)e^{t - t_0} + t$.
(b) Use a fórmula de Euler para mostrar que

$$y_k = (1 + h)y_{k-1} + h - ht_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

(c) Notando que $y_1 = (1 + h)(y_0 - t_0) + t_1$, mostre, por indução, que

$$y_n = (1 + h)^n (y_0 - t_0) + t_n \qquad \text{(i)}$$

para cada inteiro positivo n.
(d) Considere um ponto fixo $t > t_0$ e, para um n dado, escolha $h = (t - t_0)/n$. Então, $t_n = t$ para todo n. Note, também, que $h \to 0$ quando $n \to \infty$. Substituindo h na Eq. (i) e fazendo $n \to \infty$, mostre que $y_n \to \phi(t)$ quando $n \to \infty$.

Sugestão: $\lim_{n\to\infty} (1 + a/n)^n = e^a$.

Nos problemas de 21 a 23, use a técnica discutida no Problema 20 para mostrar que a aproximação obtida pelo método de Euler converge à solução exata em qualquer ponto fixo quando $h \to 0$.

21. $y' = y, \quad y(0) = 1$
22. $y' = 2y - 1, \; y(0) = 1$ *Sugestão:* $y_1 = (1 + 2h)/2 + 1/2$
23. $y' = \frac{1}{2} - t + 2y, \; y(0) = 1$ *Sugestão:* $y_1 = (1 + 2h) + t_1/2$

2.8 O Teorema de Existência e Unicidade

Vamos discutir, nesta seção, a demonstração do Teorema 2.4.2, o teorema fundamental de existência e unicidade para problemas de valor inicial de primeira ordem. Esse teorema diz que, sob certas condições em $f(t, y)$, o problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0 \tag{1}$$

tem uma única solução em algum intervalo contendo o ponto t_0.

Em alguns casos (por exemplo, se a equação diferencial for linear), a existência de uma solução para o problema de valor inicial (1) pode ser estabelecida diretamente resolvendo-se o problema e exibindo-se uma fórmula para a solução. No entanto, essa abordagem não é factível em geral, pois não existe um método de resolução de equações diferenciais que se aplique a todos os casos. Portanto, para o caso geral, é necessário adotar uma abordagem indireta que demonstre a existência de uma solução para as Eqs. (1), mas que, normalmente, não fornece um modo prático para encontrá-la. O ponto crucial desse método é a construção de uma seqüência de funções que converge a uma função-limite satisfazendo o problema de valor inicial, embora os elementos individuais da seqüência não o satisfaçam. Como regra geral, é impossível calcular explicitamente mais do que alguns poucos elementos da seqüência; portanto, a função limite só pode ser determinada em casos raros. Apesar disso, sob as restrições sobre $f(t, y)$ enunciadas no Teorema 2.4.2, é possível mostrar que a seqüência em questão converge e que a função-limite tem as propriedades desejadas. O argumento é razoavelmente complicado e depende, em parte, de técnicas e resultados normalmente encontrados pela primeira vez em cursos de cálculo avançado. Em conseqüência, não entraremos em todos os detalhes da demonstração aqui; indicaremos, no entanto, suas características principais e apontaremos algumas das dificuldades envolvidas.

Em primeiro lugar, note que é suficiente considerar o problema no qual o ponto inicial (t_0, y_0) é a origem; isto é, considerar o problema

$$y' = f(t, y), \qquad y(0) = 0. \tag{2}$$

Se for dado algum outro ponto inicial, então sempre podemos fazer uma mudança de variáveis preliminar, correspondendo à translação dos eixos, que leva o ponto dado (t_0, y_0) para a origem. O teorema de existência e unicidade pode ser enunciado agora da seguinte forma:

Teorema 2.8.1

Se f e $\partial f/\partial y$ são contínuas em um retângulo R: $|t| \le a$, $|y| \le b$, então existe algum intervalo $|t| \le h \le a$ no qual existe uma única solução $y = \phi(t)$ do problema de valor inicial (2).

Para a demonstração discutida aqui, é necessário colocar o problema de valor inicial (2) em uma forma mais conveniente. Se supusermos, temporariamente, que existe uma função $y = \phi(t)$ que satisfaz o problema de valor inicial, então $f[t, \phi(t)]$ é uma função contínua que só depende de t. Logo, podemos integrar $y' = f(t, y)$ do ponto inicial $t = 0$ para um valor arbitrário de t, obtendo

$$\phi(t) = \int_0^t f[s, \phi(s)]\, ds, \tag{3}$$

onde usamos a condição inicial $\phi(0) = 0$. Usamos, também, s para denotar a variável de integração.

Como a Eq. (3) contém uma integral da função desconhecida ϕ, ela é chamada de **equação integral**. Essa equação integral não é uma fórmula para a solução do problema de valor inicial, mas fornece outra relação que é satisfeita por qualquer solução das Eqs. (2). Reciprocamente, suponha que existe uma função contínua $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação integral (3); então essa função também satisfaz o problema de valor inicial (2). Para mostrar isso, substituímos, primeiro, t por zero na Eq. (3), o que mostra que a condição inicial é satisfeita. Além disso, como o integrando na Eq. (3) é contínuo, segue do teorema fundamental do cálculo que $\phi'(t) = f[t, \phi(t)]$. Portanto, o problema de valor inicial e a equação integral são equivalentes, ou seja, qualquer solução de um desses problemas também é solução do outro. É mais conveniente mostrar que existe uma única solução da equação integral em algum intervalo $|t| \le h$. A mesma conclusão será válida, então, para o problema de valor inicial.

Um método para mostrar que a equação integral (3) tem uma única solução é conhecido como **método das aproximações sucessivas** ou **método de iteração de Picard**.[21] Ao usar esse método, começamos escolhendo uma função inicial ϕ_0, arbitrária ou que aproxima, de alguma forma, a solução do problema de valor inicial. A escolha mais simples é

$$\phi_0(t) = 0; \tag{4}$$

então ϕ_0 pelo menos satisfaz a condição inicial nas Eqs. (2), embora, presume-se, não satisfaça a equação diferencial. A próxima aproximação, ϕ_1, é obtida substituindo-se $\phi(s)$ por $\phi_0(s)$ na integral na Eq. (3) e chamando o resultado dessa operação $\phi_1(t)$. Assim,

$$\phi_1(t) = \int_0^t f[s, \phi_0(s)]\, ds. \tag{5}$$

Analogamente, ϕ_2 é obtida de ϕ_1:

$$\phi_2(t) = \int_0^t f[s, \phi_1(s)]\, ds, \tag{6}$$

e, em geral,

$$\phi_{n+1}(t) = \int_0^t f[s, \phi_n(s)]\, ds. \tag{7}$$

Desse modo, geramos a seqüência de funções $\{\phi_n\} = \phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$. Cada elemento da seqüência satisfaz a condição inicial, mas,

[21] Charles-Émile Picard (1856-1914) foi, com exceção de Henri Poincaré, o matemático francês mais famoso de sua geração. Foi nomeado professor na Sorbonne antes dos 30 anos. É conhecido por teoremas importantes em variáveis complexas e geometria algébrica, bem como em equações diferenciais. Um caso particular do método de aproximações sucessivas foi publicado primeiro por Liouville em 1838. No entanto, o crédito do método é normalmente atribuído a Picard, que o estabeleceu em uma forma geral e amplamente aplicável em uma série de artigos a partir de 1890.

em geral, nenhum deles satisfaz a equação diferencial. No entanto, se, em algum estágio, por exemplo, para $n = k$, encontrarmos $\phi_{k+1}(t) = \phi_k(t)$, então segue que ϕ_k é uma solução da equação integral (3). Portanto, ϕ_k também é solução do problema de valor inicial (2) e a seqüência pára nesse ponto. Isso normalmente não acontece e é necessário considerar toda a seqüência infinita.

Para estabelecer o Teorema 2.8.1, temos que responder quatro perguntas importantes:

1. Existem todos os elementos da seqüência $\{\phi_n\}$, ou o processo pode ter que ser interrompido em algum estágio?
2. A seqüência converge?
3. Quais são as propriedades da função limite? Em particular, ela satisfaz a equação integral (3) e, portanto, o problema de valor inicial (2)?
4. Essa é a única solução ou podem existir outras?

Vamos mostrar, primeiro, como essas perguntas podem ser respondidas em um exemplo específico relativamente simples e comentar, depois, sobre algumas dificuldades que podem ser encontradas no caso geral.

Exemplo 1

Resolva o problema de valor inicial

$$y' = 2t(1 + y), \qquad y(0) = 0. \tag{8}$$

pelo método de aproximações sucessivas.

Note primeiro que, se $y = \phi(t)$, então a equação integral correspondente é

$$\phi(t) = \int_0^t 2s[1 + \phi(s)]\,ds. \tag{9}$$

Se a aproximação inicial é $\phi_0(t) = 0$, temos que

$$\phi_1(t) = \int_0^t 2s[1 + \phi_0(s)]\,ds = \int_0^t 2s\,ds = t^2. \tag{10}$$

Analogamente,

$$\phi_2(t) = \int_0^t 2s[1 + \phi_1(s)]\,ds = \int_0^t 2s[1 + s^2]\,ds = t^2 + \frac{t^4}{2} \tag{11}$$

e

$$\phi_3(t) = \int_0^t 2s[1 + \phi_2(s)]\,ds = \int_0^t 2s\left[1 + s^2 + \frac{s^4}{2}\right]ds = t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{2 \cdot 3}. \tag{12}$$

As Eqs. (10), (11) e (12) sugerem que

$$\phi_n(t) = t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \cdots + \frac{t^{2n}}{n!} \tag{13}$$

para cada $n \geq 1$ e esse resultado pode ser estabelecido por indução matemática. A Eq. (13) é certamente verdadeira para $n = 1$; veja a Eq. (10). Precisamos mostrar que, se ela é válida para $n = k$, então também é válida para $n = k + 1$. Temos

$$\begin{aligned}\phi_{k+1}(t) &= \int_0^t 2s[1 + \phi_k(s)]\,ds \\ &= \int_0^t 2s\left(1 + s^2 + \frac{s^4}{2!} + \cdots + \frac{s^{2k}}{k!}\right)ds \\ &= t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \cdots + \frac{t^{2k+2}}{(k+1)!},\end{aligned} \tag{14}$$

e a demonstração por indução está completa.

Os gráficos dos quatro primeiros iterados $\phi_1(t), \ldots, \phi_4(t)$ estão ilustrados na Fig. 2.8.1. Quando k aumenta, os iterados parecem permanecer próximos em um intervalo gradualmente crescente, sugerindo convergência para uma função-limite.

Segue da Eq. (13) que $\phi_n(t)$ é a n-ésima soma parcial da série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!}; \tag{15}$$

logo, $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t)$ existe se, e somente se, a série (15) converge. Aplicando o teste da razão, vemos que, para cada t,

$$\left|\frac{t^{2k+2}}{(k+1)!}\,\frac{k!}{t^{2k}}\right| = \frac{t^2}{k+1} \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to \infty; \tag{16}$$

logo, a série (15) converge para todo t e sua soma $\phi(t)$ é o limite da seqüência $\{\phi_n(t)\}$. Além disso, como a série (15) é uma série de Taylor, ela pode ser diferenciada ou integrada termo a termo desde que t permaneça no intervalo de convergência que, nesse caso, é todo o eixo dos t. Portanto, podemos verificar por cálculos diretos que $\phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t^{2k}/k!$ é uma solução da equação integral (9). De outro modo, substituindo y por $\phi(t)$ nas Eqs. (8), podemos verificar que essa função satisfaz o problema de valor inicial. Neste exemplo, também é possível, a partir da série (15), identificar ϕ em termos de funções elementares, a saber, $\phi(t) = e^{t^2} - 1$. No entanto, isso não é necessário para a discussão de existência e unicidade.

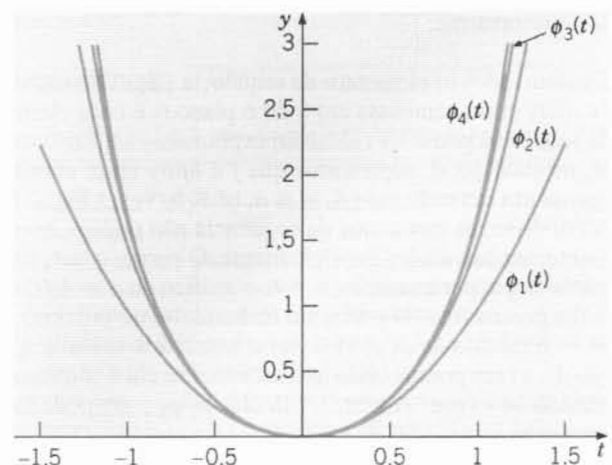


FIG. 2.8.1 Gráficos de $\phi_1(t), \ldots, \phi_4(t)$ para o Exemplo 1.

O conhecimento explícito de $\phi(t)$ não torna possível visualizar a convergência da seqüência de iterados mais claramente do que fazendo o gráfico de $\phi(t) - \phi_k(t)$ para diversos valores de k. A Fig. 2.8.2 mostra essa diferença para $k = 1, \ldots, 4$. Essa figura mostra claramente o intervalo gradualmente crescente sobre o qual iterações sucessivas fornecem uma boa aproximação da solução do problema de valor inicial.

Finalmente, para tratar a questão de unicidade, vamos supor que o problema de valor inicial tenha duas soluções ϕ e ψ. Como ambas ϕ e ψ satisfazem a equação integral (9), subtraindo, obtemos

$$\phi(t) - \psi(t) = \int_0^t 2s[\phi(s) - \psi(s)]\, ds.$$

Tomando valores absolutos, temos, se $t > 0$,

$$|\phi(t) - \psi(t)| = \left| \int_0^t 2s[\phi(s) - \psi(s)]\, ds \right| \le \int_0^t 2s|\phi(s) - \psi(s)|\, ds.$$

Restringindo t ao intervalo $0 \le t \le A/2$, onde A é arbitrário, temos $2t \le A$ e

$$|\phi(t) - \psi(t)| \le A \int_0^t |\phi(s) - \psi(s)|\, ds. \tag{17}$$

Agora é conveniente definir a função U por

$$U(t) = \int_0^t |\phi(s) - \psi(s)|\, ds. \tag{18}$$

Então, segue imediatamente que

$$U(0) = 0, \tag{19}$$

$$U(t) \ge 0, \quad \text{para} \quad t \ge 0. \tag{20}$$

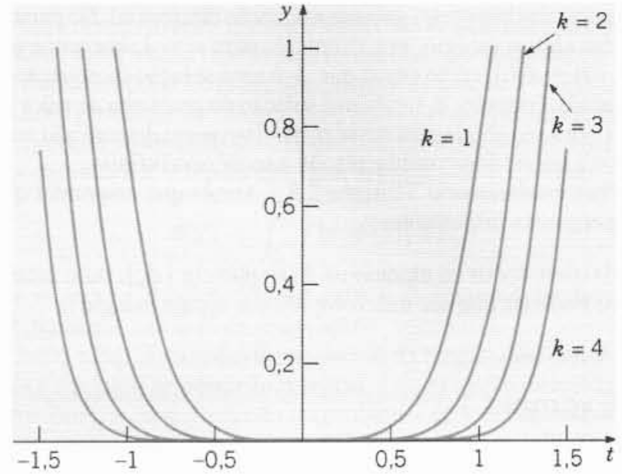


FIG. 2.8.2 Gráficos de $\phi(t) - \phi_k(t)$ para o Exemplo 1 e $k = 1, \ldots, 4$.

Além disso, U é diferenciável e $U'(t) = |\phi(t) - \psi(t)|$. Portanto, pela Eq. (17),

$$U'(t) - AU(t) \le 0. \tag{21}$$

A multiplicação da Eq. (21) pela quantidade positiva e^{-At} fornece

$$[e^{-At}U(t)]' \le 0. \tag{22}$$

Então, integrando a Eq. (22) de zero a t e usando a Eq. (19), obtemos

$$e^{-At}U(t) \le 0 \qquad \text{para} \quad t \ge 0.$$

Portanto, $U(t) \le 0$ para $t \ge 0$ e, juntando com a Eq. (20), isso implica que $U(t) = 0$ para todo $t \ge 0$. Assim, $U'(t) \equiv 0$ e, então, $\psi(t) \equiv \phi(t)$, o que contradiz a hipótese original. Em conseqüência, não pode haver duas soluções diferentes do problema de valor inicial para $t \ge 0$. Uma ligeira modificação desse argumento leva à mesma conclusão para $t \le 0$.

Voltando ao problema geral de resolução da equação integral (3), vamos considerar rapidamente cada uma das questões levantadas anteriormente:

1. Existem todos os elementos da seqüência $\{\phi_n\}$? No exemplo, f e $\partial f/\partial y$ eram contínuas em todo o plano ty e cada elemento da seqüência podia ser calculado explicitamente. Em contraste, no caso geral, supusemos que f e $\partial f/\partial y$ eram contínuas apenas em um retângulo R: $|t| \le a$, $|y| \le b$ (veja a Fig. 2.8.3). Além disso, os elementos da seqüência não podem, normalmente, ser calculados explicitamente. O perigo é que, em alguma etapa, por exemplo, $n = k$, o gráfico de $y = \phi_k(t)$ contenha pontos fora do retângulo R. Portanto, no próximo passo — o cálculo de $\phi_{k+1}(t)$ — seria necessário calcular a função $f(t, y)$ em pontos onde não sabemos se ela é contínua, ou mesmo se existe. Assim, o cálculo de $\phi_{k+1}(t)$ poderia ser impossível.

Para evitar esse perigo, pode ser necessário restringir t a um intervalo menor do que $|t| \le a$. Para encontrar esse intervalo, usamos o fato de que uma função contínua em uma região fechada limitada é limitada. Portanto, f é limitada em R; logo, existe um número positivo M tal que

$$|f(t, y)| \le M, \qquad (t, y) \text{ em } R. \tag{23}$$

Mencionamos anteriormente que

$$\phi_n(0) = 0$$

para cada n. Como $f[t, \phi_k(t)]$ é igual a $\phi'_{k+1}(t)$, o coeficiente angular máximo para as retas tangentes ao gráfico da função

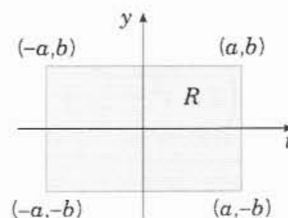


FIG. 2.8.3 Região de definição para o Teorema 2.8.1.

$y = \phi_{k+1}(t)$ é M. Como esse gráfico contém (0, 0), ele tem que estar contido nas regiões triangulares sombreadas na Fig. 2.8.4. Portanto, o ponto $[t, \phi_{k+1}(t)]$ permanece em R, pelo menos enquanto R contiver as regiões triangulares, o que ocorre se $|t| \leq b/M$. Daqui para a frente, vamos considerar apenas o retângulo D: $|t| \leq h$, $|y| \leq b$, onde h é igual ao menor dos números a ou b/M. Com essa restrição, todos os elementos da seqüência $\{\phi_n(t)\}$ existem. Note que, sempre que $b/M < a$, você pode tentar obter h encontrando uma cota melhor (isto é, menor) M para $|f(t, y)|$, se for possível.

2. A seqüência $\{\phi_n(t)\}$ converge? Como no exemplo, podemos identificar $\phi_n(t) = \phi_1(t) + [\phi_2(t) - \phi_1(t)] + \ldots + [\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)]$ como a n-ésima soma parcial da série

$$\phi_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)]. \tag{24}$$

A convergência da seqüência $\{\phi_n(t)\}$ é estabelecida mostrando-se que a série (24) converge. Para fazer isso, é necessário estimar o módulo $|\phi_{k+1}(t) - \phi_k(t)|$ do termo geral. O argumento usado para fazer isso está indicado nos problemas de 15 a 18 e será omitido aqui. Supondo que a seqüência converge, denotamos a função limite por $\phi(t)$, de modo que

$$\phi(t) = \lim_{n \to \infty} \phi_n(t). \tag{25}$$

3. Quais as propriedades da função-limite ϕ? Em primeiro lugar, gostaríamos de saber se ϕ é contínua. Isso não é, no entanto, uma conseqüência necessária da convergência da seqüência $\{\phi_n\}$, mesmo que cada membro da seqüência seja contínuo. Algumas vezes uma seqüência de funções contínuas converge a uma função descontínua. Um exemplo simples desse fenômeno é dado no Problema 13. Um modo de provar que ϕ é contínua é mostrar não só que a seqüência $\{\phi_n\}$ converge, mas que ela converge de uma determinada maneira, conhecida como convergência uniforme. Não vamos discutir essa questão aqui; observamos, apenas, que o argumento a que nos referimos no parágrafo 2 é suficiente para estabelecer a convergência uniforme da seqüência $\{\phi_n\}$ e, portanto, a continuidade da função limite ϕ no intervalo $|t| \leq h$.

Vamos voltar à Eq. (7),

$$\phi_{n+1}(t) = \int_0^t f[s, \phi_n(s)]\, ds.$$

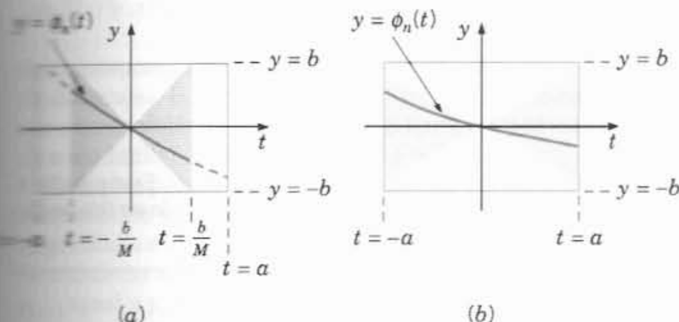


FIG. 2.8.4 Regiões onde estão os iterados sucessivos. (a) $b/M < a$; (b) $b/M > a$.

Fazendo n tender a ∞, obtemos

$$\phi(t) = \lim_{n \to \infty} \int_0^t f[s, \phi_n(s)]\, ds. \tag{26}$$

Gostaríamos de trocar a ordem da integral e do limite na expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (26), de modo a obter

$$\phi(t) = \int_0^t \lim_{n \to \infty} f[s, \phi_n(s)]\, ds. \tag{27}$$

Esse tipo de troca não é, em geral, permitida (veja o Problema 14, por exemplo), mas, mais uma vez, o fato de a seqüência $\{\phi_n\}$ convergir uniformemente é suficiente para nos permitir colocar o limite dentro do sinal de integral. A seguir, gostaríamos de colocar o limite dentro da função f, o que nos daria

$$\phi(t) = \int_0^t f[s, \lim_{n \to \infty} \phi_n(s)]\, ds \tag{28}$$

e, portanto,

$$\phi(t) = \int_0^t f[s, \phi(s)]\, ds. \tag{29}$$

A afirmação que $\lim_{n \to \infty} f[s, \phi_n(s)] = f\left[s, \lim_{n \to \infty} \phi_n(s)\right]$ é equivalente ao fato de que f é contínua em sua segunda variável, o que é conhecido por hipótese. Logo, a Eq. (29) é válida e a função ϕ satisfaz a equação integral (3). Portanto, ϕ também é solução do problema de valor inicial (2).

4. Existem outras soluções da equação integral (3) além de $y = \phi(t)$? Para mostrar a unicidade da solução, vamos proceder de maneira semelhante à do exemplo. Primeiro, suponha a existência de uma outra solução $y = \psi(t)$. Então, é possível mostrar (veja o Problema 19) que a diferença $\phi(t) - \psi(t)$ satisfaz a desigualdade

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq A \int_0^t |\phi(s) - \psi(s)|\, ds \tag{30}$$

para $0 \leq t \leq h$ e um número positivo apropriado A. A partir desse ponto, o argumento é idêntico ao dado no exemplo, e concluímos que não existe outra solução do problema de valor inicial (2) além da gerada pelo método de aproximações sucessivas.

Problemas

Nos Problemas 1 e 2, transforme o problema de valor inicial dado em um problema equivalente com ponto inicial na origem.

1. $dy/dt = t^2 + y^2, \quad y(1) = 2$
2. $dy/dt = 1 - y^3, \quad y(-1) = 3$

Nos problemas de 3 a 6, defina $\phi_0(t) = 0$ e use o método das aproximações sucessivas para resolver o problema de valor inicial dado.

(a) Determine $\phi_n(t)$ para um valor arbitrário de n.

(b) Faça o gráfico de $\phi_n(t)$ para $n = 1, \ldots, 4$. Observe se os iterados parecem estar convergindo.

(c) Expresse $\lim_{n \to \infty} \phi_n(t) = \phi(t)$ em termos de funções elementares, isto é, resolva o problema de valor inicial dado.

(d) Faça o gráfico de $|\phi(t) - \phi_n(t)|$ para $n = 1, \ldots, 4$. Para cada $\phi_1(t), \ldots, \phi_4(t)$, estime o intervalo onde a função é uma aproximação razoavelmente boa para a solução exata.

3. $y' = 2(y+1)$, $y(0) = 0$
4. $y' = -y - 1$, $y(0) = 0$
5. $y' = -y/2 + t$, $y(0) = 0$
6. $y' = y + 1 - t$, $y(0) = 0$

Nos Problemas 7 e 8, defina $\phi_0(t) = 0$ e use o método das aproximações sucessivas para resolver o problema de valor inicial dado.
(a) Determine $\phi_n(t)$ para um valor arbitrário de n.
(b) Faça o gráfico de $\phi_n(t)$ para $n = 1, \ldots, 4$. Observe se os iterados parecem estar convergindo.

7. $y' = ty + 1$, $y(0) = 0$
8. $y' = t^2y - t$, $y(0) = 0$

Nos Problemas 9 e 10, defina $\phi_0(t) = 0$ e use o método das aproximações sucessivas para resolver o problema de valor inicial dado.
(a) Calcule $\phi_1(t), \ldots, \phi_3(t)$.
(b) Faça o gráfico de $\phi_1(t), \ldots, \phi_3(t)$ e observe se os iterados parecem estar convergindo.

9. $y' = t^2 + y^2$, $y(0) = 0$
10. $y' = 1 - y^3$, $y(0) = 0$

Nos Problemas 11 e 12, defina $\phi_0(t) = 0$ e use o método das aproximações sucessivas para resolver o problema de valor inicial dado.
(a) Calcule $\phi_1(t), \ldots, \phi_4(t)$ ou (se necessário) aproximações de Taylor desses iterados.
(b) Faça o gráfico das funções encontradas em (a) e observe se elas parecem estar convergindo.

11. $y' = -\operatorname{sen} y + 1$, $y(0) = 0$
12. $y' = (3t^2 + 4t + 2)/2(y-1)$, $y(0) = 0$

13. Seja $\phi_n(x) = x^n$ para $0 \le x \le 1$ e mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Esse exemplo mostra que uma seqüência de funções contínuas pode convergir a uma função-limite que é descontínua.

14. Considere a seqüência $\phi_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$, $0 \le x \le 1$.
(a) Mostre que $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = 0$ para $0 \le x \le 1$; logo,

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)\,dx = 0.$$

(b) Mostre que $\int_0^1 2nxe^{-nx^2}\,dx = 1 - e^{-n}$; então,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \phi_n(x)\,dx = 1.$$

Assim, nesse exemplo,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(x)\,dx \neq \int_a^b \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)\,dx,$$

embora $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x)$ exista e seja contínuo.

Nos problemas de 15 a 18, indicamos como provar que a seqüência $\{\phi_n(t)\}$, definida pelas equações de (4) a (7), converge.

15. Se $\partial f/\partial y$ é contínua no retângulo D, mostre que existe uma constante positiva K tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \le K|y_1 - y_2|,$$

onde (t, y_1) e (t, y_2) são dois pontos em D com a mesma coordenada t. Essa desigualdade é conhecida como uma condição de Lipschitz[22].
Sugestão: Mantenha t fixo e use o teorema do valor médio em f como função só de y. Escolha K como sendo o valor máximo de $|\partial f/\partial y|$ em D.

16. Se $\phi_{n-1}(t)$ e $\phi_n(t)$ são elementos da seqüência $\{\phi_n(t)\}$, use o resultado do Problema 15 para mostrar que

$$|f[t, \phi_n(t)] - f[t, \phi_{n-1}(t)]| \le K|\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)|.$$

17. (a) Mostre que, se $|t| \le h$, então

$$|\phi_1(t)| \le M|t|,$$

onde M é escolhido de modo que $|f(t, y)| \le M$ para (t, y) em D.
(b) Use os resultados do Problema 16 e o item (a) deste problema para mostrar que

$$|\phi_2(t) - \phi_1(t)| \le \frac{MK|t|^2}{2}.$$

(c) Mostre, por indução matemática, que

$$|\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)| \le \frac{MK^{n-1}|t|^n}{n!} \le \frac{MK^{n-1}h^n}{n!}.$$

18. Note que

$$\phi_n(t) = \phi_1(t) + [\phi_2(t) - \phi_1(t)] + \cdots + [\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)].$$

(a) Mostre que

$$|\phi_n(t)| \le |\phi_1(t)| + |\phi_2(t) - \phi_1(t)| + \cdots + |\phi_n(t) - \phi_{n-1}(t)|.$$

(b) Use os resultados do Problema 17 para mostrar que

$$|\phi_n(t)| \le \frac{M}{K}\left[Kh + \frac{(Kh)^2}{2!} + \cdots + \frac{(Kh)^n}{n!}\right].$$

(c) Mostre que a soma no item (b) converge quando $n \to \infty$ e, portanto, a soma no item (a) também converge quando $n \to \infty$. Conclua, então, que a seqüência $\{\phi_n(t)\}$ converge, já que é a seqüência das somas parciais de uma série convergente infinita.

19. Vamos tratar, nesse problema, da questão de unicidade de solução para a equação integral (3),

$$\phi(t) = \int_0^t f[s, \phi(s)]\,ds.$$

(a) Suponha que ϕ e ψ são duas soluções da Eq. (3). Mostre que, para $t \ge 0$,

$$\phi(t) - \psi(t) = \int_0^t \{f[s, \phi(s)] - f[s, \psi(s)]\}\,ds.$$

(b) Mostre que

$$|\phi(t) - \psi(t)| \le \int_0^t |f[s, \phi(s)] - f[s, \psi(s)]|\,ds.$$

(c) Use o resultado do Problema 15 para mostrar que

$$|\phi(t) - \psi(t)| \le K \int_0^t |\phi(s) - \psi(s)|\,ds,$$

onde K é uma cota superior para $|\partial f/\partial y|$ em D. Essa equação é igual à Eq. (30), e o resto da demonstração pode ser feito como indicado no texto.

[22]Rudolf Lipschitz (1832-1903), professor na Universidade de Bonn durante muitos anos, trabalhou em diversas áreas da matemática. A desigualdade (i) pode substituir a hipótese de que $\partial f/\partial y$ é contínua no Teorema 2.8.1; isso resulta em um teorema ligeiramente mais forte.

2.9 Equações de Diferenças de Primeira Ordem

Embora um modelo contínuo que leva a uma equação diferencial seja razoável e atraente para muitos problemas, existem alguns casos nos quais um modelo discreto pode ser mais natural. Por exemplo, o modelo contínuo para juros compostos usado na Seção 2.3 é apenas uma aproximação do processo real, que é discreto. Analogamente, algumas vezes o crescimento populacional pode ser descrito de modo mais preciso por um modelo discreto, em vez de contínuo. Isso é verdade, por exemplo, para espécies cujas gerações não se sobrepõem e que se propagam a intervalos regulares, tais como em épocas determinadas do ano. Então, a população y_{n+1} da espécie no ano $n + 1$ é uma função de n e da população y_n do ano anterior, isto é,

$$y_{n+1} = f(n, y_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

A Eq. (1) é chamada **equação de diferenças de primeira ordem**. Ela é de primeira ordem porque o valor de y_{n+1} depende do valor de y_n, mas não de valores anteriores como y_{n-1}, y_{n-2}, e assim por diante. Como para as equações diferenciais, a equação de diferenças (1) é **linear** se f é uma função linear de y_n; caso contrário, ela é **não-linear**. Uma **solução** da equação de diferenças (1) é uma seqüência de números $y_0, y_1, y_2, \ldots$ que satisfazem a equação para cada n. Além da equação de diferenças, pode também haver uma **condição inicial**

$$y_0 = \alpha \tag{2}$$

que fornece o valor do primeiro elemento da seqüência solução.

Vamos supor, temporariamente, que a função f na Eq. (1) depende apenas de y_n, mas não de n. Nesse caso,

$$y_{n+1} = f(y_n), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Se y_0 for dado, então os elementos sucessivos da solução podem ser encontrados pela Eq. (3). Assim,

$$y_1 = f(y_0),$$

e

$$y_2 = f(y_1) = f[f(y_0)].$$

A quantidade $f[f(y_0)]$ é chamada de segunda iterada da equação de diferenças e é, algumas vezes, denotada por $f^2(y_0)$. Analogamente, o terceiro iterado y_3 é dado por

$$y_3 = f(y_2) = f\{f[f(y_0)]\} = f^3(y_0),$$

e assim por diante. Em geral, o n-ésimo iterado y_n é

$$y_n = f(y_{n-1}) = f^n(y_0).$$

Referimo-nos a esse procedimento como a iteração da equação de diferenças. É, muitas vezes, de interesse primordial determinar o comportamento de y_n quando $n \to \infty$; em particular, y_n tende a um limite? E, nesse caso, qual é o limite?

Soluções para as quais y_n tem o mesmo valor para todo n são chamadas de **soluções de equilíbrio**. Elas têm, com freqüência, importância especial, como no estudo de equações diferenciais. Se existirem soluções de equilíbrio, podemos achá-las fazendo y_{n+1} igual a y_n na Eq. (3) e resolvendo a equação resultante

$$y_n = f(y_n) \tag{4}$$

para y_n.

Equações Lineares. Suponha que a população de certa espécie em uma dada região no ano $n + 1$, denotada por y_{n+1}, é um múltiplo positivo ρ_n da população y_n no ano n, isto é,

$$y_{n+1} = \rho_n y_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Note que a taxa de reprodução pode variar de ano para ano. A equação de diferenças (5) é linear e pode ser facilmente resolvida por iteração. Obtemos

$$y_1 = \rho_0 y_0,$$
$$y_2 = \rho_1 y_1 = \rho_1 \rho_0 y_0,$$

e, em geral,

$$y_n = \rho_{n-1} \cdots \rho_0 y_0, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Assim, se a população inicial y_0 é dada, então a população de cada geração seguinte é determinada pela Eq. (6). Embora, para um problema populacional, ρ_n seja intrinsecamente positivo, a solução (6) também é válida se ρ_n for negativo para alguns ou todos os valores de n. Note, no entanto, que, se ρ_n for zero para algum n, então y_{n+1} e todos os valores a seguir de y são nulos; em outras palavras, a espécie torna-se extinta.

Se a taxa de reprodução ρ_n tiver o mesmo valor ρ para todo n, então a equação de diferenças (5) fica

$$y_{n+1} = \rho y_n \tag{7}$$

e sua solução é

$$y_n = \rho^n y_0. \tag{8}$$

A Eq. (7) também tem uma solução de equilíbrio, a saber, $y_n = 0$ para todo n, correspondendo ao valor inicial $y_0 = 0$. O comportamento-limite de y_n é fácil de determinar da Eq. (8). De fato,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \begin{cases} 0, & \text{se } |\rho| < 1; \\ y_0, & \text{se } \rho = 1; \\ \text{não existe}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{9}$$

Em outras palavras, a solução de equilíbrio é assintoticamente estável se $|\rho| < 1$ e instável se $|\rho| > 1$.

Vamos modificar, agora, o modelo populacional representado pela Eq. (5) para incluir o efeito de imigração ou emigração. Se b_n é o aumento total da população no ano n devido à imigração, então a população no ano $n + 1$ é a soma dos aumentos devido à reprodução natural e à imigração. Assim,

$$y_{n+1} = \rho y_n + b_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

onde estamos supondo, agora, que a taxa de reprodução ρ é constante. Podemos resolver a Eq. (10) iterando como antes. Temos

$$y_1 = \rho y_0 + b_0,$$
$$y_2 = \rho(\rho y_0 + b_0) + b_1 = \rho^2 y_0 + \rho b_0 + b_1,$$
$$y_3 = \rho(\rho^2 y_0 + \rho b_0 + b_1) + b_2 = \rho^3 y_0 + \rho^2 b_0 + \rho b_1 + b_2,$$

e assim por diante. Em geral, obtemos

$$y_n = \rho^n y_0 + \rho^{n-1} b_0 + \cdots + \rho b_{n-2} + b_{n-1}$$
$$= \rho^n y_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{n-1-j} b_j. \tag{11}$$

Note que a primeira parcela na Eq. (11) representa os descendentes da população original, enquanto as outras parcelas representam a população no ano n resultante da imigração em todos os anos precedentes.

No caso especial em que $b_n = b \neq 0$ para todo n, a equação de diferenças é

$$y_{n+1} = \rho y_n + b, \qquad (12)$$

cuja solução, pela Eq. (11), é

$$y_n = \rho^n y_0 + (1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^{n-1})b. \qquad (13)$$

Se $\rho \neq 1$, podemos escrever essa solução na forma mais compacta

$$y_n = \rho^n y_0 + \frac{1-\rho^n}{1-\rho}b, \qquad (14)$$

onde, novamente, as duas parcelas na expressão à direita do sinal de igualdade representam os efeitos da população original e da imigração, respectivamente. Escrevendo a Eq. (14) na forma

$$y_n = \rho^n\left(y_0 - \frac{b}{1-\rho}\right) + \frac{b}{1-\rho}, \qquad (15)$$

torna o comportamento de y_n a longo prazo mais evidente. Segue da Eq. (15) que $y_n \to b/(1-\rho)$ se $|\rho| < 1$. Se $|\rho| > 1$ ou se $\rho = -1$, então y_n não tem limite, a menos que $y_0 = b/(1-\rho)$. A quantidade $b/(1-\rho)$, para $\rho \neq 1$, é uma solução de equilíbrio da Eq. (12), como pode ser visto diretamente daquela equação. É claro que a Eq. (14) não é válida para $\rho = 1$. Para tratar esse caso, precisamos voltar à Eq. (13) e fazer $\rho = 1$ aí. Segue que

$$y_n = y_0 + nb, \qquad (16)$$

de modo que, nesse caso, y_n torna-se ilimitada quando $n \to \infty$.

O mesmo modelo fornece, também, um arcabouço para resolver muitos problemas de natureza financeira. Em tais problemas, y_n é o saldo na conta no n-ésimo período de tempo, $\rho_n = 1 + r_n$, onde r_n é a taxa de juros para aquele período e b_n é a quantia depositada ou retirada. O exemplo a seguir é típico.

Exemplo 1

Um recém-graduado da faculdade faz um empréstimo de R$10.000 para comprar um carro. Se a taxa de juros é de 12% ao ano, quais os pagamentos mensais necessários para ele pagar o empréstimo em 4 anos?

A equação de diferenças relevante é a Eq. (12), onde y_n é o saldo do empréstimo no n-ésimo mês, $\rho = 1 + r$, r é a taxa de juros mensal e b é o pagamento mensal. Note que b tem que ser negativo e $\rho = 1{,}01$, correspondente a uma taxa de juros de 1% ao mês.

A solução da equação de diferenças (12) com esse valor de ρ e a condição inicial $y_0 = 10.000$ é dada pela Eq. (15), ou seja,

$$y_n = (1{,}01)^n(10.000 + 100b) - 100b. \qquad (17)$$

O pagamento b necessário para que o empréstimo seja pago em 4 anos é encontrado fazendo-se $y_{48} = 0$ e resolvendo para b. Isso nos dá

$$b = -100\frac{(1{,}01)^{48}}{(1{,}01)^{48} - 1} = -263{,}34. \qquad (18)$$

O pagamento total do empréstimo é 48 vezes b, ou R$12.640,32. Desse total, R$10.000 é o pagamento do principal e os R$2640,32 restantes correspondem aos juros.

Equações Não-lineares. Equações de diferenças não-lineares são muito mais complicadas e têm soluções muito mais variadas do que as equações lineares. Vamos restringir nossa atenção a uma única equação, a equação de diferença logística

$$y_{n+1} = \rho y_n\left(1 - \frac{y_n}{k}\right), \qquad (19)$$

que é análoga à equação diferencial logística

$$\frac{dy}{dt} = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) \qquad (20)$$

discutida na Seção 2.5. Note que, se a derivada dy/dt na Eq. (20) é substituída pela diferença $(y_{n+1} - y_n)/h$, então a Eq. (20) se reduz à Eq. (19) com $\rho = 1 + hr$ e $k = (1 + hr)K/hr$. Para simplificar a Eq. (19) um pouco mais, podemos fazer uma mudança de escala na variável y_n definindo uma nova variável $u_n = y_n/k$. Então, a Eq. (19) fica

$$u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n), \qquad (21)$$

onde ρ é um parâmetro positivo.

Começamos nossa investigação da Eq. (21) procurando as soluções de equilíbrio, ou constantes. Essas podem ser encontradas igualando-se u_{n+1} a u_n na Eq. (21), o que corresponde a fazer $dy/dt = 0$ na Eq. (20). A equação resultante é

$$u_n = \rho u_n - \rho u_n^2, \qquad (22)$$

logo, as soluções de equilíbrio da Eq. (21) são

$$u_n = 0, \qquad u_n = \frac{\rho - 1}{\rho}. \qquad (23)$$

A próxima pergunta é se as soluções de equilíbrio são assintoticamente estáveis ou instáveis, isto é, para uma condição inicial próxima a uma das soluções de equilíbrio, a seqüência solução resultante se aproxima ou se afasta da solução de equilíbrio? Um modo de examinar essa questão é aproximar a Eq. (21) por uma equação linear na vizinhança de uma solução de equilíbrio. Por exemplo, próximo à solução de equilíbrio $u_n = 0$, a quantidade u_n^2 é pequena comparada a u_n, logo podemos supor desprezível a parcela quadrática na Eq. (21) em comparação com as parcelas lineares. Isso nos deixa com uma equação de diferenças linear

$$u_{n+1} = \rho u_n, \qquad (24)$$

que é, presume-se, uma boa aproximação para a Eq. (21) para u_n suficientemente próximo de zero. No entanto, a Eq. (24) é igual

[illegible] (7) e já concluímos, na Eq. (9), que $u_n \to 0$ quando $n \to \infty$ se e somente se, $|\rho| < 1$ ou (como ρ tem que ser positivo) se $0 < \rho < 1$. Assim, a solução de equilíbrio é assintoticamente estável para a aproximação linear (24) para esse conjunto de valores, logo, concluímos que é, também, assintoticamente estável para a equação não-linear completa (21). Essa conclusão está correta, embora nosso argumento não esteja completo. O que está faltando é um teorema que diz que as soluções da equação não-linear (21) parecem com as da equação linear (24) próximas à solução de equilíbrio $u_n = 0$. Não vamos discutir essa questão aqui; a mesma questão é tratada, para equações diferenciais, na Seção 9.3.

Vamos considerar agora a outra solução de equilíbrio $u_n = (\rho - 1)/\rho$. Para estudar soluções em uma vizinhança desse ponto, escrevemos

$$u_n = \frac{\rho - 1}{\rho} + v_n, \tag{25}$$

onde supomos que v_n é pequeno. Substituindo a Eq. (25) na Eq. (21) e simplificando a equação resultante, obtemos, ao final,

$$v_{n+1} = (2 - \rho)v_n - \rho v_n^2. \tag{26}$$

Como v_n é pequeno, desprezamos, novamente, o termo quadrático em comparação com os lineares e obtemos, assim, a equação linear

$$v_{n+1} = (2 - \rho)v_n. \tag{27}$$

Referindo-nos, mais uma vez, à Eq. (9), vemos que $v_n \to 0$ quando $n \to \infty$ para $|2 - \rho| < 1$, isto é, $1 < \rho < 3$. Portanto, concluímos que, para esse conjunto de valores de ρ, a solução de equilíbrio $u_n = (\rho - 1)/\rho$ é assintoticamente estável.

A Fig. 2.9.1 contém os gráficos das soluções da Eq. (21) para $\rho = 0{,}8$, $\rho = 1{,}5$ e $\rho = 2{,}8$, respectivamente. Observe que a solução converge para zero quando $\rho = 0{,}8$ e para a solução de equilíbrio diferente de zero quando $\rho = 1{,}5$ e $\rho = 2{,}8$. A convergência é monótona para $\rho = 0{,}8$ e $\rho = 1{,}5$, e é oscilatória para $\rho = 2{,}8$. Embora estejam ilustrados os gráficos para condições iniciais particulares, os gráficos para outras condições iniciais são semelhantes.

Uma outra maneira de apresentar a solução de uma equação de diferenças está ilustrada na Fig. 2.9.2. Em cada parte dessa figura, aparecem os gráficos da parábola $y = \rho x(1 - x)$ e da reta $y = x$. As soluções de equilíbrio correspondem aos pontos de interseção dessas duas curvas. O gráfico linear por partes, consistindo em segmentos de retas verticais e horizontais sucessivos, é chamado, algumas vezes, de diagrama escada, e representa a seqüência solução. A seqüência começa no ponto u_0 no eixo dos x. O segmento de reta vertical desenhado em u_0 até a parábola corresponde ao cálculo de $\rho u_0(1 - u_0) = u_1$. Esse valor é transferido, então, do eixo dos y para o eixo dos x; esse passo é representado pelo segmento de reta horizontal da parábola à reta $y = x$. O processo é, então, repetido indefinidamente. É claro que a seqüência converge para a origem na Fig. 2.9.2*a* e para a solução de equilíbrio não-nula nos dois outros casos.

Para resumir nossos resultados até agora: a equação de diferenças (21) tem duas soluções de equilíbrio, $u_n = 0$ e $u_n = (\rho - 1)/\rho$; a primeira é assintoticamente estável para $0 \leq \rho < 1$ e a segunda é assintoticamente estável para $1 < \rho < 3$. Quando $\rho = 1$ as duas soluções de equilíbrio coincidem em $u = 0$; pode-se mostrar que essa solução é assintoticamente estável. Na Fig. 2.9.3 o parâmetro ρ está no eixo horizontal e u no eixo vertical. Estão ilustradas as soluções de equilíbrio $u = 0$ e $u = (\rho - 1)/\rho$. Os intervalos em que cada uma delas é assintoticamente estável são indicados pelas partes sólidas das curvas. Há uma **mudança de estabilidade** de uma solução de equilíbrio para a outra em $\rho = 1$.

Para $\rho > 3$, nenhuma das soluções de equilíbrio é estável, e as soluções da Eq. (21) exibem complexidade cada vez maior à medida que ρ cresce. Para ρ um pouco maior do que 3, a seqüência aproxima-se, rapidamente, de uma oscilação estacionária de período 2, isto é, u_n oscila entre dois valores distintos. A Fig. 2.9.4 mostra a solução para $\rho = 3{,}2$. Para n maior do que cerca de 20, os valores da solução alternam entre 0,5130 e 0,7995. O gráfico foi feito para a condição inicial particular $u_0 = 0{,}3$, mas é semelhante para todos os outros valores iniciais entre 0 e 1. A Fig. 2.9.4*b* também mostra a mesma oscilação estacionária como um caminho retangular que é percorrido repetidamente no sentido horário. Para ρ aproximadamente igual a 3,449, cada estado na oscilação de período 2 se divide em dois estados distintos e a solução torna-se periódica com período 4; veja a Fig. 2.9.5, que mostra uma solução de período 4 para $\rho = 3{,}5$. Quando ρ continua crescendo, aparecem soluções periódicas com períodos 8, 16, ... A aparição de uma nova solução em um determinado valor do parâmetro é chamada **bifurcação**.

Os valores de ρ nos quais ocorrem os sucessivos dobros do período tendem a um limite que é aproximadamente igual a 3,57. Para $\rho > 3{,}57$, as soluções possuem alguma regularidade, mas não dá para discernir um padrão detalhado para a maioria dos valores de ρ. Por exemplo, a Fig. 2.9.6 mostra uma solução para $\rho = 3{,}65$. Ela oscila entre 0,3 e 0,9 aproximadamente, mas sua estrutura mais fina é imprevisível. A expressão **caótica** é usada para descrever essa situação. Uma das características de soluções caóticas é sua extrema sensibilidade às condições iniciais. Isso é ilustrado na Fig. 2.9.7, onde aparecem duas soluções da Eq. (21) para $\rho = 3{,}65$. Uma solução é a mesma que aparece na Fig. 2.9.6 e tem valor inicial $u_0 = 0{,}3$, enquanto a outra solução tem valor inicial $u_0 = 0{,}305$. Por aproximadamente 15 iterações, as duas soluções permanecem próximas e são difíceis de distinguir uma da outra na figura. Depois disso, embora elas continuem circulando em aproximadamente o mesmo conjunto de valores, seus gráficos são bem diferentes. Certamente não seria possível usar uma dessas soluções para estimar o valor da outra para valores de n maiores do que cerca de 15.

Apenas recentemente é que as soluções caóticas de equações de diferenças e diferenciais tornaram-se amplamente conhecidas. A Eq. (20) foi um dos primeiros exemplos de caos matemático a ser encontrado e estudado em detalhe por Robert May[23] em 1974. Baseado em sua análise dessa equação como um modelo para a população de determinada espécie de inseto, May sugeriu que, se a taxa de crescimento ρ é grande demais, então será impossível fazer previsões efetivas a longo prazo sobre essas populações de insetos. A ocorrência de soluções caóticas em problemas simples estimulou uma enorme quantidade de pesquisa em anos recentes, mas muitas perguntas permanecem sem resposta. É cada vez mais claro, no entanto, que soluções caóticas são muito mais comuns do que se suspeitava inicialmente e podem fazer parte da investigação de um amplo leque de fenômenos.

---

[23]R. M. May, "Biological Populations with Nonoverlapping Generations: Stable Points, Stable Cycles, and Chaos", *Science 186* (1974), pp. 645-647; "Biological Populations Obeying Difference Equations: Stable Points, Stable Cycles, and Chaos", *Journal of Theoretical Biology 51* (1975), pp. 511-524.

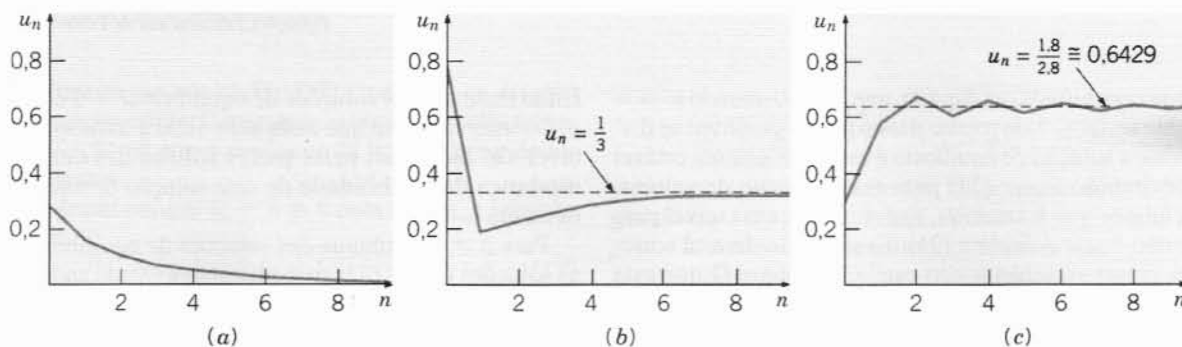
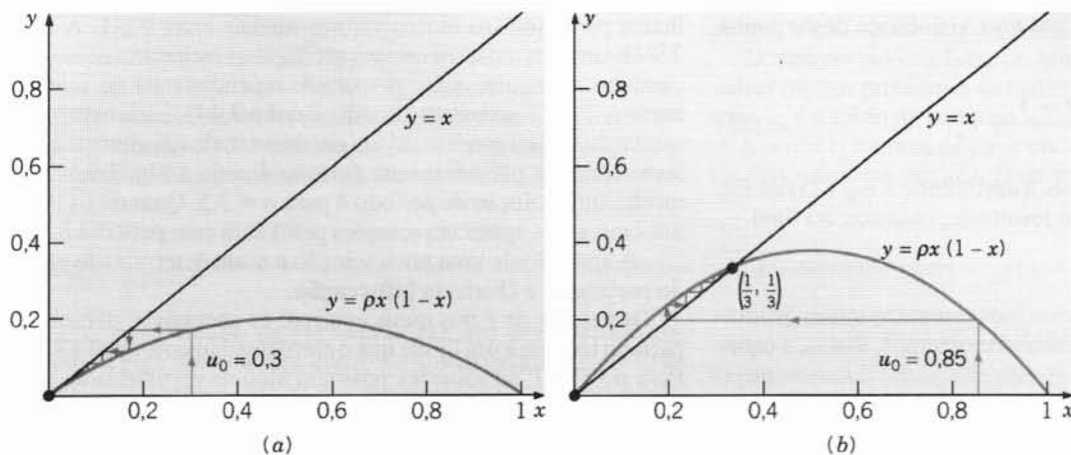


FIG. 2.9.1 Soluções de $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$: (a) $\rho = 0{,}8$; (b) $\rho = 1{,}5$; (c) $\rho = 2{,}8$.



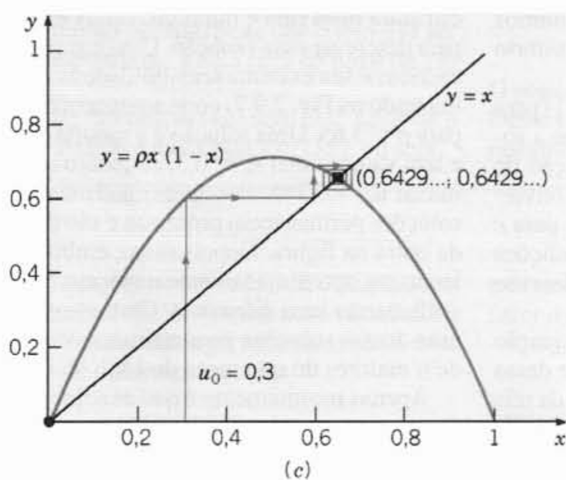


FIG. 2.9.2 Iterados de $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$. (a) $\rho = 0{,}8$; (b) $\rho = 1{,}5$; (c) $\rho = 2{,}8$.

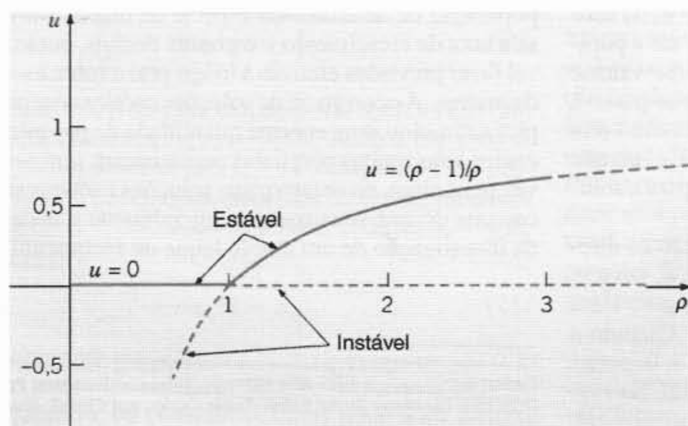
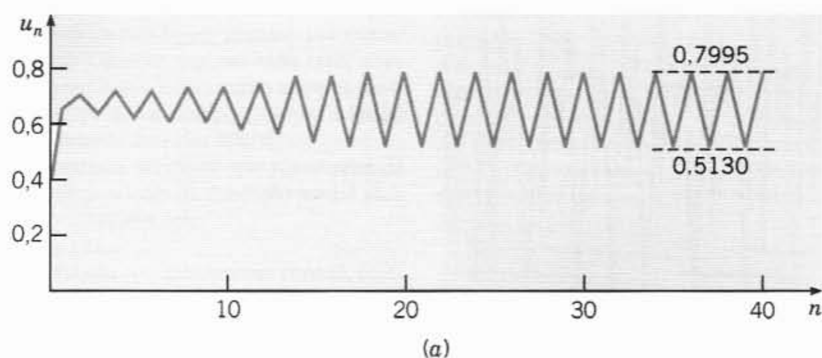


FIG. 2.9.3 Mudança de estabilidade para $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$.



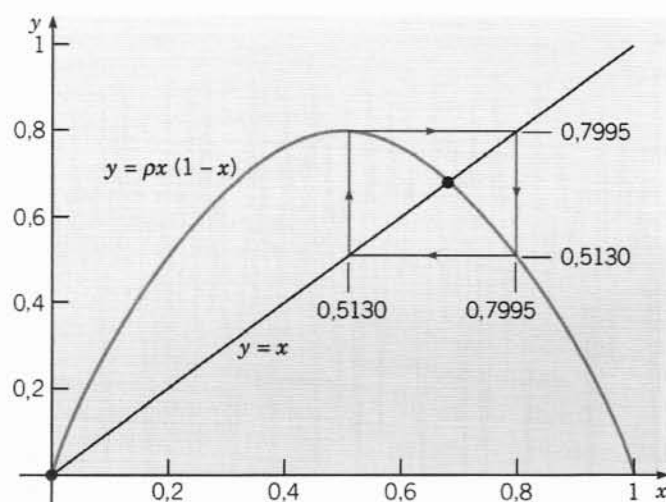
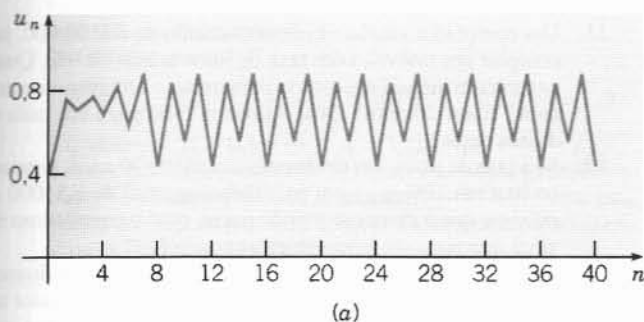


FIG. 2.9.4 Uma solução de $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$ para $\rho = 3{,}2$; período 2.(*a*) u_n em função de n; (*b*) um ciclo de período 2.



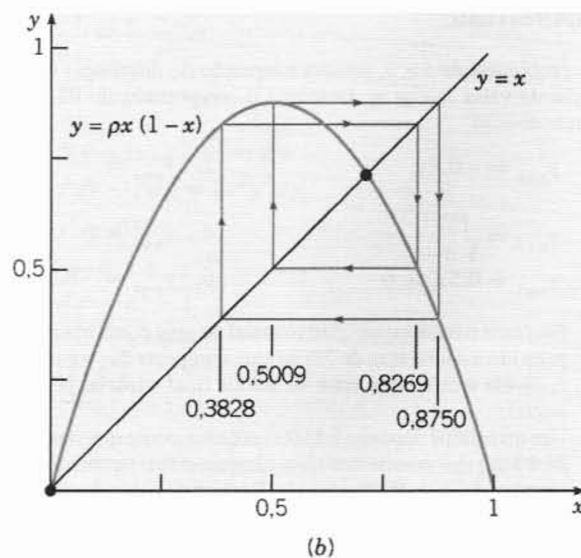


FIG. 2.9.5 Uma solução de $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$ para $\rho = 3{,}5$; período quatro. (*a*) u_n em função de n; (*b*) um ciclo de período 4.

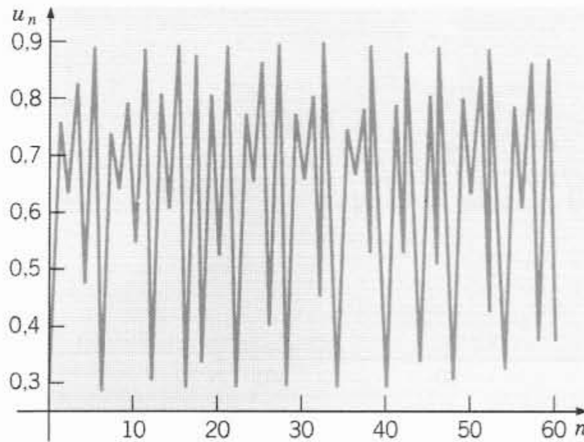


FIG. 2.9.6 Uma solução de $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$ para $\rho = 3{,}65$; uma solução caótica.

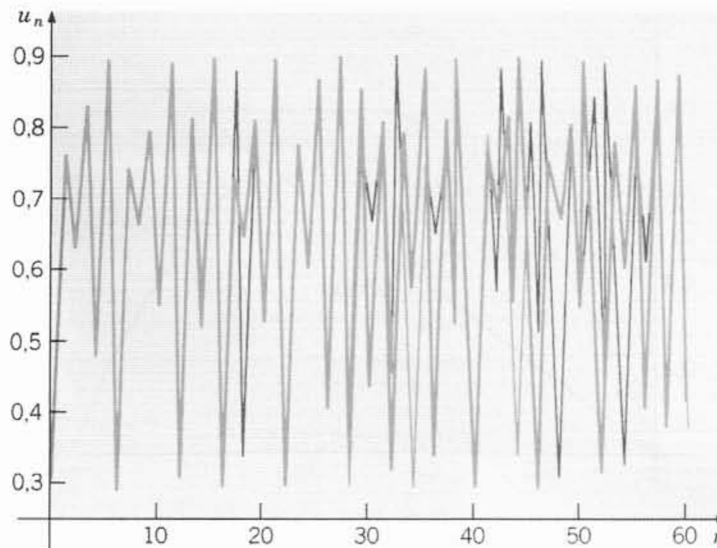


FIG. 2.9.7 Duas soluções de $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$ para $\rho = 3{,}65$; $u_0 = 0{,}3$ e $u_0 = 0{,}305$.

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, resolva a equação de diferenças dada em função do valor inicial y_0. Descreva o comportamento da solução quando $n \to \infty$.

1. $y_{n+1} = -0{,}9y_n$
2. $y_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}y_n$
3. $y_{n+1} = \sqrt{\dfrac{n+3}{n+1}}y_n$
4. $y_{n+1} = (-1)^{n+1}y_n$
5. $y_{n+1} = 0{,}5y_n + 6$
6. $y_{n+1} = -0{,}5y_n + 6$
7. Encontre o rendimento efetivo anual de uma conta bancária que paga juros a uma taxa de 7% ao ano, composta diariamente, isto é, divida a diferença entre os saldos final e inicial pelo saldo inicial.
8. Um investidor deposita R$1000 em uma conta que rende juros de 8% ao ano compostos mensalmente e faz, também, depósitos adicionais de R$25 por mês. Encontre o saldo na conta após 3 anos.
9. Um recém-formado faz um empréstimo de R$8000 para comprar um carro. O empréstimo é feito com juros anuais de 10%. Que taxa de pagamento mensal é necessária para liquidar o empréstimo em 3 anos? Compare seu resultado com o do Problema 9 da Seção 2.3.
10. Um comprador deseja adquirir um imóvel com financiamento de R$100.000 para ser pago em 30 anos. Qual o pagamento mensal necessário se a taxa de juros é (a) 9%, (b) 10%, (c) 12%?
11. Um comprador recebe um financiamento de R$100.000, para comprar um imóvel, com taxa de juros anuais de 9%. Qual o pagamento mensal necessário para quitar o empréstimo em 30 anos? E em 20 anos? Qual a quantia total paga em cada um desses casos?
12. Se a taxa de juros, em um financiamento de 20 anos, permanece fixa em 10% e se um pagamento mensal de R$1000 é o máximo que o comprador pode pagar, qual o empréstimo máximo que pode ser feito sob essas condições?
13. Um comprador gostaria de comprar um imóvel com financiamento de R$95.000 pagável durante 20 anos. Qual a maior taxa de juros que o comprador pode pagar se os pagamentos mensais não podem exceder R$900?

A Equação de Diferenças Logística. Os problemas de 14 a 19 tratam da equação de diferenças (21), $u_{n+1} = \rho u_n(1 - u_n)$.

14. Faça os detalhes para a análise de estabilidade linear da solu-

ção de equilíbrio $u_n = (\rho - 1)/\rho$, isto é, deduza a equação de diferenças (26) no texto para a perturbação v_n.

15. (a) Para $\rho = 3{,}2$, faça o gráfico ou calcule a solução da equação logística (21) para diversas condições iniciais, por exemplo, $u_0 = 0{,}2; 0{,}4; 0{,}6$ e $0{,}8$. Observe que, em cada caso, a solução se aproxima de uma oscilação estacionária entre os mesmos dois valores. Isso ilustra que o comportamento a longo prazo da solução é independente do valor inicial.
(b) Faça cálculos semelhantes e verifique que a natureza da solução para n grande é independente da condição inicial para outros valores de ρ, como 2,6; 2,8 e 3,4.

16. Suponha que $\rho > 1$ na Eq. (21).
(a) Desenhe um diagrama escada qualitativamente correto, mostrando, assim, que, se $u_0 < 0$, então $u_n \to -\infty$ quando $n \to \infty$.
(b) De maneira análoga, determine o que acontece quando $n \to \infty$ se $u_0 > 1$.

17. As soluções da Eq. (21) mudam de seqüências convergentes para oscilações periódicas de período 2 quando o parâmetro ρ passa pelo valor 3. Para ver mais claramente como isso ocorre, efetue os cálculos indicados a seguir.
(a) Faça o gráfico ou calcule a solução para $\rho = 2{,}9; 2{,}95$ e $2{,}99$, respectivamente, usando um valor inicial u_0 de sua escolha no intervalo (0, 1). Estime, em cada caso, quantas iterações são necessárias para a solução tornar-se "muito próxima" do valor limite. Use qualquer interpretação conveniente para o significado de "muito próximo" na frase anterior.
(b) Faça o gráfico ou calcule a solução para $\rho = 3{,}01; 3{,}05$ e $3{,}1$, respectivamente, usando a mesma condição inicial que no item (a). Estime, em cada caso, quantas iterações são necessárias para se atingir uma solução estado estacionário. Encontre ou estime, também, os dois valores na oscilação estado estacionário.

18. Calculando ou fazendo o gráfico da solução da Eq. (21) para valores diferentes de ρ, estime o valor de ρ para o qual a solução muda de uma oscilação de período 2 para uma de período 4. De modo análogo, estime o valor de ρ para o qual a solução muda de período 4 para período 8.

19. Seja ρ_k o valor de ρ para o qual a solução da Eq. (21) muda do período 2^{k-1} para o período 2^k. Então, como observado no texto, $\rho_1 = 3$, $\rho_2 \approx 3{,}449$ e $\rho_3 \approx 3{,}544$.
(a) Usando esses valores para ρ_1, ρ_2 e ρ_3, ou os que você encontrou no Problema 18, calcule $(\rho_2 - \rho_1)/(\rho_3 - \rho_2)$.
(b) Seja $\delta_n = (\rho_n - \rho_{n-1})/(\rho_{n+1} - \rho_n)$. Foi demonstrado que δ_n tende a um limite δ quando $n \to \infty$, onde $\delta \approx 4{,}6692$ é conhecido como o número de Feigenbaum[24]. Determine a diferença percentual entre o valor limite δ e δ_2, como calculado no item (a).
(c) Suponha que $\delta_3 = \delta$ e use essa relação para estimar ρ_4, o valor de ρ para o qual aparecem soluções de período 16.
(d) Fazendo o gráfico ou calculando soluções próximas para o valor de ρ_4 encontrado no item (c), tente detectar a aparição de uma solução de período 16.
(e) Observe que

$$\rho_n = \rho_1 + (\rho_2 - \rho_1) + (\rho_3 - \rho_2) + \cdots + (\rho_n - \rho_{n-1}).$$

Supondo que $(\rho_4 - \rho_3) = (\rho_3 - \rho_2)\delta^{-1}$, $(\rho_5 - \rho_4) = (\rho_3 - \rho_2)\delta^{-2}$, e assim por diante, expresse ρ_n como uma soma geométrica. Depois encontre o limite de ρ_n quando $n \to \infty$. Isso é uma estimativa do valor de ρ no qual começa a aparecer comportamento caótico na solução da equação logística (21).

[24] Esse resultado para a equação de diferenças logística foi descoberto por Mitchell Feigenbaum (1944-) em agosto de 1975, quando trabalhava no Laboratório Nacional de Los Alamos. Algumas semanas depois ele estabeleceu que esse mesmo valor limite também aparece em uma classe grande de equações de diferenças que dobram o período. Feigenbaum, que tem doutorado em física pelo M.I.T. (Instituto de Tecnologia de Massachussets), está atualmente na Universidade Rockefeller.

Problemas

Problemas Variados Uma das dificuldades em resolver equações de primeira ordem é que existem diversos métodos de resolução, cada um dos quais podendo ser usado em certos tipos de equações. Pode levar algum tempo para se tornar proficiente em escolher o método melhor para uma equação. Os 32 primeiros problemas a seguir são apresentados para você obter alguma prática na identificação do método ou métodos aplicáveis a uma equação dada. Os problemas restantes envolvem determinados tipos de equações que podem ser resolvidos por métodos especializados.

Nos problemas de 1 a 32, resolva a equação diferencial. Se for dada uma condição inicial, encontre, também, a solução que a satisfaz.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3 - 2y}{x}$
2. $(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$
3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + y}{3 + 3y^2 - x}, \qquad y(0) = 0$
4. $(x + e^y)\,dy - dx = 0$
5. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2xy + y^2 + 1}{x^2 + 2xy}$
6. $x\dfrac{dy}{dx} + xy = 1 - y, \qquad y(1) = 0$
7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x^2y + y^3}$ *Sugestão:* considere $u = x^2$.
8. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, \qquad y(2) = 1$
9. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2xy + 1}{x^2 + 2y}$
10. $(3y^2 + 2xy)\,dx - (2xy + x^2)\,dy = 0$
11. $(x^2 + y)\,dx + (x + e^y)\,dy = 0$
12. $\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{1 + e^x}$
13. $x\,dy - y\,dx = (xy)^{1/2}\,dx$
14. $(x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0, \qquad y(2) = 3$
15. $(e^x + 1)\dfrac{dy}{dx} = y - ye^x$
16. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2}$
17. $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x} + 3y$
18. $(2y + 3x)\,dx = -x\,dy$
19. $x\,dy - y\,dx = 2x^2y^2\,dy, \qquad y(1) = -2$
20. $y' = e^{x+y}$
21. $xy' = y + xe^{y/x}$
22. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - 1}{y^2 + 1}, \qquad y(-1) = 1$
23. $xy' + y - y^2e^{2x} = 0$
24. $2\operatorname{sen} y \cos x\,dx + \cos y \operatorname{sen} x\,dy = 0$
25. $\left(2\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right) dx + \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2} - \dfrac{x^2}{y^2}\right) dy = 0$
26. $(2y + 1)\,dx + \left(\dfrac{x^2 - y}{x}\right) dy = 0$

27. $(\cos 2y - \operatorname{sen} x)\,dx - 2\operatorname{tg} x \operatorname{sen} 2y\,dy = 0$

28. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 - 2y - y^3}{2x + 3xy^2}$

29. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y + \sqrt{x^2 - y^2}}{2x}$

30. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{1 - 2xy^2}, \qquad y(0) = 1$

31. $(x^2y + xy - y)\,dx + (x^2y - 2x^2)\,dy = 0$

32. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2y + y^2}{2x^3 + 3xy}, \qquad y(1) = -2$

33. **Equações de Riccati.** A equação

$$\frac{dy}{dt} = q_1(t) + q_2(t)y + q_3(t)y^2$$

é conhecida como uma equação de Riccati[25]. Suponha que alguma solução particular y_1 dessa equação é conhecida. Uma solução mais geral contendo uma constante arbitrária pode ser obtida através da substituição

$$y = y_1(t) + \frac{1}{v(t)}.$$

Mostre que $v(t)$ satisfaz a equação *linear* de primeira ordem

$$\frac{dv}{dt} = -(q_2 + 2q_3y_1)v - q_3.$$

Note que $v(t)$ vai conter uma única constante arbitrária.

34. Usando o método do Problema 33 e a solução particular dada, resolva cada uma das equações de Riccati a seguir:

(a) $y' = 1 + t^2 - 2ty + y^2; \qquad y_1(t) = t$

(b) $y' = -\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{y}{t} + y^2; \qquad y_1(t) = \dfrac{1}{t}$

(c) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{2\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t + y^2}{2\cos t}; \qquad y_1(t) = \operatorname{sen} t$

35. A propagação de uma única ação em uma população grande (por exemplo, motoristas acendendo os faróis quando o sol se põe) muitas vezes depende parcialmente de circunstâncias externas (o escurecimento) e parcialmente de uma tendência de imitar outros que já fizeram a ação em questão. Nesse caso, a proporção $y(t)$ de pessoas que efetuaram a ação pode ser descrita[26] pela equação

$$dy/dt = (1 - y)[x(t) + by], \qquad \text{(i)}$$

onde $x(t)$ mede o estímulo externo e b é o coeficiente de imitação.

(a) Observe que a Eq. (i) é uma equação de Riccati e que $y_1(t) = 1$ é uma solução. Use a transformação sugerida no Problema 33 e encontre a equação linear satisfeita por $v(t)$.

(b) Encontre $v(t)$ no caso em que $x(t) = at$, onde a é uma constante. Deixe sua resposta na forma de uma integral.

Algumas Equações de Segunda Ordem Especiais. Equações de segunda ordem envolvem a derivada segunda de alguma função desconhecida e têm a forma geral $y'' = f(t, y, y')$. Tais equações não podem ser resolvidas, em geral, por métodos projetados para equações de primeira ordem. No entanto, existem dois tipos de equações de segunda ordem que podem ser transformadas em equações de primeira ordem por uma mudança de variável apropriada. A equação resultante pode ser resolvida, algumas vezes, por métodos apresentados neste capítulo. Os problemas de 36 a 51 tratam de equações desse tipo.

Equações onde Falta a Variável Dependente. Para uma equação de segunda ordem da forma $y'' = f(t, y')$, a substituição $v = y'$, $v' = y''$ leva a uma equação de primeira ordem da forma $v' = f(t, v)$. Se essa equação puder ser resolvida para v, então y pode ser obtida integrando-se $dy/dt = v$. Note que uma constante arbitrária na resolução da equação de primeira ordem para v e uma segunda é introduzida na integração para y. Em cada um dos problemas de 36 a 41, use essa substituição para resolver a equação dada.

36. $t^2y'' + 2ty' - 1 = 0, \qquad t > 0$
37. $ty'' + y' = 1, \qquad t > 0$
38. $y'' + t(y')^2 = 0$
39. $2t^2y'' + (y')^3 = 2ty', \qquad t > 0$
40. $y'' + y' = e^{-t}$
41. $t^2y'' = (y')^2, \qquad t > 0$

Equações onde Falta a Variável Independente. Considere equações diferenciais da forma $y'' = f(y, y')$, na qual a variável independente t não aparece explicitamente. Se definirmos $v = y'$, obteremos $dv/dt = f(y, v)$. Como a expressão à direita do sinal de igualdade nessa equação depende de y e de v, em vez de t e v, essa equação contém variáveis demais. No entanto, se considerarmos y como sendo a variável independente, então, pela regra da cadeia, $dv/dt = (dv/dy)\,(dy/dt) = v(dv/dy)$. Portanto, a equação diferencial original pode ser escrita como $v\,(dv/dy) = f(y, v)$. Se essa equação de primeira ordem puder ser resolvida, obteremos v *como função de* y. A relação entre y e t é obtida da resolução de $dy/dt = v(y)$, que é uma equação separável. Novamente, o resultado final contém duas constantes arbitrárias. Em cada um dos problemas de 42 a 47, use esse método para resolver a equação diferencial dada.

42. $yy'' + (y')^2 = 0$
43. $y'' + y = 0$
44. $y'' + y(y')^3 = 0$
45. $2y^2y'' + 2y(y')^2 = 1$
46. $yy'' - (y')^3 = 0$
47. $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$

Sugestão: No Problema 47 a equação transformada é uma equação de Bernoulli. Veja o Problema 27 na Seção 2.4.

Em cada um dos problemas de 48 a 51, resolva o problema de valor inicial dado usando os métodos dos problemas de 36 a 47.

48. $y'y'' = 2, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
49. $y'' - 3y^2 = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4$
50. $(1 + t^2)y'' + 2ty' + 3t^{-2} = 0, \qquad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1$
51. $y'y'' - t = 0, \qquad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1$

[25]As equações de Riccati receberam esse nome em honra a Jacopo Francesco Riccati (1676-1754), um nobre natural de Veneza que não aceitou ofertas de posições em universidade da Itália, na Áustria e na Rússia para continuar seus estudos matemáticos na privacidade do seu lar. Riccati estudou essas equações extensamente; no entanto, foi Euler (em 1760) que descobriu o resultado enunciado neste problema.

[26]veja Anatol Rapoport, "Contribution to the Mathematical Theory of Mass Behavior: I. The Propagation of Single Acts", **Bulletin of Mathematical Biophysics** 14 (1952), pp. 159-169, e John Z. Hearon, "Note on the Theory of Mass Behavior", **Bulletin of Mathematical Biophysics** 17 (1955), pp. 7-13.

REFERÊNCIAS

Os dois livros mencionados na Seção 2.5 são:

Bailey, N. T. J., *The Mathematical Theory of Infectious Diseases and Its Applications* (2nd ed.) (New York: Hafner Press, 1975).

Clark, Colin W., *Mathematical Bioeconomics* (2nd ed.) (New York: Wiley-Interscience, 1990).

Uma boa introdução à dinâmica populacional em geral é:

Frauenthal, J. C., *Introduction to Population Modeling* (Boston: Birkhauser, 1980).

Uma discussão mais completa da demonstração do teorema fundamental de existência e unicidade pode ser encontrada em muitos livros mais avançados de equações diferenciais. Dois que são razoavelmente acessíveis para leitores iniciantes são:

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1961; New York: Dover, 1989).

Brauer, F., and Nohel, J., *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations* (New York: Benjamin, 1969; New York: Dover, 1989).

Um compêndio valioso de métodos de resolução de equações diferenciais é:

Zwillinger, D., *Handbook of Differential Equations* (3rd ed.) (San Diego: Academic Press, 1998).

Para discussão e exemplos adicionais de fenômenos não-lineares, incluindo bifurcação e caos, veja:

Strogtaz, Steven H., *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Reading, MA: Addison-Wesley, 1994).

Uma referência geral sobre equações de diferenças é:

Mickens, R. E., *Difference Equations, Theory and Applications* (2nd ed.) (New York: Van Nostrand Reinhold, 1990).

Um tratamento elementar de soluções caóticas de equações de diferenças pode ser encontrado em:

Devaney, R. L., *Chaos, Fractals, and Dynamics* (Reading, MA: Addison-Wesley, 1990).

CAPÍTULO 3

Equações Lineares de Segunda Ordem

Equações lineares de segunda ordem têm uma importância crucial no estudo de equações diferenciais por duas razões principais. A primeira é que equações lineares têm uma estrutura teórica rica, subjacente a diversos métodos sistemáticos de resolução. Além disso, uma parte substancial dessa estrutura e desses métodos é compreensível a um nível matemático relativamente elementar. Para apresentar as idéias fundamentais em um contexto o mais simples possível, vamos descrevê-las neste capítulo para equações de segunda ordem. Outra razão para estudar equações lineares de segunda ordem é que elas são essenciais para qualquer investigação séria das áreas clássicas da física matemática. Não se pode ir muito longe no desenvolvimento de mecânica dos fluidos, condução de calor, movimento ondulatório ou fenômenos eletromagnéticos sem esbarrar na necessidade de resolver equações diferenciais lineares de segunda ordem. Como exemplo, vamos discutir oscilações de alguns sistemas mecânicos e elétricos básicos no final deste capítulo.

3.1 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Uma equação diferencial de segunda ordem tem a forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right), \qquad (1)$$

onde f é alguma função dada. Em geral, denotaremos a variável independente por t, já que o tempo é, com freqüência, a variável independente em fenômenos físicos, mas, algumas vezes, usaremos x em seu lugar. Usaremos y ou, ocasionalmente, outra letra, para denotar a variável dependente. A Eq. (1) é dita **linear** se a função f tem a forma

$$f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = g(t) - p(t)\frac{dy}{dt} - q(t)y, \qquad (2)$$

isto é, se f é linear em y e y'. Na Eq. (2), g, p e q são funções especificadas da variável independente t, mas não dependem de y. Nesse caso, reescrevemos, em geral, a Eq. (1) como

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \qquad (3)$$

onde a linha denota diferenciação em relação a t. No lugar da Eq. (3), encontramos, com freqüência, a equação

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = G(t). \qquad (4)$$

É claro que, se $P(t) \neq 0$, podemos dividir a Eq. (4) por $P(t)$, obtendo, assim, a Eq. (3) com

$$p(t) = \frac{Q(t)}{P(t)}, \qquad q(t) = \frac{R(t)}{P(t)}, \qquad g(t) = \frac{G(t)}{P(t)}. \qquad (5)$$

Ao discutir a Eq. (3) e tentar resolvê-la, vamos nos restringir a intervalos nos quais as funções p, q e g sejam contínuas.[1]

Se a Eq. (1) não for da forma (3) ou (4), então ela é dita **não-linear**. Investigações analíticas de equações não-lineares são relativamente difíceis, de modo que teremos pouco a dizer sobre elas neste livro. Abordagens numéricas ou geométricas são, freqüentemente, mais apropriadas, e serão discutidas nos Caps. 8 e 9.

Um problema de valor inicial consiste em uma equação diferencial, como as Eqs. (1), (3) ou (4), junto com um par de condições iniciais

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y'_0, \qquad (6)$$

onde y_0 e y'_0 são números dados. Note que as condições iniciais para uma equação de segunda ordem não indicam, apenas, um ponto particular (t_0, y_0) que tem que pertencer ao gráfico da solução mas, também, o coeficiente angular y'_0 da reta tangente ao gráfico naquele ponto. É razoável esperar que sejam

[1]Fazemos um tratamento correspondente para equações lineares de ordem mais alta no Cap. 4. Se você quiser, pode ler as partes apropriadas do Cap. 4 em paralelo com o Cap. 3.

necessárias duas condições iniciais para uma equação de segunda ordem, já que, grosso modo, precisa-se de duas integrações para se encontrar a solução e cada integração introduz uma constante arbitrária. Presume-se que duas condições iniciais serão suficientes para a determinação dos valores dessas duas constantes.

Uma equação linear de segunda ordem é dita **homogênea** se a função $g(t)$ na Eq. (3), ou $G(t)$ na Eq. (4), for igual a zero para todo t. Caso contrário, a equação é dita **não-homogênea**. Em conseqüência, a função $g(t)$, ou $G(t)$, é chamada, muitas vezes, de termo não-homogêneo. Vamos começar nossa discussão com equações homogêneas, que escreveremos na forma

$$P(t)y'' \quad Q(t)y' + R(t)y = 0. \qquad (7)$$

Mais tarde, nas Seções 3.6 e 3.7, mostraremos que, uma vez resolvida a equação homogênea, sempre é possível resolver a equação não-homogênea correspondente (4) ou, pelo menos, expressar sua solução em função de uma integral. Assim, o problema de resolver a equação homogênea é o mais fundamental.

Vamos concentrar nossa atenção, neste capítulo, em equações nas quais as funções P, Q e R são constantes. Nesse caso, a Eq. (7) torna-se

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad (8)$$

onde a, b e c são constantes dadas. Acontece que a Eq. (8) sempre pode ser facilmente resolvida em termos das funções elementares do Cálculo. Por outro lado, é muito mais difícil, em geral, resolver a Eq. (7) quando os coeficientes não são constantes, e vamos adiar o tratamento desse caso até o Cap. 5.

Antes de atacar a Eq. (8), vamos adquirir alguma experiência analisando um problema simples, porém típico. Considere a equação

$$y'' - y = 0, \qquad (9)$$

que é a Eq. (8) com $a = 1$, $b = 0$ e $c = -1$. Em outras palavras, a Eq. (9) diz que procuramos uma função com a propriedade de que a derivada segunda dessa mesma função seja igual a ela mesma. Um pouco de reflexão produzirá, provavelmente, pelo menos uma função bem conhecida do Cálculo com essa propriedade, a saber, a função exponencial $y_1(t) = e^t$. Um pouco mais de reflexão poderia produzir, também, uma segunda função, $y_2(t) = e^{-t}$. Um pouco de experimentação revela que múltiplos constantes dessas duas soluções também são soluções. Por exemplo, as funções $2e^t$ e $5e^{-t}$ também satisfazem a Eq. (9), como você pode verificar calculando suas derivadas segundas. Da mesma forma, as funções $c_1y_1(t) = c_1e^t$ e $c_2y_2(t) = c_2e^{-t}$ satisfazem a equação diferencial (9) para todos os valores das constantes c_1 e c_2. A seguir, é fundamental que se note que qualquer soma de soluções da Eq. (9) também é solução. Em particular, como $c_1y_1(t)$ e $c_2y_2(t)$ são soluções da Eq. (9), a função

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} \qquad (10)$$

também o é, quaisquer que sejam os valores de c_1 e c_2. Mais uma vez, isso pode ser verificado calculando-se a derivada segunda, y'', a partir da Eq. (10). Temos $y' = c_1e^t - c_2e^{-t}$ e $y'' = c_1e^t + c_2e^{-t}$; logo, y'' é igual a y e a Eq. (9) é satisfeita.

Vamos resumir o que fizemos até agora nesse exemplo. Uma vez observado que as funções $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = e^{-t}$ são soluções da Eq. (9), segue que a combinação linear (10) dessas funções também é solução. Como os coeficientes c_1 e c_2 na Eq. (10) são arbitrários, essa expressão representa uma família infinita de soluções da equação diferencial (9).

Vamos considerar, agora, como escolher um elemento particular dessa família infinita de soluções que satisfaça, também, ao conjunto dado de condições iniciais. Por exemplo, suponha que queremos a solução da Eq. (9) que satisfaça, também, as condições iniciais

$$y(0) = 2, \qquad y'(0) = -1. \qquad (11)$$

Em outras palavras, procuramos a solução cujo gráfico contém o ponto $(0, 2)$ e tal que o coeficiente angular da tangente ao gráfico nesse ponto seja -1. Primeiro, fazemos $t = 0$ e $y = 2$ na Eq. (10); isso nos dá a equação

$$c_1 + c_2 = 2. \qquad (12)$$

A seguir, derivamos a Eq. (10), obtendo

$$y' = c_1e^t - c_2e^{-t}.$$

Depois, fazendo $t = 0$ e $y' = -1$, obtemos

$$c_1 - c_2 = -1. \qquad (13)$$

Resolvendo simultaneamente as Eqs. (12) e (13) para c_1 e c_2, encontramos

$$c_1 = \tfrac{1}{2}, \qquad c_2 = \tfrac{3}{2}. \qquad (14)$$

Finalmente, inserindo esses valores na Eq. (10), obtemos

$$y = \tfrac{1}{2}e^t + \tfrac{3}{2}e^{-t}, \qquad (15)$$

a solução do problema de valor inicial que consiste na equação diferencial (9) e nas condições iniciais (11).

Vamos voltar agora para a equação mais geral (8),

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

que tem coeficientes constantes (reais) arbitrários. Baseados em nossa experiência com a Eq. (9), vamos procurar, também, soluções exponenciais para a Eq. (8). Suponhamos, então, que $y = e^{rt}$, onde r é um parâmetro a ser determinado. Segue que $y' = re^{rt}$ e $y'' = r^2e^{rt}$. Substituindo y, y' e y'' na Eq. (8) por essas expressões, obtemos

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0,$$

ou, como $e^{rt} \neq 0$,

$$ar^2 + br + c = 0. \qquad (16)$$

A Eq. (16) é chamada de **equação característica** da equação diferencial (8). Seu significado reside no fato de que, se r é uma raiz da equação polinomial (16), então $y = e^{rt}$ é solução da equação diferencial (8). Como a Eq. (16) é uma equação de segundo grau com coeficientes reais, ela tem duas raízes que podem ser reais e distintas, reais e iguais ou complexas conjugadas. Vamos considerar o primeiro caso aqui e os dois últimos nas Seções 3.4 e 3.5.

Supondo que as raízes da equação característica (16) sejam reais e distintas, vamos denotá-las por r_1 e r_2, onde $r_1 \neq r_2$. Então, $y_1(t) = e^{r_1t}$ e $y_2(t) = e^{r_2t}$ são duas soluções da Eq. (8). Como no exemplo precedente, segue que

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} \qquad (17)$$

também é uma solução da Eq. (8). Para verificar que isso é verdade, podemos diferenciar a expressão na Eq. (17); portanto,

$$y' = c_1r_1e^{r_1t} + c_2r_2e^{r_2t} \qquad (18)$$

e

$$y'' = c_1 r_1^2 e^{r_1 t} + c_2 r_2^2 e^{r_2 t}. \quad (19)$$

Substituindo y, y' e y'' na Eq. (8) por essas expressões e rearrumando os termos, obtemos

$$ay'' + by' + cy = c_1(ar_1^2 + br_1 + c)e^{r_1 t} + c_2(ar_2^2 + br_2 + c)e^{r_2 t}. \quad (20)$$

As quantidades entre parênteses na Eq. (20) são nulas, pois r_1 e r_2 são raízes da Eq. (16); logo, y dado pela Eq. (17) é, de fato, uma solução da Eq. (8), como queríamos verificar.

Vamos supor agora que queremos encontrar o elemento particular da família de soluções (17) que satisfaz as condições iniciais (6),

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y_0'.$$

Fazendo $t = t_0$ e $y = y_0$ na Eq. (17), obtemos

$$c_1 e^{r_1 t_0} + c_2 e^{r_2 t_0} = y_0. \quad (21)$$

Analogamente, fazendo $t = t_0$ e $y' = y_0'$ na Eq. (18), temos

$$c_1 r_1 e^{r_1 t_0} + c_2 r_2 e^{r_2 t_0} = y_0'. \quad (22)$$

Resolvendo simultaneamente as Eqs. (21) e (22) para c_1 e c_2, encontramos

$$c_1 = \frac{y_0' - y_0 r_2}{r_1 - r_2} e^{-r_1 t_0}, \qquad c_2 = \frac{y_0 r_1 - y_0'}{r_1 - r_2} e^{-r_2 t_0}. \quad (23)$$

Lembre-se de que $r_1 - r_2 \neq 0$, de modo que as expressões na Eq. (23) sempre fazem sentido. Assim, não importa que condições iniciais sejam dadas — isto é, independente dos valores de t_0, y_0 e y_0' nas Eqs. (6) —, sempre é possível determinar c_1 e c_2 de modo que as condições iniciais sejam satisfeitas. Além disso, existe apenas uma escolha possível de c_1 e c_2 para cada conjunto dado de condições iniciais. Com os valores de c_1 e c_2 dados pela Eq. (23), a expressão (17) é a solução do problema de valor inicial

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'. \quad (24)$$

É possível mostrar, com base no teorema fundamental citado na próxima seção, que todas as soluções da Eq. (8) estão incluídas na expressão (17), pelo menos no caso em que as raízes da Eq. (16) são reais e distintas. Portanto, chamamos a Eq. (17) de solução geral da Eq. (8). O fato de quaisquer condições iniciais possíveis poderem ser satisfeitas pela escolha adequada das constantes na Eq. (17) torna mais plausível a idéia de que essa expressão inclui, de fato, todas as soluções da Eq. (8).

Exemplo 1

Encontre a solução geral de

$$y'' + 5y' + 6y = 0. \quad (25)$$

Vamos supor que $y = e^{rt}$; então, r tem que ser raiz da equação característica

$$r^2 + 5r + 6 = (r + 2)(r + 3) = 0.$$

Assim, os valores possíveis de r são $r_1 = -2$ e $r_2 = -3$; a solução geral da Eq. (25) é

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}. \quad (26)$$

Exemplo 2

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \qquad y(0) = 2, \; y'(0) = 3. \quad (27)$$

A solução geral da equação diferencial foi encontrada no Exemplo 1 e é dada pela Eq. (26). Para satisfazer a primeira condição inicial, fazemos $t = 0$ e $y = 2$ na Eq. (26); assim, c_1 e c_2 têm que satisfazer

$$c_1 + c_2 = 2. \quad (28)$$

Para usar a segunda condição inicial, precisamos primeiro derivar a Eq. (26). Isso nos dá $y' = -2c_1e^{-2t} - 3c_2e^{-3t}$. Fazendo, agora, $t = 0$ e $y' = 3$, obtemos

$$-2c_1 - 3c_2 = 3. \quad (29)$$

Resolvendo as Eqs. (28) e (29), vemos que $c_1 = 9$ e $c_2 = -7$. Usando esses valores na expressão (26), obtemos a solução

$$y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t} \quad (30)$$

do problema de valor inicial (27). A Fig. 3.1.1 mostra o gráfico da solução.

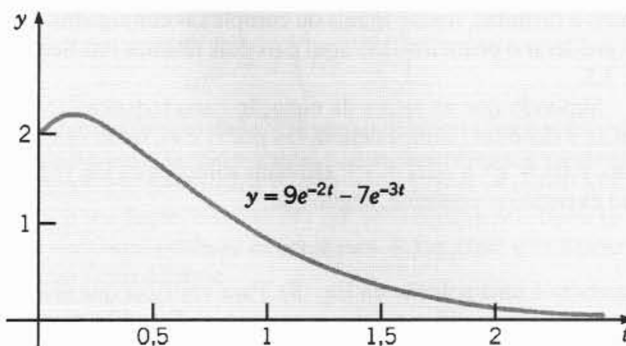


FIG. 3.1.1 Solução de $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

Exemplo 3

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$4y'' - 8y' + 3y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = \tfrac{1}{2}. \tag{31}$$

Se $y = e^{rt}$, então a equação característica é

$$4r^2 - 8r + 3 = 0$$

e suas raízes são $r = 3/2$ e $r = 1/2$. Portanto, a solução geral da equação diferencial é

$$y = c_1 e^{3t/2} + c_2 e^{t/2}. \tag{32}$$

Usando as condições iniciais, obtemos as duas equações seguintes para c_1 e c_2:

$$c_1 + c_2 = 2, \qquad \tfrac{3}{2}c_1 + \tfrac{1}{2}c_2 = \tfrac{1}{2}.$$

A solução dessas equações é $c_1 = -1/2$, $c_2 = 5/2$ e a solução do problema de valor inicial (31) é

$$y = -\tfrac{1}{2}e^{3t/2} + \tfrac{5}{2}e^{t/2}. \tag{33}$$

A Fig. 3.1.2 mostra o gráfico da solução.

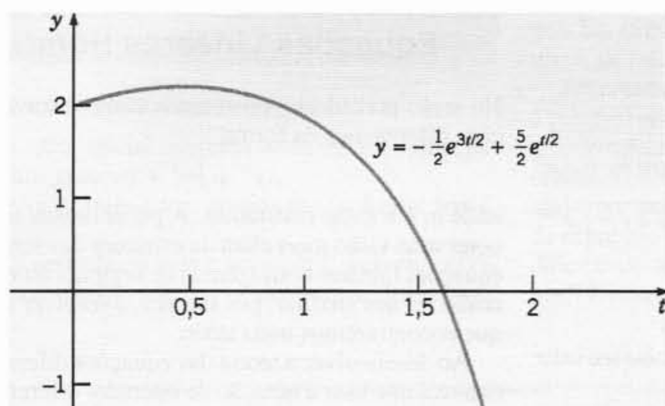


FIG. 3.1.2 Solução de $4y'' - 8y' + 3y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0{,}5$.

Exemplo 4

A solução (30) do problema de valor inicial (27) começa crescendo (já que o coeficiente angular da tangente a seu gráfico é positivo, inicialmente), mas acaba tendendo a zero (pois ambas as parcelas contêm exponenciais com expoentes negativos). Portanto, a solução tem que atingir um máximo, e o gráfico da Fig. 3.1.1 confirma isso. Determine a localização desse ponto de máximo.

Pode-se estimar as coordenadas do ponto de máximo através do gráfico mas, para encontrá-las precisamente, procuramos o ponto onde o gráfico da solução tem reta tangente horizontal. Derivando a solução (30), $y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$, em relação a t, obtemos

$$y' = -18e^{-2t} + 21e^{-3t}. \tag{34}$$

Igualando y' a zero e multiplicando por e^{3t}, encontramos o valor crítico t_c que satisfaz $e^t = 7/6$; logo

$$t_c = \ln(7/6) \cong 0{,}15415. \tag{35}$$

O valor máximo correspondente, y_M, é dado por

$$y_M = 9e^{-2t_c} - 7e^{-3t_c} = \frac{108}{49} \cong 2{,}20408. \tag{36}$$

Neste exemplo, o coeficiente angular inicial é 3, mas a solução da equação diferencial dada se comporta de maneira análoga para qualquer coeficiente angular inicial positivo. O Problema 26 pede que você determine como as coordenadas do ponto de máximo dependem do coeficiente angular inicial.

Voltando para a equação $ay'' + by' + cy = 0$ com coeficientes arbitrários, lembre-se de que, quando $r_1 \neq r_2$, sua solução geral (17) é a soma de duas funções exponenciais. Portanto, a solução tem um comportamento geométrico relativamente simples: quando t aumenta, a solução, em módulo, ou tende a zero (quando ambos os expoentes forem negativos) ou cresce rapidamente (quando pelo menos um dos expoentes for positivo). Esses dois casos aparecem nos Exemplos 2 e 3, ilustrados nas Figs. 3.1.1 e 3.1.2, respectivamente. Existe um terceiro caso menos freqüente: a solução tende a uma constante se um dos expoentes for nulo e o outro for negativo.

Nas Seções 3.4 e 3.5, respectivamente, voltaremos ao problema de resolver a equação $ay'' + by' + cy = 0$ quando as raízes da equação característica são complexos conjugados ou são reais e iguais. Antes disso, nas Seções 3.2 e 3.3, vamos fazer um estudo sistemático da estrutura matemática das soluções de todas as equações lineares de segunda ordem.

Problemas

Nos problemas de 1 a 8, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$
2. $y'' + 3y' + 2y = 0$
3. $6y'' - y' - y = 0$
4. $2y'' - 3y' + y = 0$
5. $y'' + 5y' = 0$
6. $4y'' - 9y = 0$
7. $y'' - 9y' + 9y = 0$
8. $y'' - 2y' - 2y = 0$

Nos problemas de 9 a 16, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Esboce o gráfico da solução e descreva seu comportamento quando t aumenta.

9. $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
10. $y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
11. $6y'' - 5y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0$
12. $y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 3$
13. $y'' + 5y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
14. $2y'' + y' - 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
15. $y'' + 8y' - 9y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$
16. $4y'' - y = 0, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1$
17. Encontre uma equação diferencial cuja solução geral é $y = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t}$.
18. Encontre uma equação diferencial cuja solução geral é $y = c_1e^{-t/2} + c_2e^{-2t}$.
19. Encontre a solução do problema de valor inicial
$$y'' - y = 0, \quad y(0) = \tfrac{5}{4}, \quad y'(0) = -\tfrac{3}{4}.$$
Faça o gráfico da solução para $0 \le t \le 2$ e determine seu valor mínimo.
20. Encontre a solução do problema de valor inicial
$$2y'' - 3y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \tfrac{1}{2}.$$
Depois, determine o valor máximo da solução e encontre, também, o ponto onde a solução se anula.
21. Resolva o problema de valor inicial $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = \alpha$, $y'(0) = 2$. Depois, encontre α de modo que a solução tenda a zero quando $t \to \infty$.
22. Resolva o problema de valor inicial $4y'' - y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = \beta$. Depois, encontre β de modo que a solução tenda a zero quando $t \to \infty$.

Nos Problemas 23 e 24, determine os valores de α, se existirem, para os quais todas as soluções tendem a zero quando $t \to \infty$; determine, também, os valores de α, se existirem, para os quais todas as soluções (não-nulas) tornam-se ilimitadas quando $t \to \infty$.

23. $y'' - (2\alpha - 1)y' + \alpha(\alpha - 1)y = 0$
24. $y'' + (3 - \alpha)y' - 2(\alpha - 1)y = 0$
25. Considere o problema de valor inicial
$$2y'' + 3y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\beta,$$
onde $\beta > 0$.
(a) Resolva o problema de valor inicial.
(b) Faça o gráfico da solução quando $\beta = 1$. Encontre as coordenadas (t_0, y_0) do ponto de mínimo da solução nesse caso.
(c) Encontre o menor valor de β para o qual a solução não tem ponto de mínimo.
26. Considere o problema de valor inicial (veja o Exemplo 4)
$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \beta,$$
onde $\beta > 0$.
(a) Resolva o problema de valor inicial.
(b) Determine as coordenadas t_m e y_m do ponto de máximo da solução como funções de β.
(c) Determine o menor valor de β para o qual $y_m \ge 4$.
(d) Determine o comportamento de t_m e y_m quando $\beta \to \infty$.
27. Considere a equação $ay'' + by' + cy = d$, onde a, b, c e d são constantes.
(a) Encontre todas as soluções de equilíbrio, ou soluções constantes, dessa equação diferencial.
(b) Denote por y_e uma solução de equilíbrio e seja $Y = y - y_e$. Logo Y é o desvio de uma solução y de uma solução de equilíbrio. Encontre a equação diferencial satisfeita por Y.
28. Considere a equação $ay' + by' + cy = 0$, onde a, b e c são constantes com $a > 0$. Encontre condições sobre a, b e c para que as raízes da equação característica sejam:
(a) reais, diferentes e negativas;
(b) reais com sinais opostos;
(c) reais, diferentes e positivas.

3.2 Soluções Fundamentais de Equações Lineares Homogêneas

Na seção precedente, mostramos como resolver algumas equações diferenciais da forma
$$ay'' + by' + cy = 0,$$
onde a, b e c são constantes. A partir desses resultados, vamos obter uma visão mais clara da estrutura das soluções de todas as equações lineares homogêneas de segunda ordem. Essa compreensão irá nos auxiliar, por sua vez, a resolver outros problemas que encontraremos mais tarde.

Ao desenvolver a teoria das equações diferenciais lineares, é conveniente usar a notação de operador diferencial. Sejam p e q funções contínuas em um intervalo aberto I, isto é, para $\alpha < t < \beta$. Os casos $\alpha = -\infty$ e/ou $\beta = +\infty$ estão incluídos. Então, para qualquer função ϕ duas vezes diferenciável em I, definimos o operador diferencial L pela fórmula
$$L[\phi] = \phi'' + p\phi' + q\phi. \qquad (1)$$
Note que $L[\phi]$ é uma função em I. O valor de $L[\phi]$ em um ponto t é
$$L[\phi](t) = \phi''(t) + p(t)\phi'(t) + q(t)\phi(t).$$
Por exemplo, se $p(t) = t^2$, $q(t) = 1 + t$ e $\phi(t) = \text{sen}\, 3t$, então
$$L[\phi](t) = (\text{sen}\,3t)'' + t^2(\text{sen}\,3t)' + (1 + t)\,\text{sen}\,3t$$
$$= -9\,\text{sen}\,3t + 3t^2\cos 3t + (1 + t)\,\text{sen}\,3t.$$
O operador L é, muitas vezes, escrito na forma $L = D^2 + pD + q$, onde D é o operador derivada.

Vamos estudar, nesta seção, a equação linear homogênea de segunda ordem $L[\phi](t) = 0$. Como é costume usar o símbolo y para denotar $\phi(t)$, escreveremos, normalmente, essa equação na forma
$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \qquad (2)$$
Associamos à Eq. (2) um conjunto de condições iniciais,
$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y_0', \qquad (3)$$
onde t_0 é qualquer ponto no intervalo I, e y_0 e y_0' são números reais dados. Gostaríamos de saber se o problema de valor inicial (2), (3) sempre tem solução e se pode ter mais de uma solução. Gostaríamos, também, de saber se é possível dizer alguma coisa sobre a forma e a estrutura das soluções que possa ajudar a resolver problemas específicos. As respostas a essas questões estão contidas nos teoremas desta seção.

O resultado teórico fundamental para problemas de valor inicial para equações lineares de segunda ordem está enunciado no Teorema 3.2.1, que é análogo ao Teorema 2.4.1 para equações de primeira ordem. Como o resultado é igual para equações não-homogêneas, o teorema está enunciado nessa forma mais geral.

Teorema 3.2.1

Considere o problema de valor inicial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t),$$
$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0', \tag{4}$$

onde p, q e g são contínuas em um intervalo aberto I. Então, existe exatamente uma solução $y = \phi(t)$ desse problema, e a solução existe em todo o intervalo I.

Enfatizamos que o teorema diz três coisas:

1. O problema de valor inicial *tem* uma solução; em outras palavras, *existe* uma solução.
2. O problema de valor inicial tem *apenas* uma solução; isto é, a solução é *única*.
3. A solução ϕ está definida *em todo o intervalo I*, onde os coeficientes são contínuos e onde é, pelo menos, duas vezes diferenciável.

Para alguns problemas, algumas dessas afirmações são fáceis de provar. Por exemplo, vimos na Seção 3.1 que o problema de valor inicial

$$y'' - y = 0, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = -1 \tag{5}$$

tem a solução

$$y = \tfrac{1}{2}e^t + \tfrac{3}{2}e^{-t}. \tag{6}$$

O fato de encontrarmos uma solução certamente estabelece que existe uma solução para esse problema de valor inicial. Além disso, a solução (6) é duas vezes diferenciável, na verdade diferenciável um número qualquer de vezes, em todo o intervalo $(-\infty, \infty)$, onde os coeficientes na equação diferencial são contínuos. Por outro lado, não é óbvio, e é mais difícil provar, que o problema de valor inicial (5) não tem outras soluções além da dada pela Eq. (6). Não obstante, o Teorema 3.2.1 afirma que essa solução é, de fato, a única solução do problema de valor inicial (5).

No entanto, para a maior parte dos problemas da forma (4), não é possível escrever uma expressão útil para a solução. Essa é uma grande diferença entre equações lineares de primeira e de segunda ordens. Portanto, todas as partes do teorema têm que ser demonstradas por métodos gerais, que não envolvem a obtenção desse tipo de expressão. A demonstração do Teorema 3.2.1 é razoavelmente difícil e não será discutida aqui.[2] Aceitaremos, entretanto, o Teorema 3.2.1 como verdadeiro e o utilizaremos sempre que necessário.

Exemplo 1

Encontre o maior intervalo no qual a solução do problema de valor inicial

$$(t^2 - 3t)y'' + ty' - (t+3)y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1$$

certamente existe.

Se a equação diferencial dada for colocada na forma (4), então $p(t) = 1/(t-3)$, $q(t) = -(t+3)/t(t-3)$ e $g(t) = 0$. Os únicos pontos de descontinuidade dos coeficientes são $t = 0$ e $t = 3$. Logo, o maior intervalo, contendo o ponto inicial $t = 1$, no qual todos os coeficientes são contínuos é $0 < t < 3$. Portanto, esse é o maior intervalo no qual o Teorema 3.2.1 garante que a solução existe.

Exemplo 2

Encontre a única solução do problema de valor inicial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \qquad y(t_0) = 0, \qquad y'(t_0) = 0,$$

onde p e q são contínuas em um intervalo aberto I contendo t_0.

A função $y = \phi(t) = 0$ para todo t certamente satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais. Pela parte referente à unicidade no Teorema 3.2.1, essa é a única solução do problema dado.

Vamos supor, agora, que y_1 e y_2 são duas soluções da Eq. (2); em outras palavras,

$$L[y_1] = y_1'' + py_1' + qy_1 = 0, \tag{7}$$

e analogamente para y_2. Então, como nos exemplos na Seção 3.1, podemos gerar mais soluções formando as combinações lineares de y_1 e y_2. Enunciamos esse resultado como um teorema.

Teorema 3.2.2

(Princípio da Superposição) Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial (2),

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

então a combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2.

[2] Uma demonstração do Teorema 3.2.1 pode ser encontrada, por exemplo, no Cap. 6, Seção 8, do livro de autoria de Coddington, listado nas referências ao final deste capítulo.

Quando c_1 ou c_2 é igual a zero, temos um caso particular do Teorema 3.2.2. Podemos concluir, então, que qualquer múltiplo de uma solução da Eq. (2) também é solução.

Para provar o Teorema 3.2.2, precisamos apenas substituir y na Eq. (2) pela expressão

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t). \tag{8}$$

O resultado é

$$\begin{aligned} L[c_1y_1 + c_2y_2] &= [c_1y_1 + c_2y_2]'' + p[c_1y_1 + c_2y_2]' \\ &\quad + q[c_1y_1 + c_2y_2] \\ &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + c_1py_1' + c_2py_2' + c_1qy_1 \\ &\quad + c_2qy_2 \\ &= c_1[y_1'' + py_1' + qy_1] + c_2[y_2'' + py_2' + qy_2] \\ &= c_1L[y_1] + c_2L[y_2]. \end{aligned}$$

Como $L[y_1] = 0$ e $L[y_2] = 0$, segue que $L[c_1y_1 + c_2y_2] = 0$. Portanto, independentemente dos valores de c_1 e c_2, y dado pela Eq. (8) satisfaz a equação diferencial (2), e a demonstração do Teorema 3.2.2 está completa.

O Teorema 3.2.2 diz que, começando com apenas duas soluções da Eq. (2), podemos construir uma família duplamente infinita de soluções definida pela Eq. (8). A próxima pergunta é se todas as soluções da Eq. (2) estão incluídas na Eq. (8) ou se podem existir soluções com formas diferentes. Começamos a estudar essa questão examinando se as constantes c_1 e c_2 na Eq. (8) podem ser escolhidas de modo que a solução satisfaça as condições iniciais (3). Essas condições iniciais obrigam c_1 e c_2 a satisfazerem as equações

$$\begin{aligned} c_1y_1(t_0) + c_2y_2(t_0) &= y_0, \\ c_1y_1'(t_0) + c_2y_2'(t_0) &= y_0'. \end{aligned} \tag{9}$$

Resolvendo as Eqs. (9) para c_1 e c_2, encontramos

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{y_0y_2'(t_0) - y_0'y_2(t_0)}{y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)}, \\ c_2 &= \frac{-y_0y_1'(t_0) + y_0'y_1(t_0)}{y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0)}, \end{aligned} \tag{10}$$

ou, em termos de determinantes,

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_0' & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_1'(t_0) & y_0' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}. \tag{11}$$

Com esses valores para c_1 e c_2, a expressão (8) satisfaz as condições iniciais (3), assim como a equação diferencial (2).

Para que as fórmulas para c_1 e c_2 nas Eqs. (10) ou (11) façam sentido, é preciso que os denominadores sejam diferentes de zero. Ambas as expressões para c_1 e c_2 têm o mesmo denominador, a saber, o determinante

$$W = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0). \tag{12}$$

O determinante W é chamado **determinante wronskiano**,[3] ou, simplesmente, **wronskiano**, das soluções y_1 e y_2. Usamos, algumas vezes, a notação completa $W(y_1, y_2)(t_0)$ para a expressão mais à direita na Eq. (12) enfatizando, desse modo, o fato de que o wronskiano depende das funções y_1 e y_2, e que é calculado no ponto t_0. O argumento precedente estabelece o seguinte resultado.

Teorema 3.2.3

Suponha que y_1 e y_2 são duas soluções da Eq. (2),

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

e que o wronskiano

$$W = y_1y_2' - y_1'y_2$$

não se anula no ponto t_0, onde são dadas as condições iniciais (3)

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y_0'.$$

Então, existe uma escolha das constantes c_1 e c_2 para as quais $y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ satisfaz a equação diferencial (2) e as condições iniciais (3).

Exemplo 3

No Exemplo 1 da Seção 3.1, vimos que $y_1(t) = e^{-2t}$ e $y_2(t) = e^{-3t}$ são soluções da equação diferencial

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Encontre o wronskiano de y_1 e y_2.

O wronskiano dessas duas funções é

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \end{vmatrix} = -e^{-5t}.$$

Como W é diferente de zero para todos os valores de t, as funções y_1 e y_2 podem ser usadas para se construir soluções da equação diferencial dada junto com quaisquer condições iniciais prescritas para qualquer valor de t. Um desses problemas de valor inicial foi resolvido no Exemplo 2 da Seção 3.1.

[3] Os determinantes wronskianos recebem esse nome devido a Jósef Maria Hoëné-Wronski (1776-1853), que nasceu na Polônia, mas viveu a maior parte da sua vida na França. Wronski era um homem talentoso, mas complicado, e sua vida foi marcada por disputas acaloradas freqüentes com outros indivíduos e instituições.

O próximo teorema justifica a expressão "solução geral" introduzida na Seção 3.1 para a combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$.

Teorema 3.2.4

Se y_1 e y_2 são duas soluções da equação diferencial (2),

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

e se existe um ponto t_0 onde o wronskiano de y_1 e y_2 é diferente de zero, então a família de soluções

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

com coeficientes arbitrários c_1 e c_2 inclui todas as soluções da Eq. (2).

Seja ϕ uma solução qualquer da Eq. (2). Para provar o Teorema 3.2.4, precisamos mostrar que ϕ está incluída no conjunto de combinações lineares $c_1y_1 + c_2y_2$; isto é, para alguma escolha das constantes c_1 e c_2, a combinação linear é igual a ϕ. Seja t_0 um ponto onde o wronskiano de y_1 e y_2 é diferente de zero. Calcule ϕ e ϕ' nesse ponto e chame esses valores de y_0 e y_0', respectivamente; assim,

$$y_0 = \phi(t_0), \qquad y_0' = \phi'(t_0).$$

A seguir, considere o problema de valor inicial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'. \quad (13)$$

A função ϕ é, certamente, solução desse problema de valor inicial. Por outro lado, como $W(y_1, y_2)(t_0)$ é diferente de zero, é possível (pelo Teorema 3.2.3) escolher c_1 e c_2 tais que $y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ também é solução do problema de valor inicial (13). De fato, os valores apropriados de c_1 e c_2 são dados pelas Eqs. (10) ou (11). A parte relativa à unicidade no Teorema 3.2.1 garante que essas duas soluções do mesmo problema de valor inicial são iguais; assim, para uma escolha apropriada de c_1 e c_2,

$$\phi(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t),$$

e, portanto, ϕ está incluída na família de funções $c_1y_1 + c_2y_2$. Finalmente, como ϕ é uma solução *arbitrária* da Eq. (2), segue que *toda* solução dessa equação está incluída nessa família. Isso completa a demonstração do Teorema 3.2.4.

O Teorema 3.2.4 diz que, enquanto o wronskiano de y_1 e y_2 não for identicamente nulo, a combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$ contém todas as soluções da Eq. (2). É, portanto, natural (e já o fizemos na seção precedente) chamar a expressão

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

com coeficientes constantes arbitrários de **solução geral** da Eq. (2). As soluções y_1 e y_2, com wronskiano não-nulo, formam um **conjunto fundamental de soluções** da Eq. (2).

Podemos escrever o resultado do Teorema 3.2.4 em linguagem ligeiramente diferente: para encontrar a solução geral e, portanto, todas as soluções, de uma equação da forma (2), precisamos, apenas, achar duas soluções da equação dada com wronskiano diferente de zero. Fizemos precisamente isso em diversos exemplos na Seção 3.1, embora não tenhamos calculado aí os wronskianos. Você deveria voltar e fazer isso, verificando, assim, que todas as soluções que chamamos de "solução geral" na Seção 3.1 satisfazem, de fato, a condição necessária sobre o wronskiano. De outro modo, os exemplos a seguir incluem todos os mencionados na Seção 3.1, assim como muitos outros problemas semelhantes.

Exemplo 4

Suponha que $y_1(t) = e^{r_1t}$ e $y_2(t) = e^{r_2t}$ são duas soluções de uma equação da forma (2). Mostre que elas formam um conjunto fundamental de soluções se $r_1 \neq r_2$.

Vamos calcular o wronskiano de y_1 e y_2:

$$W = \begin{vmatrix} e^{r_1t} & e^{r_2t} \\ r_1e^{r_1t} & r_2e^{r_2t} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)\exp[(r_1 + r_2)t].$$

Como a função exponencial nunca se anula e como estamos supondo que $r_2 - r_1 \neq 0$, segue que W é diferente de zero para todo valor de t. Logo, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções.

Exemplo 5

Mostre que $y_1(t) = t^{1/2}$ e $y_2(t) = t^{-1}$ formam um conjunto fundamental de soluções da equação

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \qquad t > 0. \qquad (14)$$

Vamos mostrar, na Seção 5.5, como resolver a Eq. (14); veja, também, o Problema 38 na Seção 3.4. No entanto, neste estágio, podemos verificar por substituição direta que y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial. Como $y_1'(t) = (1/2)t^{-1/2}$ e $y_1''(t) = -(1/4)t^{-3/2}$, temos

$$2t^2(-\tfrac{1}{4}t^{-3/2}) + 3t(\tfrac{1}{2}t^{-1/2}) - t^{1/2} = (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} - 1)t^{1/2} = 0.$$

Analogamente, $y_2'(t) = -t^{-2}$ e $y_2''(t) = 2t^{-3}$, logo

$$2t^2(2t^{-3}) + 3t(-t^{-2}) - t^{-1} = (4 - 3 - 1)t^{-1} = 0.$$

A seguir, vamos calcular o wronskiano de y_1 e y_2:

$$W = \begin{vmatrix} t^{1/2} & t^{-1} \\ \frac{1}{2}t^{-1/2} & -t^{-2} \end{vmatrix} = -\tfrac{3}{2}t^{-3/2}. \qquad (15)$$

Como $W \neq 0$ para $t > 0$, concluímos que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções.

Fomos capazes de encontrar, em diversos casos, um conjunto fundamental de soluções e, portanto, a solução geral de uma equação diferencial dada. No entanto, isso é, muitas vezes, uma tarefa difícil e uma pergunta natural é se uma equação diferencial da forma (2) sempre tem um conjunto fundamental de soluções. O teorema a seguir nos dá uma resposta afirmativa a essa pergunta.

Teorema 3.2.5

Considere a equação diferencial (2),

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

cujos coeficientes p e q são contínuos em algum intervalo aberto I. Escolha algum ponto t_0 em I. Seja y_1 a solução da Eq. (2) que satisfaz, também, as condições iniciais

$$y(t_0) = 1, \qquad y'(t_0) = 0,$$

e seja y_2 a solução da Eq. (2) que satisfaz as condições iniciais

$$y(t_0) = 0, \qquad y'(t_0) = 1.$$

Então y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções.

Observe, em primeiro lugar, que a *existência* das funções y_1 e y_2 é garantida pelo Teorema 3.2.1. Para mostrar que elas formam um conjunto fundamental de soluções, precisamos, apenas, calcular seu wronskiano em t_0:

$$W(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Como seu wronskiano não é nulo em t_0, as funções y_1 e y_2 formam, de fato, um conjunto fundamental de soluções, completando, assim, a demonstração do Teorema 3.2.5.

Note que a parte que poderia ser mais difícil dessa demonstração, mostrar a existência de um par de soluções, é obtida invocando-se o Teorema 3.2.1. Note, também, que o Teorema 3.2.5 não fala nada sobre como resolver os problemas de valor inicial especificados, de modo a encontrar as soluções y_1 e y_2 indicadas no teorema. Não obstante, pode ser confortador saber que sempre existe um conjunto fundamental de soluções.

Exemplo 6

Encontre o conjunto fundamental de soluções especificado pelo Teorema 3.2.5 para a equação diferencial

$$y'' - y = 0, \tag{16}$$

usando o ponto inicial $t_0 = 0$.

Vimos, na Seção 3.1, que duas soluções da Eq. (16) são $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = e^{-t}$. O wronskiano dessas soluções é $W(y_1, y_2)(t) = -2 \neq 0$, logo elas formam um conjunto fundamental de soluções. Não são, no entanto, o conjunto fundamental de soluções indicado no Teorema 3.2.5, já que não satisfazem as condições iniciais mencionadas nesse teorema no ponto $t = 0$.

Para encontrar o conjunto fundamental de soluções especificado no teorema, precisamos achar as soluções que satisfazem as condições iniciais apropriadas. Vamos denotar por $y_3(t)$ a solução da Eq. (16) que satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0. \tag{17}$$

A solução geral da Eq. (16) é

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \tag{18}$$

e as condições iniciais (17) são satisfeitas se $c_1 = 1/2$ e $c_2 = 1/2$. Assim,

$$y_3(t) = \tfrac{1}{2}e^t + \tfrac{1}{2}e^{-t} = \cosh t.$$

Analogamente, se $y_4(t)$ satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1, \tag{19}$$

então

$$y_4(t) = \tfrac{1}{2}e^t - \tfrac{1}{2}e^{-t} = \operatorname{senh} t.$$

Como o wronskiano de y_3 e y_4 é

$$W(y_3, y_4)(t) = \cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1,$$

essas funções também formam um conjunto fundamental de soluções, como enunciado no Teorema 3.2.5. Portanto, a solução geral da Eq. (16) pode ser escrita como

$$y = k_1 \cosh t + k_2 \operatorname{senh} t, \tag{20}$$

assim como na forma (18). Usamos k_1 e k_2 para as constantes arbitrárias na Eq. (20) porque não são as mesmas constantes c_1 e c_2 da Eq. (18). Um dos objetivos deste exemplo é tornar claro que uma equação diferencial dada tem mais de um conjunto fundamental de soluções; de fato, tem uma infinidade deles. Como regra, você deve escolher o conjunto mais conveniente.

Podemos resumir a discussão desta seção da seguinte maneira: para encontrar a solução geral da equação diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \qquad \alpha < t < \beta,$$

precisamos, primeiro, encontrar duas soluções y_1 e y_2 que satisfazem a equação diferencial em $\alpha < t < \beta$. Depois, precisamos nos certificar de que existe um ponto no intervalo onde o wronskiano de y_1 e y_2 não se anula. Nessas circunstâncias, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções e a solução geral é

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Se as condições iniciais são dadas em um ponto em $\alpha < t < \beta$ onde $W \neq 0$, então c_1 e c_2 podem ser escolhidos de modo que as condições iniciais sejam satisfeitas.

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, encontre o wronskiano do par de funções dado.

1. e^{2t}, $e^{-3t/2}$
2. $\cos t$, $\operatorname{sen} t$
3. e^{-2t}, te^{-2t}
4. x, xe^x
5. $e^t \operatorname{sen} t$, $e^t \cos t$
6. $\cos^2 \theta$, $1 + \cos 2\theta$

Nos problemas de 7 a 12, determine o maior intervalo no qual o problema de valor inicial dado certamente tem uma única solução duas vezes diferenciável. Não tente encontrar a solução.

7. $ty'' + 3y = t$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$
8. $(t-1)y'' - 3ty' + 4y = \operatorname{sen} t$, $y(-2) = 2$, $y'(-2) = 1$
9. $t(t-4)y'' + 3ty' + 4y = 2$, $y(3) = 0$, $y'(3) = -1$
10. $y'' + (\cos t)y' + 3(\ln|t|)y = 0$, $y(2) = 3$, $y'(2) = 1$
11. $(x-3)y'' + xy' + (\ln|x|)y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$
12. $(x-2)y'' + y' + (x-2)(\operatorname{tg} x)y = 0$, $y(3) = 1$, $y'(3) = 2$
13. Verifique que $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = t^{-1}$ são duas soluções da equação diferencial $t^2y'' - 2y = 0$ para $t > 0$. Depois mostre que $c_1t^2 + c_2t^{-1}$ também é solução dessa equação quaisquer que sejam c_1 e c_2.
14. Verifique que $y_1(t) = 1$ e $y_2(t) = t^{1/2}$ são soluções da equação diferencial $yy'' + (y')^2 = 0$ para $t > 0$. Depois mostre que $c_1 + c_2t^{1/2}$ não é, em geral, solução dessa equação. Explique por que esse resultado não contradiz o Teorema 3.2.2.
15. Mostre que, se $y = \phi(t)$ é uma solução da equação diferencial $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$, onde $g(t)$ não é identicamente nula, então $y = c\phi(t)$, onde c é qualquer constante diferente de 1, não é solução. Explique por que esse resultado não contradiz a observação após o Teorema 3.2.2.
16. A função $y = \operatorname{sen}(t^2)$ pode ser solução de uma equação da forma $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, com coeficientes constantes, em um intervalo contendo $t = 0$? Explique sua resposta.
17. Se o wronskiano de f e g é $3e^{4t}$, e se $f(t) = e^{2t}$, encontre $g(t)$.
18. Se o wronskiano de f e g é t^2e^t, e se $f(t) = t$, encontre $g(t)$.
19. Se $W(f, g)$ é o wronskiano de f e g, e se $u = 2f - g$, $v = f + 2g$, encontre o wronskiano $W(u, v)$ de u e v em função de $W(f, g)$.
20. Se o wronskiano de f e g é $t \cos t - \operatorname{sen} t$ e se $u = f + 3g$, $v = f - g$, encontre o wronskiano de u e v.

Nos Problemas 21 e 22, encontre o conjunto fundamental de soluções especificado pelo Teorema 3.2.5 para a equação diferencial e os pontos iniciais dados.

21. $y'' + y' - 2y = 0$, $t_0 = 0$
22. $y'' + 4y' + 3y = 0$, $t_0 = 1$

Nos problemas de 23 a 26, verifique que as soluções y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial dada. Elas constituem um conjunto fundamental de soluções?

23. $y'' + 4y = 0$; $y_1(t) = \cos 2t$, $y_2(t) = \operatorname{sen} 2t$
24. $y'' - 2y' + y = 0$; $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = te^t$
25. $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$, $x > 0$; $y_1(x) = x$, $y_2(x) = xe^x$
26. $(1 - x\cot x)y'' - xy' + y = 0$, $0 < x < \pi$; $y_1(x) = x$, $y_2(x) = \operatorname{sen} x$
27. Considere a equação $y'' - y' - 2y = 0$.

    (a) Mostre que $y_1(t) = e^{-t}$ e $y_2(t) = e^{2t}$ formam um conjunto fumdamental de soluções.

    (b) Sejam $y_3(t) = -2e^{2t}$, $y_4(t) = y_1(t) + 2y_2(t)$ e $y_5(t) = 2y_1(t) - 2y_3(t)$. $y_3(t)$, $y_4(t)$ e $y_5(t)$ também são soluções da equação diferencial?

    (c) Determine se cada par a seguir forma um conjunto fundamental de soluções: $[y_1(t), y_3(t)]$; $[y_2(t), y_3(t)]$; $[y_1(t), y_4(t)]$; $[y_4(t), y_5(t)]$.
28. **Equações Exatas.** A equação $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ é dita exata se puder ser escrita na forma $[P(x)y']' + [f(x)y]' = 0$, onde $f(x)$ pode ser determinada em função de $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$. Essa última equação pode ser integrada uma vez imediatamente, resultando em uma equação de primeira ordem para y que pode ser resolvida como na Seção 2.1. Igualando os coeficientes das equações precedentes e eliminando $f(x)$, mostre que uma condição necessária para que a equação seja exata é que $P''(x) - Q'(x) + R(x) = 0$. Pode-se mostrar que essa condição também é suficiente.

Nos problemas de 29 a 32, use o resultado do Problema 28 para determinar se a equação dada é exata. Se for, resolva-a.

29. $y'' + xy' + y = 0$
30. $y'' + 3x^2y' + xy = 0$
31. $xy'' - (\cos x)y' + (\operatorname{sen} x)y = 0$, $x > 0$
32. $x^2y'' + xy' - y = 0$, $x > 0$
33. **A Equação Adjunta.** Se uma equação linear homogênea de segunda ordem não é exata, pode ser tornada exata multiplicando-se por um fator integrante apropriado $\mu(x)$. Precisamos, então, que $\mu(x)$ seja tal que $\mu(x)P(x)y'' + \mu(x)Q(x)y' + \mu(x)R(x)y = 0$ pode ser escrita na forma $[\mu(x)P(x)y']' + [f(x)y]' = 0$. Igualando os coeficientes nessas duas equações e eliminando $f(x)$, mostre que a função μ precisa satisfazer

$$P\mu'' + (2P' - Q)\mu' + (P'' - Q' + R)\mu = 0.$$

Essa equação é conhecida como a adjunta da equação original e é importante na teoria avançada de equações diferenciais. Em geral, o problema de resolver a equação diferencial adjunta é tão difícil quanto o de resolver a equação original, de modo que só é possível encontrar um fator integrante para uma equação de segunda ordem ocasionalmente.

Nos problemas de 34 a 36, use o resultado do Problema 33 para encontrar a adjunta da equação diferencial dada.

34. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, equação de Bessel
35. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$, equação de Legendre
36. $y'' - xy = 0$, equação de Airy
37. Para a equação linear de segunda ordem $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$, mostre que a adjunta da equação adjunta é a equação original.
38. Uma equação linear de segunda ordem $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ é dita auto-adjunta se sua adjunta é igual à equação original. Mostre que uma condição necessária para essa equação ser auto-adjunta é que $P'(x) = Q(x)$. Determine se cada uma das equações nos problemas de 34 a 36 é auto-adjunta.

3.3 Independência Linear e o Wronskiano

Nesta seção vamos relacionar as idéias de uma solução geral e um conjunto fundamental de soluções de uma equação diferencial linear ao conceito de independência linear, que é central ao estudo de álgebra linear. Essa relação entre equações diferenciais

e álgebra linear é mais significativa para equações de ordem maior e para sistemas de equações, mas a explicaremos aqui primeiro em um contexto mais simples. Os resultados apresentados aqui irão reaparecer em formas mais gerais nas Seções 4.1 e 7.4.

Vamos lembrar a seguinte propriedade básica de sistemas de equações algébricas lineares. Considere o sistema dois por dois

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

e seja $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ o determinante da matriz dos coeficientes. Então $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ é a única solução do sistema (1) se, e somente se, $\Delta \neq 0$. Além disso, o sistema (1) tem soluções não-nulas se, e somente se, $\Delta = 0$.

Duas funções f e g são ditas **linearmente dependentes** em um intervalo I se existem duas constantes k_1 e k_2, com uma delas diferente de zero, tais que

$$k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0 \tag{2}$$

para todo t em I. As funções f e g são ditas **linearmente independentes** em um intervalo I se não forem linearmente dependentes nesse intervalo, isto é, a Eq. (2) só é válida para todo t em I se $k_1 = k_2 = 0$. Estenderemos essas definições, na Seção 4.1, para um número arbitrário de funções. Embora possa ser difícil determinar se um conjunto grande de funções é linearmente independente ou linearmente dependente, é fácil responder essa pergunta, em geral, para um conjunto com apenas duas funções: ele é linearmente dependente se as funções forem proporcionais e linearmente independente caso contrário. Os exemplos a seguir ilustram essas definições.

Exemplo 1

Determine se as funções sen t e $\cos(t - \pi/2)$ são linearmente independentes ou linearmente dependentes em um intervalo arbitrário.

As funções dadas são linearmente dependentes em qualquer intervalo, já que

$$k_1 \operatorname{sen} t + k_2 \cos(t - \pi/2) = 0$$

para todo t se escolhermos $k_1 = 1$ e $k_2 = -1$.

Exemplo 2

Mostre que as funções e^t e e^{2t} são linearmente independentes em qualquer intervalo.

Para estabelecer esse resultado, vamos supor que

$$k_1 e^t + k_2 e^{2t} = 0 \tag{3}$$

para todo t no intervalo; precisamos mostrar, então, que $k_1 = k_2 = 0$. Escolha dois pontos t_0 e t_1 no intervalo, onde $t_0 \neq t_1$. Colocando esses valores na Eq. (3), obtemos

$$\begin{aligned} k_1 e^{t_0} + k_2 e^{2t_0} &= 0, \\ k_1 e^{t_1} + k_2 e^{2t_1} &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

O determinante da matriz dos coeficientes é

$$e^{t_0}e^{2t_1} - e^{2t_0}e^{t_1} = e^{t_0}e^{t_1}(e^{t_1} - e^{t_0}).$$

Como esse determinante é diferente de zero, segue que a única solução da Eq. (4) é $k_1 = k_2 = 0$. Logo, e^t e e^{2t} são linearmente independentes.

O teorema a seguir relaciona independência e dependência linear ao wronskiano.

Teorema 3.3.1

Se f e g são funções diferenciáveis em um intervalo aberto I e se $W(f, g)(t_0) \neq 0$ em algum ponto t_0 em I, então f e g são linearmente independentes em I. Além disso, se f e g são linearmente dependentes em I, então $W(f, g)(t) = 0$ para todo t em I.

Para provar a primeira parte do Teorema 3.3.1, considere uma combinação linear $k_1f(t) + k_2g(t)$ e suponha que essa expressão é igual a zero em todo o intervalo. Calculando a expressão e sua derivada em t_0, temos

$$\begin{aligned} k_1 f(t_0) + k_2 g(t_0) &= 0, \\ k_1 f'(t_0) + k_2 g'(t_0) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

O determinante da matriz dos coeficientes do sistema (5) é precisamente $W(f, g)(t_0)$, que é diferente de zero por hipótese. Portanto, a única solução das Eqs. (5) é $k_1 = k_2 = 0$, de modo que f e g são linearmente independentes.

A segunda parte do Teorema 3.3.1 segue imediatamente da primeira. De fato, suponha que f e g são linearmente dependentes e suponha que a conclusão é falsa — isto é, $W(f, g)$ não é identicamente nulo em I. Então, existe um ponto t_0 tal que $W(f, g)(t_0) \neq 0$; pela primeira parte do Teorema 3.3.1, isso implica que f e g são linearmente independentes, uma contradição, o que completa a demonstração.

Podemos aplicar esse resultado às duas funções $f(t) = e^t$ e $g(t) = e^{2t}$ discutidas no Exemplo 2. Para qualquer ponto t_0, temos

$$W(f, g)(t_0) = \begin{vmatrix} e^{t_0} & e^{2t_0} \\ e^{t_0} & 2e^{2t_0} \end{vmatrix} = e^{3t_0} \neq 0. \tag{6}$$

portanto, as funções e^t e e^{2t} são linearmente independentes em qualquer intervalo I.

Você deve tomar cuidado para não ler mais do que o Teorema 3.3.1 diz. Em particular, duas funções *f* e *g* podem ser linearmente independentes mesmo quando $W(f, g)(t) = 0$ para todo t em I. Isso está ilustrado no Problema 28.

Vamos agora examinar outras propriedades do wronskiano de duas soluções de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem. O teorema a seguir, talvez de maneira surpreendente, fornece uma fórmula explícita simples para o wronskiano de duas soluções quaisquer de tais equações, mesmo que as soluções não sejam conhecidas.

Teorema 3.3.2

(Teorema de Abel)[4] Se y_1 e y_2 são duas soluções da equação diferencial

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{7}$$

onde p e q são funções contínuas em um intervalo aberto I, então o wronskiano $W(y_1, y_2)(t)$ é dado por

$$W(y_1, y_2)(t) = c\exp\left[-\int p(t)\,dt\right], \tag{8}$$

onde c é uma constante determinada que depende de y_1 e y_2, mas não de t. Além disso, $W(y_1, y_2)(t)$ ou é zero para todo t em I (se $c = 0$) ou nunca se anula em I (se $c \neq 0$).

Para provar o teorema de Abel, começamos observando que y_1 e y_2 satisfazem

$$\begin{aligned} y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 &= 0, \\ y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2 &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Multiplicando a primeira equação por $-y_2$, multiplicando a segunda por y_1 e somando as equações resultantes, obtemos

$$(y_1y_2'' - y_1''y_2) + p(t)(y_1y_2' - y_1'y_2) = 0. \tag{10}$$

A seguir, seja $W(t) = W(y_1, y_2)(t)$ e note que

$$W' = y_1y_2'' - y_1''y_2. \tag{11}$$

Então, podemos escrever a Eq. (10) na forma

$$W' + p(t)W = 0. \tag{12}$$

A Eq. (12) pode ser resolvida imediatamente, já que é tanto uma equação linear de primeira ordem (Seção 2.1) quanto uma equação separável (Seção 2.2). Logo,

$$W(t) = c\exp\left[-\int p(t)\,dt\right], \tag{13}$$

onde c é uma constante. O valor de c depende do par de soluções da Eq. (7) envolvido. No entanto, como a função exponencial nunca se anula, $W(t)$ não é zero, a menos que $c = 0$ e, nesse caso, $W(t)$ é zero para todo t, o que completa a demonstração do Teorema 3.3.2.

Note que o wronskiano de dois conjuntos fundamentais de soluções da mesma equação diferencial pode diferir apenas por uma constante multiplicativa e que o wronskiano de qualquer conjunto fundamental de soluções pode ser determinado, a menos de uma constante multiplicativa, sem resolver a equação diferencial.

Exemplo 3

No Exemplo 5 da Seção 3.2, verificamos que $y_1(t) = t^{1/2}$ e $y_2(t) = t^{-1}$ são soluções da equação

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \qquad t > 0. \tag{14}$$

Verifique que o wronskiano de y_1 e y_2 é dado pela Eq. (13).

Do exemplo mencionado, sabemos que $W(y_1, y_2)(t) = -(3/2)t^{-3/2}$. Para usar a Eq. (13), precisamos escrever a equação diferencial (14) na forma padrão, com o coeficiente de y'' igual a 1. Obtemos, então,

$$y'' + \frac{3}{2t}y' - \frac{1}{2t^2}y = 0,$$

de modo que $p(t) = 3/2t$. Portanto,

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(t) &= c\exp\left[-\int \frac{3}{2t}\,dt\right] = c\exp\left(-\frac{3}{2}\ln t\right) \\ &= c\,t^{-3/2}. \end{aligned} \tag{15}$$

A Eq. (15) nos dá o wronskiano de qualquer par de soluções da Eq. (14). Para as soluções particulares dadas neste exemplo, precisamos escolher $c = -3/2$.

---

[4] O resultado no Teorema 3.3.2 foi obtido pelo matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829) em 1827 e é conhecido como fórmula de Abel. Abel mostrou, também, que não existe fórmula geral para resolver uma equação polinomial de quinto grau em termos de operações algébricas explícitas sobre os coeficientes, resolvendo, assim, uma pergunta em aberto desde o século XVI. Suas maiores contribuições, no entanto, foram em análise, particularmente no estudo de funções elípticas. Infelizmente, seu trabalho permaneceu pouco conhecido até após sua morte. O importante matemático francês Legendre disse que sua contribuição era "um monumento mais duradouro do que bronze".

Uma versão mais forte do Teorema 3.3.1 pode ser estabelecida se as duas funções envolvidas forem soluções de uma equação diferencial linear homogênea de segunda ordem.

Teorema 3.3.3

Seja y_1 e y_2 soluções da Eq. (7),

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

onde p e q são contínuas em um intervalo aberto I. Então y_1 e y_2 são linearmente dependentes em I se, e somente se, $W(y_1, y_2)(t)$ é zero para todo t em I. De outro modo, y_1 e y_2 são linearmente independentes em I se, e somente se, $W(y_1, y_2)(t)$ nunca se anula em I.

É claro que já sabemos, pelo Teorema 3.3.2, que $W(y_1, y_2)(t)$ ou é identicamente nulo ou nunca se anula em I. Ao provar o Teorema 3.3.3, observe, em primeiro lugar, que, se y_1 e y_2 são linearmente dependentes, então $W(y_1, y_2)(t)$ é zero para todo t em I pelo Teorema 3.3.1. Falta provar a recíproca, isto é, se $W(y_1, y_2)(t)$ é zero para todo t em I, então y_1 e y_2 são linearmente independentes. Seja t_0 qualquer ponto em I; então, por hipótese, $W(y_1, y_2)(t_0) = 0$. Em conseqüência, o sistema de equações

$$\begin{aligned} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) &= 0, \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

para c_1 e c_2 tem uma solução não-trivial. Usando esses valores para c_1 e c_2, seja $\phi(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$. Então ϕ é uma solução da Eq. (7) e, pelas Eqs. (16), ϕ também satisfaz as condições iniciais

$$\phi(t_0) = 0, \qquad \phi'(t_0) = 0. \tag{17}$$

Portanto, pela parte referente à unicidade no Teorema 3.2.1, ou pelo Exemplo 2 da Seção 3.2, $\phi(t) = 0$ para todo t em I. Como $\phi(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$, com uma das constantes c_1 e c_2 não-nula, isso significa que y_1 e y_2 são linearmente dependentes. A outra afirmação do teorema segue imediatamente.

Podemos resumir, agora, os fatos sobre conjuntos fundamentais de soluções, wronskianos e independência linear da seguinte maneira. Sejam y_1 e y_2 soluções da Eq. (7),

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

onde p e q são contínuas em um intervalo aberto I. Então, as quatro afirmações a seguir são equivalentes, no sentido que cada uma delas implica as outras três:

1. As funções y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções em I.
2. As funções y_1 e y_2 são linearmente independentes.
3. $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$ para algum t_0 em I.
4. $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ para todo t em I.

É interessante observar a semelhança entre equações diferenciais lineares homogêneas de segunda ordem e álgebra vetorial bidimensional. Dois vetores **a** e **b** são ditos linearmente dependentes se existem escalares k_1 e k_2, um deles não-nulo, tais que $k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b} = \mathbf{0}$; caso contrário, eles são ditos linearmente independentes. Sejam **i** e **j** os vetores unitários com direções e sentidos dos eixos positivos de x e y, respectivamente. Como $k_1\mathbf{i} + k_2\mathbf{j} = \mathbf{0}$ apenas quando $k_1 = k_2 = 0$, os vetores **i** e **j** são linearmente independentes. Além disso, sabemos que qualquer vetor **a**, com componentes a_1 e a_2, pode ser escrito como $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, isto é, como combinação linear dos dois vetores linearmente independentes **i** e **j**. Não é difícil mostrar que qualquer vetor de dimensão dois pode ser expresso como combinação linear de dois vetores quaisquer de dimensão dois linearmente independentes (veja o Problema 14). Esse par de vetores linearmente independentes forma uma base para o espaço vetorial dos vetores de dimensão dois.

A expressão **espaço vetorial** também é aplicada a outras coleções de objetos matemáticos que obedecem às mesmas leis de soma e multiplicação por escalar que os vetores geométricos. Por exemplo, pode-se mostrar que o conjunto de funções duas vezes diferenciável em um intervalo I forma um espaço vetorial. Analogamente, o conjunto de funções V satisfazendo a Eq. (7) também forma um espaço vetorial.

Como todos os elementos de V podem ser expressos como uma combinação linear de dois elementos linearmente independentes y_1 e y_2, dizemos que esse par forma uma base para V. Isso nos leva à conclusão de que V tem dimensão dois; portanto, é análogo, em muitos aspectos, ao espaço de vetores geométricos em um plano. Veremos, mais tarde, que o conjunto de soluções de uma equação diferencial linear homogênea de ordem n forma um espaço vetorial de dimensão n e que qualquer conjunto de n soluções linearmente independentes da equação diferencial forma uma base para o espaço. Essa conexão entre equações diferenciais e vetores constitui uma boa razão para se estudar álgebra linear abstrata.

Problemas

Nos problemas de 1 a 8, determine se o par de funções dadas é linearmente independente ou linearmente dependente.

1. $f(t) = t^2 + 5t, \quad g(t) = t^2 - 5t$
2. $f(\theta) = \cos 2\theta - 2\cos^2\theta, \quad g(\theta) = \cos 2\theta + 2\,\mathrm{sen}^2\,\theta$
3. $f(t) = e^{\lambda t}\cos \mu t, \quad g(t) = e^{\lambda t}\,\mathrm{sen}\,\mu t, \quad \mu \neq 0$
4. $f(x) = e^{3x}, \quad g(x) = e^{3(x-1)}$
5. $f(t) = 3t - 5, \quad g(t) = 9t - 15$
6. $f(t) = t, \quad g(t) = t^{-1}$
7. $f(t) = 3t, \quad g(t) = |t|$
8. $f(x) = x^3, \quad g(x) = |x|^3$
9. O wronskiano de duas funções é $W(t) = t\,\mathrm{sen}^2\,t$. As funções são linearmente independentes ou linearmente dependentes? Por quê?
10. O wronskiano de duas funções é $W(t) = t^2 - 4$. As funções são linearmente independentes ou linearmente dependentes? Por quê?
11. Se as funções y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, prove que c_1y_1 e c_2y_2 são, também, soluções linearmente independentes, desde que nem c_1 nem c_2 sejam nulos.
12. Se as funções y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, prove que $y_3 = y_1 + y_2$ e $y_4 = y_1 - y_2$ também formam um conjunto linearmente independente de soluções. Reciprocamente, se y_3 e y_4 são soluções linearmente independentes da equação diferencial, mostre que y_1 e y_2 também o são.
13. Se y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, determine sob que condições as funções $y_3 = a_1y_1 + a_2y_2$ e $y_4 = b_1y_1 + b_2y_2$ formam, também, um conjunto linearmente independente de soluções.

14. (a) Prove que qualquer vetor de dimensão dois pode ser escrito como uma combinação linear de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{i} - \mathbf{j}$.
(b) Prove que, se os vetores $\mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j}$ e $\mathbf{y} = y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$ são linearmente independentes, então qualquer vetor $\mathbf{z} = z_1\mathbf{i} + z_2\mathbf{j}$ pode ser escrito como uma combinação linear de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Note que, se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são linearmente independentes, então $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$. Por quê?

Nos problemas de 15 a 18, encontre o wronskiano de duas soluções da equação diferencial dada sem resolver a equação.

15. $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$
16. $(\cos t)y'' + (\text{sen}\,t)y' - ty = 0$
17. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, equação de Bessel
18. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$, equação de Legendre
19. Mostre que se p é diferenciável e $p(t) > 0$, então o wronskiano $W(t)$ de duas soluções de $[p(t)y']' + q(t)y = 0$ é $W(t) = c/p(t)$, onde c é uma constante.
20. Se y_1 e y_2 são duas soluções linearmente independentes de $ty'' + 2y' + te^ty = 0$ e se $W(y_1, y_2)(1) = 2$, encontre o valor de $W(y_1, y_2)(5)$.
21. Se y_1 e y_2 são duas soluções linearmente independentes de $t^2y'' - 2y' + (3 + t)y = 0$ e se $W(y_1, y_2)(2) = 3$, encontre o valor de $W(y_1, y_2)(4)$.
22. Se o wronskiano de duas soluções quaisquer de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ é constante, o que isso implica sobre os coeficientes p e q?
23. Se f, g e h são funções diferenciáveis, mostre que $W(fg, fh) = f^2W(g, h)$.

Nos problemas de 24 a 26, suponha que p e q são contínuas e que as funções y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ em um intervalo aberto I.

24. Prove que, se y_1 e y_2 se anulam no mesmo ponto em I, então não podem formar um conjunto fundamental de soluções nesse intervalo.
25. Prove que, se y_1 e y_2 atingem máximo ou mínimo em um mesmo ponto em I, então não podem formar um conjunto fundamental de soluções nesse intervalo.
26. Prove que, se y_1 e y_2 têm um ponto de inflexão comum t_0 em I, então não podem formar um conjunto fundamental de soluções nesse intervalo.
27. Mostre que t e t^2 são linearmente independentes em $-1 < t < 1$; de fato, são linearmente independentes em qualquer intervalo. Mostre, também, que $W(t, t^2)$ é zero em $t = 0$. O que você pode concluir sobre a possibilidade de t e t^2 serem soluções de uma equação diferencial da forma $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$? Verifique que t e t^2 são soluções da equação $t^2y'' - 2ty' + 2y = 0$. Isso contradiz sua conclusão? O comportamento do wronskiano de t e t^2 contradiz o Teorema 3.3.2?
28. Mostre que as funções $f(t) = t^2|t|$ e $g(t) = t^3$ são linearmente dependentes em $0 < t < 1$ e em $-1 < t < 0$, mas são linearmente independentes em $-1 < t < 1$. Embora f e g sejam linearmente independentes nesse intervalo, mostre que $W(f, g)$ é zero para todo t em $-1 < t < 1$. Logo, f e g não podem ser soluções de uma equação do tipo $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ com p e q contínuas em $-1 < t < 1$.

3.4 Raízes Complexas da Equação Característica

Vamos continuar nossa discussão da equação

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{1}$$

onde a, b e c são números reais dados. Vimos, na Seção 3.1, que, se procurarmos soluções da forma $y = e^{rt}$, então r tem que ser raiz da equação característica

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{2}$$

Se as raízes r_1 e r_2 são reais e distintas, o que ocorre sempre que o discriminante $b^2 - 4ac$ for positivo, então a solução geral da Eq. (1) é

$$y = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}. \tag{3}$$

Suponha, agora, que $b^2 - 4ac$ é negativo. Então, as raízes da Eq. (2) são números complexos conjugados; vamos denotá-los por

$$r_1 = \lambda + i\mu, \qquad r_2 = \lambda - i\mu, \tag{4}$$

onde λ e μ são reais. As expressões correspondentes para y são

$$y_1(t) = \exp[(\lambda + i\mu)t], \qquad y_2(t) = \exp[(\lambda - i\mu)t]. \tag{5}$$

Nossa primeira tarefa é explorar o significado dessas expressões, o que envolve o cálculo de uma função exponencial com expoente complexo. Por exemplo, se $\lambda = -1$, $\mu = 2$ e $t = 3$, então, da Eq. (5),

$$y_1(3) = e^{-3+6i}. \tag{6}$$

O que significa elevar o número e a uma potência complexa? A resposta é dada por uma relação importante conhecida como fórmula de Euler.

Fórmula de Euler. Para atribuir significado às expressões nas Eqs. (5), precisamos definir a função exponencial complexa. É claro que queremos que a definição se reduza à função exponencial real habitual quando o expoente for real. Existem várias maneiras de se obter essa extensão da função exponencial. Vamos usar aqui um método baseado em séries infinitas; um método alternativo é esquematizado no Problema 28.

Lembre-se do cálculo que a série de Taylor para e^t em torno de $t = 0$ é

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, \qquad -\infty < t < \infty. \tag{7}$$

Se supusermos que podemos substituir t por it na Eq. (7), teremos

$$\begin{aligned} e^{it} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2n-1}}{(2n-1)!}, \end{aligned} \tag{8}$$

onde separamos a soma em suas partes real e imaginária, usando o fato de que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = i$ e assim por diante. A primeira série na Eq. (8) é precisamente a série de Taylor para $\cos t$ em torno de $t = 0$, e a segunda é a série de Taylor para $\text{sen}\, t$ em $t = 0$. Temos, então,

$$e^{it} = \cos t + i\,\text{sen}\, t. \tag{9}$$

A Eq. (9) é conhecida como fórmula de Euler e é uma relação matemática extremamente importante. Embora nossa dedução da Eq. (9) esteja baseada na hipótese não verificada de que a série (7) pode ser usada para números complexos da mesma forma que para números reais da variável independente, nossa intenção é usar essa dedução apenas para tornar a Eq. (9) mais plausível. Vamos colocar as coisas em uma fundação sólida agora adotando a Eq. (9) como *definição* de e^{it}. Em outras palavras, sempre que escrevermos e^{it}, queremos dizer a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (9).

Existem alguns variantes da fórmula de Euler que vale a pena notar. Substituindo t por $-t$ na Eq. (9) e lembrando que $\cos(-t) = \cos t$ e $\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$, temos

$$e^{-it} = \cos t - i \operatorname{sen} t. \tag{10}$$

Além disso, se t for substituído por μt na Eq. (9), então obtemos uma versão generalizada da fórmula de Euler, a saber,

$$e^{i\mu t} = \cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t. \tag{11}$$

A seguir, queremos estender a definição de exponencial complexa para expoentes complexos arbitrários da forma $(\lambda + i\mu)t$. Como queremos que as propriedades usuais da função exponencial continuem válidas para expoentes complexos, queremos, certamente, que $\exp[(\lambda + i\mu)t]$ satisfaça

$$e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t} e^{i\mu t}. \tag{12}$$

Usando, então, a Eq. (11), obtemos

$$\begin{aligned} e^{(\lambda+i\mu)t} &= e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t) \\ &= e^{\lambda t} \cos \mu t + i e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t. \end{aligned} \tag{13}$$

Tomamos agora a Eq. (13) como a definição de $\exp[(\lambda + i\mu)t]$. O valor da função exponencial com coeficiente complexo é um número complexo cujas partes real e imaginária são dadas pelas expressões à direita do sinal de igualdade na Eq. (13). Note que as partes real e imaginária de $\exp[(\lambda + i\mu)t]$ são escritas inteiramente em termos de funções elementares reais. Por exemplo, a quantidade na Eq. (6) tem o valor

$$e^{-3+6i} = e^{-3} \cos 6 + i e^{-3} \operatorname{sen} 6 \cong 0{,}0478041 - 0{,}0139113i.$$

Com as definições (9) e (13), é fácil mostrar que as regras usuais de exponenciação são válidas para a função exponencial complexa. Também é fácil verificar que a fórmula de diferenciação

$$\frac{d}{dt}(e^{rt}) = re^{rt} \tag{14}$$

é válida para valores complexos de r.

Soluções Reais. As funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$, dadas pelas Eqs. (5) e como o significado expresso pela Eq. (13), são soluções da Eq. (1) quando as raízes da equação característica (2) são números complexos $\lambda \pm i\mu$. Infelizmente, as soluções y_1 e y_2 são funções que têm valores complexos, ao passo que, em geral, preferiríamos ter soluções reais, se possível, já que a própria equação diferencial só tem coeficientes reais. Tais soluções podem ser encontradas como conseqüência do Teorema 3.2.2, que diz que, se y_1 e y_2 são soluções da Eq. (1), então qualquer combinação linear de y_1 e y_2 também é solução. Em particular, vamos formar a soma e a diferença de y_1 e y_2. Temos

$$\begin{aligned} y_1(t) + y_2(t) &= e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t) \\ &\quad + e^{\lambda t}(\cos \mu t - i \operatorname{sen} \mu t) \\ &= 2e^{\lambda t} \cos \mu t \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_1(t) - y_2(t) &= e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t) - e^{\lambda t}(\cos \mu t - i \operatorname{sen} \mu t) \\ &= 2ie^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t. \end{aligned}$$

Logo, desprezando os fatores constantes 2 e $2i$, respectivamente, obtivemos um par de soluções reais,

$$u(t) = e^{\lambda t} \cos \mu t, \qquad v(t) = e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t. \tag{15}$$

Note que u e v são, simplesmente, as partes real e imaginária, respectivamente, de y_1.

Por um cálculo direto, você pode mostrar que o wronskiano de u e v é

$$W(u, v)(t) = \mu e^{2\lambda t}. \tag{16}$$

Portanto, desde que $\mu \neq 0$, o wronskiano W não é nulo, de modo que u e v formam um conjunto fundamental de soluções. (É claro que, se $\mu = 0$, então as raízes são reais e distintas e a discussão nesta seção não se aplica.) Em conseqüência, se as raízes da equação característica são números complexos $\lambda \pm i\mu$, com $\mu \neq 0$, então a solução geral da Eq. (1) é

$$y = c_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + c_2 e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t, \tag{17}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Note que a solução (17) pode ser escrita tão logo sejam conhecidos os valores de λ e μ.

Exemplo 1

Encontre a solução geral de

$$y'' + y' + y = 0. \tag{18}$$

A equação característica é

$$r^2 + r + 1 = 0,$$

e suas raízes são

$$r = \frac{-1 \pm (1-4)^{1/2}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, $\lambda = -1/2$ e $\mu = \sqrt{3}/2$, de modo que a solução geral da Eq. (18) é

$$y = c_1 e^{-t/2} \cos(\sqrt{3}t/2) + c_2 e^{-t/2} \operatorname{sen}(\sqrt{3}t/2). \tag{19}$$

Exemplo 2

Encontre a solução geral de

$$y'' + 9y = 0. \tag{20}$$

A equação característica é $r^2 + 9 = 0$, com raízes $r = \pm 3i$; logo $\lambda = 0$ e $\mu = 3$. A solução geral é

$$y = c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t; \tag{21}$$

note que, se a parte real das raízes é zero, como neste exemplo, então a solução não tem fator exponencial.

Exemplo 3

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$16y'' - 8y' + 145y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1. \tag{22}$$

A equação característica é $16r^2 - 8r + 145 = 0$ e suas raízes são $r = 1/4 \pm 3i$. Portanto, a solução geral da equação diferencial é

$$y = c_1 e^{t/4} \cos 3t + c_2 e^{t/4} \operatorname{sen} 3t. \tag{23}$$

Para usar a primeira condição inicial, fazemos $t = 0$ na Eq. (23); isso nos dá

$$y(0) = c_1 = -2.$$

Para a segunda condição inicial, precisamos derivar a Eq. (23) e depois fazer $t = 0$. Desse modo, encontramos

$$y'(0) = \tfrac{1}{4}c_1 + 3c_2 = 1,$$

donde $c_2 = 1/2$. Usando os valores encontrados de c_1 e c_2 na Eq. (23), obtemos

$$y = -2e^{t/4} \cos 3t + \tfrac{1}{2}e^{t/4} \operatorname{sen} 3t \tag{24}$$

como solução do problema de valor inicial (22).

Vamos discutir as propriedades de soluções como essas de maneira mais completa na Seção 3.8, de modo que seremos bastante breves aqui. Cada uma das soluções u e v nas Eqs. (15) representam uma oscilação, devido aos fatores trigonométricos e, também, ou crescem ou decaem exponencialmente, dependendo do sinal de λ (a menos que $\lambda = 0$). No Exemplo 1, temos $\lambda = -1/2 < 0$, de modo que as soluções são oscilações que diminuem. O gráfico de uma solução típica da Eq. (18) está ilustrado na Fig. 3.4.1. Por outro lado, $\lambda = 1/4 > 0$ no Exemplo 3, de modo que as soluções da Eq. (22) são oscilações que aumentam. O gráfico da solução (24) do problema de valor inicial dado está ilustrado na Fig. 3.4.2. O caso intermediário é ilustrado pelo Exemplo 2 no qual $\lambda = 0$. Nesse caso, a solução nem aumenta nem diminui exponencialmente, mas em vez disso, oscila todo o tempo; uma solução típica da Eq. (20) aparece na Fig. 3.4.3.

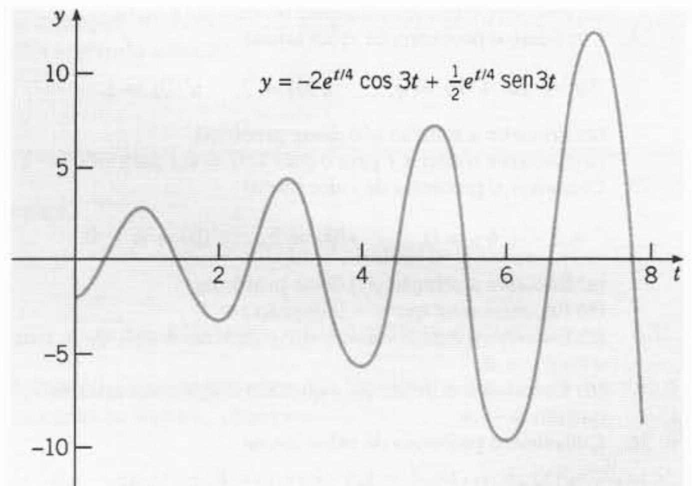


FIG. 3.4.2 Solução de $16y'' - 8y' + 145y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$.

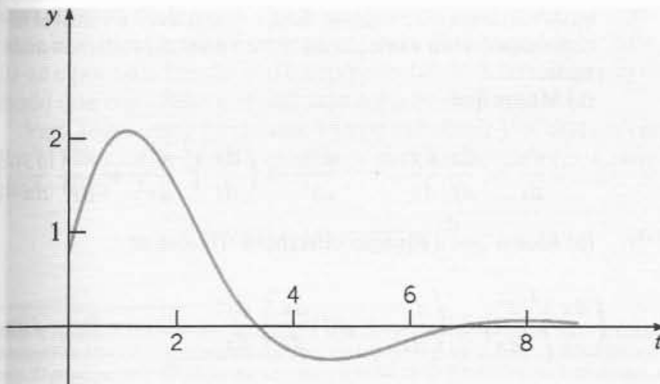


FIG. 3.4.1 Uma solução típica de $y'' + y' + y = 0$.

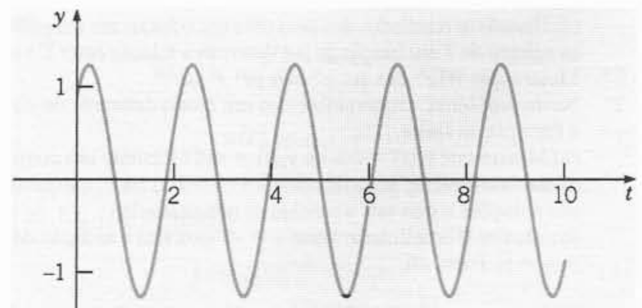


FIG. 3.4.3 Uma solução típica de $y'' + 9y = 0$.

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, use a fórmula de Euler para escrever a expressão dada na forma $a + ib$.

1. $\exp(1 + 2i)$
2. $\exp(2 - 3i)$
3. $e^{i\pi}$
4. $e^{2-(\pi/2)i}$
5. 2^{1-i}
6. π^{-1+2i}

Nos problemas de 7 a 16, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

7. $y'' - 2y' + 2y = 0$
8. $y'' - 2y' + 6y = 0$
9. $y'' + 2y' - 8y = 0$
10. $y'' + 2y' + 2y = 0$
11. $y'' + 6y' + 13y = 0$
12. $4y'' + 9y = 0$
13. $y'' + 2y' + 1{,}25y = 0$
14. $9y'' + 9y' - 4y = 0$
15. $y'' + y' + 1{,}25y = 0$
16. $y'' + 4y' + 6{,}25y = 0$

Nos problemas de 17 a 22, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Esboce o gráfico da solução e descreva seu comportamento para valores cada vez maiores de t.

17. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
18. $y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
19. $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(\pi/2) = 0, \quad y'(\pi/2) = 2$
20. $y'' + y = 0, \quad y(\pi/3) = 2, \quad y'(\pi/3) = -4$
21. $y'' + y' + 1{,}25y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$
22. $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(\pi/4) = 2, \quad y'(\pi/4) = -2$
23. Considere o problema de valor inicial

$$3u'' - u' + 2u = 0, \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = 0.$$

(a) Encontre a solução $u(t)$ desse problema.
(b) Encontre o primeiro instante no qual $|u(t)| = 10$.

24. Considere o problema de valor inicial

$$5u'' + 2u' + 7u = 0, \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = 1.$$

(a) Encontre a solução $u(t)$ desse problema.
(b) Encontre o menor T para o qual $|u(t)| \leq 0{,}1$ para todo $t > T$.

25. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + 2y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \alpha \geq 0.$$

(a) Encontre a solução $y(t)$ desse problema.
(b) Encontre α tal que $y = 0$ quando $t = 1$.
(c) Encontre o menor valor positivo de t, em função de α, para o qual $y = 0$.
(d) Determine o limite da expressão encontrada no item (c) quando $\alpha \to \infty$.

26. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + 2ay' + (a^2 + 1)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

(a) Encontre a solução $y(t)$ desse problema.
(b) Para $a = 1$, encontre o menor T para o qual $|y(t)| < 0{,}1$ para $t > T$.
(c) Repita o item (b) para $a = 1/4$, $1/2$ e 2.
(d) Usando os resultados dos itens (b) e (c), coloque em um gráfico os valores de T em função de a e descreva a relação entre T e a.

27. Mostre que $W(e^{\lambda t}\cos\mu t, e^{\lambda t}\operatorname{sen}\mu t) = \mu e^{2\lambda t}$.
28. Neste problema, esquematizamos um modo diferente de obter a fórmula de Euler.
(a) Mostre que $y_1(t) = \cos t$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} t$ formam um conjunto fundamental de soluções de $y'' + y = 0$; isto é, mostre que são soluções e que seu wronskiano não se anula.
(b) Mostre (formalmente) que $y = e^{it}$ também é solução de $y'' + y = 0$. Portanto,

$$e^{it} = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \qquad \text{(i)}$$

para constantes c_1 e c_2 apropriadas. Por que isso é válido?
(c) Faça $t = 0$ na Eq. (i) para mostrar que $c_1 = 1$.
(d) Supondo que a Eq. (14) é válida, derive a Eq. (i) e depois faça $t = 0$ para mostrar que $c_2 = i$. Use os valores de c_1 e c_2 na Eq. (i) para chegar à fórmula de Euler.

29. Usando a fórmula de Euler, mostre que

$$\cos t = (e^{it} + e^{-it})/2, \qquad \operatorname{sen} t = (e^{it} - e^{-it})/2i.$$

30. Se e^{rt} é dado pela Eq. (13), mostre que $e^{(r_1+r_2)t} = e^{r_1 t}e^{r_2 t}$ quaisquer que sejam os números complexos r_1 e r_2.
31. Se e^{rt} é dado pela Eq. (13), mostre que

$$\frac{d}{dt}e^{rt} = re^{rt}$$

para qualquer número complexo r.

32. Suponha que as funções reais p e q são contínuas em um intervalo aberto I e seja $y = \phi(t) = u(t) + iv(t)$ uma solução complexa de

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \qquad \text{(i)}$$

onde u e v são funções reais. Mostre que u e v são, também, soluções da Eq. (i). *Sugestão*: Substitua y por $\phi(t)$ na Eq. (i) e separe em partes real e imaginária.

33. Se as funções y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, mostre que entre dois zeros consecutivos de y_1 existe um, e apenas um, zero de y_2. Note que esse comportamento é ilustrado pelas soluções $y_1 = \cos t$ e $y_2 = \operatorname{sen} t$ da equação $y'' + y = 0$.
Sugestão: Suponha que t_1 e t_2 são dois zeros de y_1 entre os quais não há zeros e y_2. Aplique o teorema de Rolle a y_1/y_2 para chegar a uma contradição.

Mudança de Variáveis. Muitas vezes, uma equação diferencial com coeficientes variáveis,

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \qquad \text{(i)}$$

pode ser colocada de uma maneira mais adequada para resolvê-la através de uma mudança das variáveis independente e/ou dependente. Vamos explorar essas idéias nos problemas de 34 a 42. Em particular, no Problema 34 determinamos condições sob as quais a Eq. (i) pode ser transformada em uma equação diferencial com coeficientes constantes, tornando-se, assim, facilmente solúvel. Os problemas de 35 a 42 fornecem aplicações específicas desse procedimento.

34. Neste problema vamos determinar condições sobre p e q que permitam que a Eq. (i) seja transformada em uma equação diferencial com coeficientes constantes através de uma mudança da variável independente. Seja $x = u(t)$ a nova variável independente, com a relação entre x e t a ser especificada mais tarde.
(a) Mostre que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dx}.$$

(b) Mostre que a equação diferencial (i) torna-se

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt}\right)\frac{dy}{dx} + q(t)y = 0. \qquad \text{(ii)}$$

(c) Para que a Eq. (ii) tenha coeficientes constantes, é preciso que os coeficientes de d^2y/dx^2 e de y sejam proporcionais. Se

$q(t) > 0$, então podemos escolher a constante de proporcionalidade como sendo 1; logo,

$$x = u(t) = \int [q(t)]^{1/2}\, dt. \qquad \text{(iii)}$$

(d) Com x escolhido como no item (c), mostre que o coeficiente de dy/dx na Eq. (ii) também é constante, desde que a expressão

$$\frac{q'(t) + 2p(t)q(t)}{2[q(t)]^{3/2}} \qquad \text{(iv)}$$

seja constante. Assim, a Eq. (i) pode ser transformada em uma equação com coeficientes constantes através de uma mudança da variável independente, desde que a função $(q' + 2pq)/q^{3/2}$ seja constante. Como esse resultado pode ser modificado se $q(t) < 0$?

Nos problemas de 35 a 37, tente transformar a equação dada em uma com coeficientes constantes pelo método do Problema 34. Se isso for possível, encontre a solução geral da equação dada.

35. $y'' + ty' + e^{-t^2}y = 0, \quad -\infty < t < \infty$
36. $y'' + 3ty' + t^2y = 0, \quad -\infty < t < \infty$
37. $ty'' + (t^2 - 1)y' + t^3y = 0, \quad 0 < t < \infty$
38. **Equações de Euler.** Uma equação da forma

$$t^2y'' + \alpha ty' + \beta y = 0, \qquad t > 0,$$

onde α e β são constantes reais, é chamada uma equação de Euler. Mostre que a substituição $x = \ln t$ transforma uma equação de Euler em uma equação com coeficientes constantes. Equações de Euler são discutidas em detalhe na Seção 5.5.

Nos problemas de 39 a 42, use o resultado do Problema 38 para resolver a equação dada para $t > 0$.

39. $t^2y'' + ty' + y = 0$
40. $t^2y'' + 4ty' + 2y = 0$
41. $t^2y'' + 3ty' + 1{,}25y = 0$
42. $t^2y'' - 4ty' - 6y = 0$

3.5 Raízes Repetidas; Redução de Ordem

Em seções anteriores, mostramos como resolver a equação

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (1)$$

quando as raízes da equação característica

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (2)$$

são reais e distintas ou complexas conjugadas. Vamos considerar agora a terceira possibilidade, a saber, quando as duas raízes r_1 e r_2 são iguais. Esse caso corresponde à transição entre os outros dois e ocorre quando o discriminante $b^2 - 4ac$ é zero. Então, segue da fórmula para as soluções de uma equação do segundo grau que

$$r_1 = r_2 = -b/2a. \qquad (3)$$

A dificuldade é imediatamente aparente: ambas as raízes geram a mesma solução

$$y_1(t) = e^{-bt/2a} \qquad (4)$$

da equação diferencial (1), e não é nada óbvio como encontrar uma segunda solução.

Exemplo 1

Resolva a equação diferencial

$$y'' + 4y' + 4y = 0. \qquad (5)$$

A equação característica é

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0,$$

de modo que $r_1 = r_2 = -2$. Portanto, uma solução da Eq. (5), é $y_1(t) = e^{-2t}$. Para encontrar a solução geral da Eq. (5), precisamos de uma segunda solução que não seja múltiplo de y_1. Essa segunda solução pode ser encontrada de diversas maneiras (veja os problemas de 20 a 22); usaremos aqui um método descoberto por D'Alembert[5] no século XVIII. Lembre-se que, como $y_1(t)$ é uma solução da Eq. (1), $cy_1(t)$ também o é para qualquer constante c. A idéia básica é generalizar essa observação substituindo-se c por uma função $v(t)$ e depois tentando determinar $v(t)$ de modo que o produto $v(t)y_1(t)$ seja solução da Eq. (1).

Para seguir esse programa, vamos substituir $y = v(t)y_1(t)$ na Eq. (1) e usar a equação resultante para encontrar $v(t)$. Começando com

$$y = v(t)y_1(t) = v(t)e^{-2t}, \qquad (6)$$

temos

$$y' = v'(t)e^{-2t} - 2v(t)e^{-2t} \qquad (7)$$

e

$$y'' = v''(t)e^{-2t} - 4v'(t)e^{-2t} + 4v(t)e^{-2t}. \qquad (8)$$

Substituindo as expressões nas Eqs. (6), (7) e (8) na Eq. (5) e juntando os termos, obtemos

$$[v''(t) - 4v'(t) + 4v(t) + 4v'(t) - 8v(t) + 4v(t)]e^{-2t} = 0,$$

que pode ser simplificada para

$$v''(t) = 0. \qquad (9)$$

Logo,

$$v'(t) = c_1$$

e

$$v(t) = c_1t + c_2, \qquad (10)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Finalmente, substituindo $v(t)$ na Eq. (6), obtemos

$$y = c_1te^{-2t} + c_2e^{-2t}. \qquad (11)$$

A segunda parcela na Eq. (11) corresponde à solução original $y_1(t) = \exp(-2t)$, mas a primeira parcela corresponde a uma segunda

[5] Jean d'Alembert (1717-1783), matemático francês, foi contemporâneo de Euler e Daniel Bernoulli, e é conhecido, principalmente, por seu trabalho em mecânica e equações diferenciais. O princípio de d'Alembert em mecânica e o paradoxo de d'Alembert em hidrodinâmica receberam esse nome em sua homenagem, e a equação da onda apareceu pela primeira vez em seu artigo sobre cordas vibrantes em 1747. Em seus últimos anos, devotou-se principalmente à filosofia e às suas tarefas como editor de ciência da Enciclopédia de Diderot.

solução, a saber, $y_2(t) = t\exp(-2t)$. Essas duas soluções não são proporcionais, obviamente, mas podemos verificar que são linearmente independentes calculando seu wronskiano:

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ -2e^{-2t} & (1-2t)e^{-2t} \end{vmatrix}$$
$$= e^{-4t} - 2te^{-4t} + 2te^{-4t} = e^{-4t} \neq 0.$$

Portanto,

$$y_1(t) = e^{-2t}, \qquad y_2(t) = te^{-2t} \tag{12}$$

formam um conjunto fundamental de soluções da Eq. (5), e a solução geral dessa equação é dada pela Eq. (11). Note que ambas as funções $y_1(t)$ e $y_2(t)$ tendem a zero quando $t \to \infty$; em conseqüência, todas as soluções da Eq. (5) se comportam desse modo. A Fig. 3.5.1 mostra o gráfico de uma solução típica.

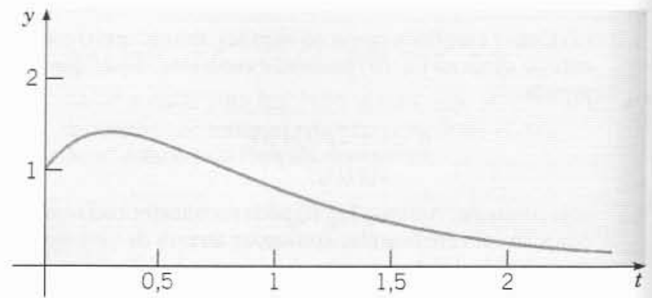


FIG. 3.5.1 Uma solução típica de $y'' + 4y' + 4y = 0$.

O procedimento usado no Exemplo 1 pode ser estendido a uma equação geral cuja equação característica tenha raízes repetidas. Isto é, supomos que os coeficientes na Eq. (1) satisfazem $b^2 - 4ac = 0$, caso em que

$$y_1(t) = e^{-bt/2a}$$

é uma solução. Depois, supomos que

$$y = v(t)y_1(t) = v(t)e^{-bt/2a} \tag{13}$$

e substituímos na Eq. (1) para determinar $v(t)$. Temos

$$y' = v'(t)e^{-bt/2a} - \frac{b}{2a}v(t)e^{-bt/2a} \tag{14}$$

e

$$y'' = v''(t)e^{-bt/2a} - \frac{b}{a}v'(t)e^{-bt/2a} + \frac{b^2}{4a^2}v(t)e^{-bt/2a}. \tag{15}$$

Então, substituindo na Eq. (1), obtemos

$$\left\{a\left[v''(t) - \frac{b}{a}v'(t) + \frac{b^2}{4a^2}v(t)\right] + b\left[v'(t) - \frac{b}{2a}v(t)\right] + cv(t)\right\}e^{-bt/2a} = 0. \tag{16}$$

Cancelando o fator $\exp(-bt/2a)$, que não se anula, e rearrumando os termos restantes, encontramos

$$av''(t) + (-b+b)v'(t) + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right)v(t) = 0. \tag{17}$$

A parcela envolvendo $v'(t)$ é obviamente nula. Além disso, o coeficiente de $v(t)$ é $c - (b^2/4a)$, que também é zero, pois $b^2 - 4ac = 0$ no problema em consideração. Assim, como no Exemplo 1, a Eq. (17) se reduz a

$$v''(t) = 0;$$

logo,

$$v(t) = c_1 t + c_2.$$

Portanto, da Eq. (13), temos

$$y = c_1 te^{-bt/2a} + c_2 e^{-bt/2a}. \tag{18}$$

Então, y é uma combinação linear de duas soluções

$$y_1(t) = e^{-bt/2a}, \qquad y_2(t) = te^{-bt/2a}. \tag{19}$$

O wronskiano dessas duas soluções é

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{-bt/2a} & te^{-bt/2a} \\ -\frac{b}{2a}e^{-bt/2a} & \left(1 - \frac{bt}{2a}\right)e^{-bt/2a} \end{vmatrix} = e^{-bt/a}. \tag{20}$$

Como $W(y_1, y_2)(t)$ nunca se anula, as soluções y_1 e y_2 dadas pela Eq. (19) formam um conjunto fundamental de soluções. Além disso, a Eq. (18) é a solução geral da Eq. (1) quando as raízes da equação característica são iguais. Em outras palavras, nesse caso, existe uma solução exponencial correspondente à raiz repetida, enquanto uma segunda solução é obtida multiplicando-se a solução exponencial por t.

Exemplo 2

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y'' - y' + 0{,}25y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = \tfrac{1}{3}. \tag{21}$$

A equação característica é

$$r^2 - r + 0{,}25 = 0,$$

de modo que as raízes são $r_1 = r_2 = 1/2$. Logo, a solução geral da equação diferencial é

$$y = c_1 e^{t/2} + c_2 t e^{t/2}. \quad (22)$$

A primeira condição inicial implica que

$$y(0) = c_1 = 2.$$

Para satisfazer a segunda equação diferencial, primeiro derivamos a Eq. (22) e depois fazemos $t = 0$. Isso nos dá

$$y'(0) = \tfrac{1}{2}c_1 + c_2 = \tfrac{1}{3},$$

de modo que $c_2 = -2/3$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$y = 2e^{t/2} - \tfrac{2}{3}te^{t/2}. \quad (23)$$

A Fig. 3.5.2 mostra o gráfico dessa solução.

Vamos modificar, agora, o problema de valor inicial (21) mudando o coeficiente angular inicial; especificamente, vamos trocar a segunda condição inicial por $y'(0) = 2$. A solução desse problema modificado é

$$y = 2e^{t/2} + te^{t/2},$$

e seu gráfico também aparece na Fig. 3.5.2. Os gráficos mostrados nessa figura sugerem a existência de um coeficiente angular inicial crítico, com valor entre 1/3 e 2, que separa as soluções que crescem positivamente das que crescem em módulo, mas tornam-se negativas. O Problema 16 pede que você determine esse coeficiente angular crítico.

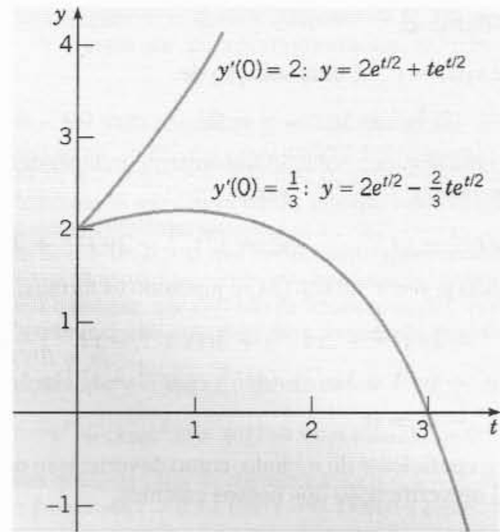


FIG. 3.5.2 Soluções de $y'' - y' + 0{,}25y = 0$, $y(0) = 2$, com $y'(0) = 1/3$ e $y'(0) = 2$, respectivamente.

O comportamento geométrico de soluções, nesse caso, é semelhante a quando as raízes são reais e distintas. Se os exponentes são positivos ou negativos, então a solução, em módulo, aumenta ou diminui de acordo, o fator linear t tem pouca influência. A Fig. 3.5.1 mostra uma solução decaindo e a Fig. 3.5.2 mostra duas soluções crescendo em módulo. No entanto, se a raiz repetida é nula, então a equação diferencial é $y'' = 0$ e a solução geral é uma função linear de t.

Resumo. Podemos resumir, agora, os resultados obtidos para equações lineares homogêneas de segunda ordem com coeficientes constantes,

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (1)$$

Sejam r_1 e r_2 as raízes do polinômio característico correspondente

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (2)$$

Se r_1 e r_2 são reais e distintos, então a solução geral da equação diferencial (1) é

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}. \quad (24)$$

Se r_1 e r_2 são complexos conjugados $\lambda \pm i\mu$, então a solução geral é

$$y = c_1 e^{\lambda t}\cos \mu t + c_2 e^{\lambda t}\,\text{sen}\, \mu t. \quad (25)$$

Se $r_1 = r_2$, então a solução geral é

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}. \quad (26)$$

Redução de Ordem. Vale a pena observar que o procedimento usado anteriormente nesta seção para equações com coeficientes constantes é aplicável mais geralmente. Suponha que conhecemos uma solução $y_1(t)$, não identicamente nula, de

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \quad (27)$$

Para encontrar uma segunda solução, seja

$$y = v(t)y_1(t); \quad (28)$$

então,

$$y' = v'(t)y_1(t) + v(t)y_1'(t)$$

e

$$y'' = v''(t)y_1(t) + 2v'(t)y_1'(t) + v(t)y_1''(t).$$

Substituindo essas expressões para y, y' e y'' na Eq. (27) e juntando os termos, encontramos

$$y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' + (y_1'' + py_1' + qy_1)v = 0. \quad (29)$$

Como y_1 é uma solução da Eq. (27), o coeficiente de v na Eq. (29) é zero, logo a Eq. (29) fica

$$y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' = 0. \quad (30)$$

Apesar de sua aparência, a Eq. (30) é, de fato, uma equação de primeira ordem para a função v' e pode ser resolvida como uma equação de primeira ordem ou como uma equação separável. Uma vez encontrada v', v é obtida por integração. Finalmente, a solução y é determinada da Eq. (28). Esse procedimento é chamado de método de redução de ordem, já que o passo crucial é a resolução de uma equação diferencial de primeira ordem para v', em vez da equação de segunda ordem original para y. Embora seja possível escrever uma fórmula para $v(t)$, vamos, em vez disso, ilustrar como o método funciona através de um exemplo.

Exemplo 3

Dado que $y_1(t) = t^{-1}$ é uma solução de

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \qquad t > 0, \tag{31}$$

encontre uma segunda solução linearmente independente.

Vamos fazer $y = v(t)t^{-1}$; então

$$y' = v't^{-1} - vt^{-2}, \qquad y'' = v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}.$$

Substituindo y, y' e y'' na Eq. (31) e juntando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} 2t^2(v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}) + 3t(v't^{-1} - vt^{-2}) - vt^{-1} \\ = 2tv'' + (-4+3)v' + (4t^{-1} - 3t^{-1} - t^{-1})v \\ = 2tv'' - v' = 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Note que o coeficiente de v é nulo, como deveria; isso nos dá um ponto útil de verificação dos nossos cálculos.

Separando as variáveis na Eq. (32) e resolvendo para $v'(t)$, encontramos

$$v'(t) = ct^{1/2};$$

então,

$$v(t) = \tfrac{2}{3}ct^{3/2} + k.$$

Segue que

$$y = \tfrac{2}{3}ct^{1/2} + kt^{-1}, \tag{33}$$

onde c e k são constantes arbitrárias. A segunda parcela na Eq. (33) é um múltiplo de y_1 e pode ser retirada, mas a primeira parcela nos dá uma solução nova independente. Desprezando a constante multiplicativa, temos $y_2 = t^{1/2}$.

Problemas

Nos problemas de 1 a 10, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

1. $y'' - 2y' + y = 0$
2. $9y'' + 6y' + y = 0$
3. $4y'' - 4y' - 3y = 0$
4. $4y'' + 12y' + 9y = 0$
5. $y'' - 2y' + 10y = 0$
6. $y'' - 6y' + 9y = 0$
7. $4y'' + 17y' + 4y = 0$
8. $16y'' + 24y' + 9y = 0$
9. $25y'' - 20y' + 4y = 0$
10. $2y'' + 2y' + y = 0$

Nos problemas de 11 a 14, resolva o problema de valor inicial dado. Esboce o gráfico da solução e descreva seu comportamento quando t cresce.

11. $9y'' - 12y' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
12. $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
13. $9y'' + 6y' + 82y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$
14. $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 1$



15. Considere o problema de valor inicial

$$4y'' + 12y' + 9y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -4.$$

(a) Resolva o problema de valor inicial e faça o gráfico de sua solução para $0 \le t \le 5$.
(b) Determine onde a solução tem valor zero.
(c) Determine as coordenadas (t_0, y_0) do ponto de mínimo.
(d) Mude a segunda condição inicial para $y'(0) = b$ e encontre a solução como função de b. Depois encontre o valor crítico de b que separa as soluções que permanecem positivas das que acabam se tornando negativas.

16. Considere a seguinte modificação do problema de valor inicial no Exemplo 2:

$$y'' - y' + 0{,}25y = 0, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = b.$$

Encontre a solução em função de b e depois determine o valor crítico de b que separa as soluções que crescem positivamente das que acabam crescendo em módulo, mas com valores negativos.



17. Considere o problema de valor inicial

$$4y'' + 4y' + y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

(a) Resolva o problema de valor inicial e faça o gráfico da solução.
(b) Determine as coordenadas (t_M, y_M) do ponto de máximo.
(c) Mude a segunda condição inicial para $y'(0) = b > 0$ e encontre a solução em função de b.
(d) Encontre as coordenadas do ponto de máximo (t_M, y_M) em função de b. Descreva a dependência em b de t_M e de y_M quando b cresce.

18. Considere o problema de valor inicial

$$9y'' + 12y' + 4y = 0, \qquad y(0) = a > 0, \quad y'(0) = -1.$$

(a) Resolva o problema de valor inicial.
(b) Encontre o valor crítico de a que separa as soluções que se tornam negativas das que permanecem positivas.

19. Se as raízes da equação característica são reais, mostre que uma solução de $ay'' + by' + cy = 0$ pode assumir o valor zero no máximo uma vez.

Os problemas de 20 a 22 indicam outras maneiras de se encontrar uma segunda solução quando a equação característica tem raízes repetidas.

20. (a) Considere a equação $y'' + 2ay' + a^2y = 0$. Mostre que as raízes da equação característica são $r_1 = r_2 = -a$, de modo que uma solução da equação é e^{-at}.
(b) Use a fórmula de Abel [Eq. (8) da Seção 3.3] para mostrar que o wronskiano de duas soluções quaisquer da equação dada é

$$W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = c_1e^{-2at},$$

onde c_1 é constante.
(c) Seja $y_1(t) = e^{-at}$ e use o resultado do item (b) para obter uma equação diferencial satisfeita pela segunda solução $y_2(t)$. Resolvendo essa equação, mostre que $y_2(t) = te^{-at}$.

21. Suponha que r_1 e r_2 são raízes de $ar^2 + br + c = 0$ e que $r_1 \neq r_2$; então, $\exp(r_1t)$ e $\exp(r_2t)$ são soluções da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$. Mostre que $\phi(t; r_1, r_2) = [\exp(r_2t) - \exp(r_1t)]/(r_2 - r_1)$ também é solução da equação para $r_2 \neq r_1$. Depois, fixe r_1 e use a regra de L'Hôpital para calcular o limite de $\phi(t; r_1, r_2)$ quando $r_2 \to r_1$ obtendo, assim, a segunda solução no caso de raízes repetidas.

22. (a) Se $ar^2 + br + c = 0$ tem raízes iguais r_1, mostre que

$$L[e^{rt}] = a(e^{rt})'' + b(e^{rt})' + ce^{rt} = a(r - r_1)^2e^{rt}. \tag{i}$$

Como a última expressão à direita na Eq. (i) é nula quando $r = r_1$, segue que $\exp(r_1t)$ é uma solução de $L[y] = ay'' + by' + cy = 0$.

(b) Derive a Eq. (i) em relação a r e mude as ordens das derivadas em relação a r e a t, mostrando, assim, que

$$\frac{\partial}{\partial r}L[e^{rt}]=L\left[\frac{\partial}{\partial r}e^{rt}\right]=L[te^{rt}]=ate^{rt}(r-r_1)^2+2ae^{rt}(r-r_1). \quad \text{(ii)}$$

Como a última expressão à direita na Eq. (ii) é zero quando $r = r_1$, conclua que $t\exp(r_1 t)$ também é solução de $L[y] = 0$.

Nos problemas de 23 a 30, use o método de redução de ordem para encontrar uma segunda solução da equação diferencial dada.

23. $t^2y'' - 4ty' + 6y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t^2$
24. $t^2y'' + 2ty' - 2y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t$
25. $t^2y'' + 3ty' + y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t^{-1}$
26. $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t$
27. $xy'' - y' + 4x^3y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = \operatorname{sen} x^2$
28. $(x-1)y'' - xy' + y = 0, \quad x > 1; \quad y_1(x) = e^x$
29. $x^2y'' - (x - 0{,}1875)y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{1/4}e^{2\sqrt{x}}$
30. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0{,}25)y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$

31. A equação diferencial

$$xy'' - (x+N)y' + Ny = 0,$$

onde N é um inteiro não-negativo, foi discutida por diversos autores.[6] Uma razão para esse interesse é que tem uma solução exponencial e uma solução polinomial.
(a) Verifique que uma solução é $y_1(x) = e^x$.
(b) Mostre que uma segunda solução tem a forma $y_2(x) = ce^x \int x^N e^{-x}\,dx$. Calcule $y_2(x)$ para $N = 1$ e $N = 2$; convença-se de que, com $c = -1/N!$,

$$y_2(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^N}{N!}.$$

Note que $y_2(x)$ é precisamente a soma das $N + 1$ primeiras parcelas da série de Taylor para e^x em torno de $x = 0$, isto é, da série de Taylor para $y_1(x)$.

32. A equação diferencial

$$y'' + \delta(xy' + y) = 0$$

aparece no estudo da turbulência em um fluxo uniforme ao passar por um cilindro circular. Verifique que $y_1(x) = \exp(-\delta x^2/2)$ é uma solução e depois encontre a solução geral como uma integral.

33. O método do Problema 20 pode ser estendido para equações de segunda ordem com coeficientes variáveis. Se y_1 é uma solução conhecida de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ que não se anula, mostre que uma segunda solução y_2 satisfaz $(y_2/y_1)' = W(y_1, y_2)/y_1^2$, onde $W(y_1, y_2)$ é o wronskiano de y_1 e y_2. Depois use a fórmula de Abel [Eq. (8) da Seção 3.3] para determinar y_2.

Nos problemas de 34 a 37, use o método do Problema 33 para encontrar uma segunda solução independente da equação dada.

34. $t^2y'' + 3ty' + y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t^{-1}$
35. $ty'' - y' + 4t^3y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = \operatorname{sen}(t^2)$
36. $(x-1)y'' - xy' + y = 0, \quad x > 1; \quad y_1(x) = e^x$
37. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0{,}25)y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$

[6] T. A. Newton, "On Using a Differential Equation to Generate Polynomials", *American Mathematical Monthly 81* (1974), pp. 592-601. Veja, também, as referências dadas aí.

Comportamento de Soluções quando $t \to \infty$. Os problemas de 38 a 40 tratam do comportamento de soluções quando $t \to \infty$.

38. Se a, b e c são constantes positivas, mostre que todas as soluções de $ay'' + by' + cy = 0$ tendem a zero quando $t \to \infty$.
39. (a) Se $a > 0$ e $c > 0$, mas $b = 0$, mostre que o resultado do Problema 38 não é mais válido, mas que todas as soluções permanecem limitadas quando $t \to \infty$.
(b) Se $a > 0$ e $b > 0$, mas $c = 0$, mostre que o resultado do Problema 38 não é mais válido, mas que todas as soluções tendem a uma constante, que depende da condição inicial, quando $t \to \infty$. Determinar esta constante para a condição inicial $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$.
40. Mostre que $y = \operatorname{sen} t$ é uma solução de

$$y'' + (k\operatorname{sen}^2 t)y' + (1 - k\cos t\operatorname{sen} t)y = 0$$

para qualquer valor da constante k. Se $0 < k < 2$, mostre que $1 - k\cos t\operatorname{sen} t > 0$ e $k\operatorname{sen}^2 t \geq 0$. Observe então que, embora os coeficientes dessa equação diferencial com coeficientes variáveis sejam não-negativos (e o coeficiente de y' se anule apenas nos pontos $t = 0, \pi, 2\pi, \ldots$), ela tem uma solução que não tende a zero quando $t \to \infty$. Compare essa situação com o resultado do Problema 38. Observamos, assim, uma situação que não é incomum na teoria das equações diferenciais: equações aparentemente bastante semelhantes podem ter propriedades muito diferentes.

Equações de Euler. Use a substituição dada no Problema 38 da Seção 3.4 para resolver cada uma das equações nos Problemas 41 e 42.

41. $t^2y'' - 3ty' + 4y = 0, \quad t > 0$
42. $t^2y'' + 2ty' + 0{,}25y = 0, \quad t > 0$

3.6 Equações Não-homogêneas; Método dos Coeficientes Indeterminados

Vamos retornar à equação não-homogênea

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad (1)$$

onde p, q e g são funções (contínuas) dadas em um intervalo aberto I. A equação

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad (2)$$

onde $g(t) = 0$ e p e q são as mesmas que na Eq. (1), é chamada de equação homogênea associada à Eq. (1). Os dois resultados a seguir descrevem a estrutura de soluções da equação não-homogênea (1) e fornecem uma base para se construir sua solução geral.

Teorema 3.6.1

Se Y_1 e Y_2 são duas soluções da equação não-homogênea (1), então sua diferença $Y_1 - Y_2$ é uma solução da equação homogênea associada (2). Se, além disso, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções para a Eq. (2), então

$$Y_1(t) - Y_2(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t), \quad (3)$$

onde c_1 e c_2 são constantes determinadas.

Para provar esse resultado, note que Y_1 e Y_2 satisfazem as equações

$$L[Y_1](t) = g(t), \qquad L[Y_2](t) = g(t). \tag{4}$$

Subtraindo a segunda da primeira dessas equações, temos

$$L[Y_1](t) - L[Y_2](t) = g(t) - g(t) = 0. \tag{5}$$

No entanto,

$$L[Y_1] - L[Y_2] = L[Y_1 - Y_2],$$

de modo que a Eq. (5) fica

$$L[Y_1 - Y_2](t) = 0. \tag{6}$$

A Eq. (6) diz que $Y_1 - Y_2$ é uma solução da Eq. (2). Finalmente, como todas as soluções da Eq. (2) podem ser expressas como uma combinação linear das funções em um conjunto fundamental de soluções pelo Teorema 3.2.4, segue que a solução $Y_1 - Y_2$ também pode ser expressa nessa forma. Logo, a Eq. (3) é válida e a demonstração está completa.

Teorema 3.6.2

A solução geral da equação não-homogênea (1) pode ser escrita na forma

$$y = \phi(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t), \tag{7}$$

onde Y_1 e Y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea associada (2), c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e Y é alguma solução específica da equação não-homogênea (1).

A demonstração do Teorema 3.6.2 segue rapidamente do teorema precedente. Note que a Eq. (3) é válida se identificarmos Y_1 com uma solução arbitrária ϕ da Eq. (1) e Y_2 com a solução específica Y. Da Eq. (3) obtemos, assim,

$$\phi(t) - Y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \tag{8}$$

que é equivalente à Eq. (7). Como ϕ é uma solução arbitrária da Eq. (1), a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (7) inclui todas as soluções da Eq. (1); é natural, portanto, chamá-la de solução geral da Eq. (1).

Reescrevendo de maneira um pouco diferente, o Teorema 3.6.2 diz que, para resolver a equação não-homogênea (1), precisamos fazer três coisas:

1. Encontrar a solução geral $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ da equação homogênea associada. Essa solução é chamada, muitas vezes, de solução complementar e pode ser denotada por $y_c(t)$.
2. Encontrar uma única solução $Y(t)$ da equação não-homogênea. Referimo-nos a essa solução, muitas vezes, como uma solução particular.
3. Somar as duas funções encontradas nas duas etapas precedentes.

Já discutimos como encontrar $y_c(t)$, pelo menos quando a equação homogênea tem coeficientes constantes. Portanto, no restante desta seção e na próxima, focalizaremos nossa atenção em encontrar uma solução particular $Y(t)$ da equação não-homogênea (1). Existem dois métodos que gostaríamos de discutir. Eles são conhecidos como o método dos coeficientes indeterminados e o método de variação dos parâmetros, respectivamente. Cada um tem vantagens e desvantagens.

O Método dos Coeficientes Indeterminados. O método dos coeficientes indeterminados, também conhecido como método dos coeficientes a determinar, requer uma hipótese inicial sobre a forma da solução particular $Y(t)$, mas com os coeficientes não especificados. Substituímos, então, a expressão hipotética na Eq. (1) e tentamos determinar os coeficientes de modo que a equação seja satisfeita. Se tivermos sucesso, teremos encontrado uma solução da equação diferencial (1) e podemos usá-la como a solução particular $Y(t)$. Se não pudermos determinar os coeficientes, isso significa que não existe solução da forma que supusemos. Nesse caso, temos que modificar a hipótese inicial e tentar de novo.

A maior vantagem do método dos coeficientes indeterminados é que ele é fácil de executar, uma vez feita a hipótese sobre a forma de $Y(t)$. Sua maior limitação é que é útil principalmente para equações para as quais é fácil escrever a forma correta da solução particular imediatamente. Por essa razão, esse método só é usado, em geral, para problemas nos quais a equação homogênea tem coeficientes constantes e o termo não-homogêneo pertence a uma classe relativamente pequena de funções. Em particular, consideramos apenas termos homogêneos consistindo em polinômios, funções exponenciais, senos e co-senos. Apesar dessa limitação, o método dos coeficientes indeterminados é útil para resolver muitos problemas que têm aplicações importantes. No entanto, os detalhes dos cálculos podem ser bastante tediosos e um sistema de álgebra computacional pode ser muito útil nas aplicações práticas. Ilustraremos o método dos coeficientes indeterminados através de diversos exemplos e depois resumiremos algumas regras para usá-lo.

Exemplo 1

Encontre uma solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}. \tag{9}$$

Procuramos uma função Y tal que $Y''(t) - 3Y'(t) - 4Y(t)$ é igual a $3e^{2t}$. Como a derivada de uma função exponencial é um múltiplo dela mesma, a maneira mais plausível de se obter o resultado desejado é supondo que $Y(t)$ é algum múltiplo de e^{2t}, isto é

$$Y(t) = Ae^{2t},$$

onde o coeficiente A ainda precisa ser determinado. Para encontrar A, vamos calcular

$$Y'(t) = 2Ae^{2t}, \qquad Y''(t) = 4Ae^{2t},$$

e substituir na Eq. (9). Obtemos

$$(4A - 6A - 4A)e^{2t} = 3e^{2t}.$$

Portanto, $-6Ae^{2t}$ tem que ser igual a $3e^{2t}$, logo $A = -1/2$. Assim, uma solução particular é

$$Y(t) = -\tfrac{1}{2}e^{2t}. \tag{10}$$

Exemplo 2

Encontre uma solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 2\,\mathrm{sen}\,t. \qquad (11)$$

Por analogia com o Exemplo 1, vamos supor, primeiro, que $Y(t) = A$ sen t, onde A é uma constante a ser determinada. Substituindo na Eq. (11) e rearrumando os termos, obtemos

$$-5A\,\mathrm{sen}\,t - 3A\cos t = 2\,\mathrm{sen}\,t,$$

ou

$$(2 + 5A)\,\mathrm{sen}\,t + 3A\cos t = 0. \qquad (12)$$

As funções sen t e cos t são linearmente independentes, de modo que a Eq. (12) só pode ser válida em um intervalo se os coeficientes $2 + 5A$ e $3A$ são ambos iguais a zero. Essas condições contraditórias significam que não existe escolha da constante A que torne a Eq. (12) válida para todo t. Podemos concluir, então, que nossa hipótese sobre $Y(t)$ não foi adequada. A aparição de um termo em co-seno na Eq. (12) sugere que modifiquemos nossa hipótese original, incluindo um termo em co-seno em $Y(t)$, isto é,

$$Y(t) = A\,\mathrm{sen}\,t + B\cos t,$$

onde A e B são constantes a serem determinadas. Logo,

$$Y'(t) = A\cos t - B\,\mathrm{sen}\,t, \qquad Y''(t) = -A\,\mathrm{sen}\,t - B\cos t.$$

Substituindo na Eq. (11) e juntando os termos, obtemos

$$(-A + 3B - 4A)\,\mathrm{sen}\,t + (-B - 3A - 4B)\cos t = 2\,\mathrm{sen}\,t. \qquad (13)$$

Para satisfazer a Eq. (13), precisamos igualar os coeficientes de sen t e de cos t nos dois lados da equação; assim, A e B têm que satisfazer as equações

$$-5A + 3B = 2, \qquad -3A - 5B = 0.$$

Portanto, $A = -5/17$ e $B = 3/17$, de modo que uma solução particular da Eq. (11) é

$$Y(t) = -\tfrac{5}{17}\,\mathrm{sen}\,t + \tfrac{3}{17}\cos t.$$

O método ilustrado nos exemplos precedentes também pode ser usado quando a expressão à direita do sinal de igualdade é um polinômio. Assim, para encontrar uma solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 4t^2 - 1, \qquad (14)$$

supomos, inicialmente, que $Y(t)$ é um polinômio de mesmo grau que o termo não-homogêneo, isto é, $Y(t) = At^2 + Bt + C$.

Para resumir nossas conclusões até agora: se o termo não-homogêneo $g(t)$ na Eq. (1) for uma função exponencial $e^{\alpha t}$, suponha, então, que $Y(t)$ é proporcional a essa mesma função exponencial; se $g(t)$ for igual a sen βt ou a cos βt, suponha que Y é uma combinação linear de sen βt e cos βt; se $g(t)$ for um polinômio, suponha que $Y(t)$ é um polinômio de mesmo grau. O mesmo princípio se estende ao caso em que $g(t)$ é um produto de quaisquer dois ou três desses tipos de funções, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 3

Encontre uma solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^t\cos 2t. \qquad (15)$$

Nesse caso, supomos que $Y(t)$ é o produto de e^t com uma combinação linear de cos $2t$ e sen $2t$, isto é,

$$Y(t) = Ae^t\cos 2t + Be^t\,\mathrm{sen}\,2t.$$

Os cálculos algébricos são mais tediosos neste exemplo, mas segue que

$$Y'(t) = (A + 2B)e^t\cos 2t + (-2A + B)e^t\,\mathrm{sen}\,2t$$

e

$$Y''(t) = (-3A + 4B)e^t\cos 2t + (-4A - 3B)e^t\,\mathrm{sen}\,2t.$$

Substituindo essas expressões na Eq. (15), encontramos que A e B têm que satisfazer

$$10A + 2B = 8, \qquad 2A - 10B = 0.$$

Portanto, $A = 10/13$ e $B = 2/13$; logo, uma solução particular da Eq. (15) é

$$Y(t) = \tfrac{10}{13}e^t\cos 2t + \tfrac{2}{13}e^t\,\mathrm{sen}\,2t.$$

Suponha, agora, que $g(t)$ é uma soma de dois termos, $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$, e suponha que Y_1 e Y_2 são soluções das equações

$$ay'' + by' + cy = g_1(t) \qquad (16)$$

e

$$ay'' + by' + cy = g_2(t), \qquad (17)$$

respectivamente. Então, $Y_1 + Y_2$ é uma solução da equação

$$ay'' + by' + cy = g(t). \qquad (18)$$

Para provar essa afirmação, substitua y na Eq. (18) por $Y_1(t) + Y_2(t)$ e use as Eqs. (16) e (17). Uma conclusão análoga é válida se $g(t)$ é uma soma de um número finito de parcelas. O significado prático desse resultado é que, para resolver uma equação cuja função não-homogênea $g(t)$ pode ser expressa como uma soma, pode-se resolver diversas equações mais simples e depois somar os resultados. O exemplo a seguir ilustra esse procedimento.

Exemplo 4

Encontre uma solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t} + 2\operatorname{sen} t - 8e^t \cos 2t. \quad (19)$$

Separando a expressão à direita do sinal de igualdade, obtemos três equações:

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t},$$
$$y'' - 3y' - 4y = 2\operatorname{sen} t,$$

e

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^t \cos 2t.$$

Foram encontradas soluções dessas três equações nos Exemplos 1, 2 e 3, respectivamente. Portanto, uma solução particular da Eq. (9) é a soma, isto é,

$$Y(t) = -\tfrac{1}{2}e^{2t} + \tfrac{3}{17}\cos t - \tfrac{5}{17}\operatorname{sen} t + \tfrac{10}{13}e^t \cos 2t + \tfrac{2}{13}e^t \operatorname{sen} 2t.$$

O procedimento ilustrado nesses exemplos nos permite resolver uma grande classe de problemas de um modo razoavelmente eficiente. No entanto, existe uma dificuldade que ocorre às vezes. O próximo exemplo mostra como isso acontece.

Exemplo 5

Encontre uma solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t} \quad (20)$$

Procedendo como no Exemplo 1, supomos que $Y(t) = Ae^{-t}$. Substituindo na Eq. (20), obtemos

$$(A + 3A - 4A)e^{-t} = 2e^{-t} \quad (21)$$

Como a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (21) é zero, não existe escolha de A e B que satisfaça a equação. Portanto, não existe solução particular da Eq. (20) que tenha a forma suposta. A razão para esse resultado possivelmente inesperado torna-se clara se resolvermos a equação homogênea

$$y'' - 3y' - 4y = 0 \quad (22)$$

associada à Eq. (20). Um conjunto fundamental de soluções para a Eq. (22) é formado por $y_1(t) = e^{-t}$ e $y_2(t) = e^{4t}$. Assim, a forma suposta da solução particular para a Eq. (20) era, de fato, solução da equação homogênea (22); em conseqüência, não pode ser solução da equação não-homogênea (20). Para encontrar uma solução da Eq. (20), temos, portanto, que considerar funções com forma um pouco diferente.

Nesse ponto temos várias alternativas possíveis. Uma é simplesmente tentar adivinhar a forma adequada da solução particular da Eq. (20). Outra é resolver essa equação de outro modo e tentar usar o resultado para orientar nossas hipóteses se essa situação aparecer novamente no futuro; veja os Problemas 27 e 33 para outros métodos de solução. Outra possibilidade ainda é procurar uma equação mais simples onde essa dificuldade ocorre e usar sua solução para sugerir como poderíamos proceder com a Eq. (20). Adotando essa última abordagem, vamos procurar uma equação de primeira ordem análoga à Eq. (20). Uma possibilidade é

$$y' + y = 2e^{-t} \quad (23)$$

Se tentarmos encontrar uma solução particular da Eq. (23) da forma Ae^{-t}, falharemos, porque e^{-t} é uma solução da equação homogênea $y' + y = 0$. No entanto, já vimos como resolver a Eq. (23) na Seção 2.1. Um fator integrante é $\mu(t) = e^t$; multiplicando por $\mu(t)$ e depois integrando, obtemos a solução

$$y = 2te^{-t} + ce^{-t} \quad (24)$$

A segunda parcela à direita do sinal de igualdade na Eq. (24) é a solução geral da equação homogênea $y' + y = 0$, mas a primeira parcela é uma solução da equação não-homogênea completa (23). Observe que ela envolve um fator exponencial multiplicado pelo fator t. Essa é a pista que estávamos procurando.

Vamos voltar para a Eq. (20) e supor uma solução particular da forma $Y(t) = Ate^{-t}$. Então

$$Y'(t) = Ae^{-t} - Ate^{-t}, \quad Y''(t) = -2Ae^{-t} + Ate^{-t} \quad (25)$$

Colocando essas expressões no lugar de y, y' e y'' na Eq. (20), obtemos $-5A = 2$, de modo que $A = -2/5$. Logo, uma solução particular da Eq. (20) é

$$Y(t) = -\frac{2}{5}te^{-t} \quad (26)$$

O resultado do Exemplo 5 sugere uma modificação do princípio enunciado anteriormente: se a forma suposta da solução duplica uma solução da equação homogênea associada, modifique então sua hipótese multiplicando a suposta solução particular por t. De vez em quando, essa modificação não será suficiente para remover todas as duplicações com as soluções da equação homogênea, caso em que é necessário multiplicar por t uma segunda vez. Para uma equação de segunda ordem, nunca será necessário continuar esse processo.

Resumo. Vamos resumir as etapas envolvidas em encontrar a solução de um problema de valor inicial consistindo em uma equação não-homogênea da forma

$$ay'' + by' + cy = g(t), \quad (27)$$

onde os coeficientes a, b e c são constantes, junto com um par de condições iniciais dado:

1. Encontre a solução geral da equação homogênea associada.

2. Certifique-se de que a função $g(t)$ na Eq. (27) pertence à classe de funções discutidas nesta seção, isto é, certifique-se de que não envolve outras funções além de exponenciais, senos, co-senos, polinômios ou somas ou produtos de tais funções. Se não for esse o caso, use o método de variação dos parâmetros (discutido na próxima seção).
3. Se $g(t) = g_1(t) + \ldots + g_n(t)$, isto é, se $g(t)$ é uma soma de n parcelas, então forme n subproblemas, cada um dos quais contendo apenas uma das parcelas $g_1(t), \ldots, g_n(t)$. O i-ésimo subproblema consiste na equação

$$ay'' + by' + cy = g_i(t),$$

onde i varia de 1 a n.
4. Para o i-ésimo subproblema, suponha uma solução particular $Y_i(t)$ consistindo da função apropriada, seja ela exponencial, seno, co-seno, polinomial ou uma combinação dessas. Se existe qualquer duplicação na forma suposta de $Y_i(t)$ com as soluções da equação homogênea (encontrada na etapa 1), então multiplique $Y_i(t)$ por t ou (se necessário) por t^2, de modo a remover a duplicação. Veja a Tabela 3.6.1.
5. Encontre uma solução particular $Y_i(t)$ para cada um dos subproblemas. Então, a soma $Y_1(t) + \ldots + Y_n(t)$ é uma solução particular da equação homogênea completa (27).
6. Forme a soma da solução geral da equação homogênea (etapa 1) com a solução particular da equação não-homogênea (etapa 5). Essa é a solução geral da equação não-homogênea.
7. Use as condições iniciais para determinar os valores das constantes arbitrárias na solução geral.

Para alguns problemas, todo esse procedimento é fácil de ser feito à mão, mas, em muitos casos, necessita de uma quantidade considerável de cálculos algébricos. Uma vez que você tenha compreendido claramente como o método funciona, um sistema de álgebra computacional pode ser de grande auxílio para executar os detalhes.

O método dos coeficientes indeterminados se autocorrige, no seguinte sentido: supondo-se muito pouco sobre $Y(t)$, chega-se, rapidamente, a uma contradição que, em geral, aponta o caminho para a modificação necessária na forma suposta. Por outro lado, supondo-se muitos termos, então faz-se um trabalho desnecessário e alguns coeficientes ficam iguais a zero, mas, pelo menos, chega-se à resposta correta.

Demonstração do Método dos Coeficientes Indeterminados. Na discussão precedente, descrevemos o método dos coeficientes indeterminados baseados em diversos exemplos. Para provar que o procedimento sempre funciona como enunciado, vamos dar um argumento geral, onde consideramos diversos casos correspondendo a formas diferentes do termo não-homogêneo $g(t)$.

$\boldsymbol{g(t) = P_n(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_n}$. Nesse caso a Eq. (27) fica

$$ay'' + by' + cy = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_n. \quad (28)$$

Para obter uma solução particular, supomos que

$$Y(t) = A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_{n-2}t^2 + A_{n-1}t + A_n. \quad (29)$$

Substituindo na Eq. (28), obtemos

$$a[n(n-1)A_0t^{n-2} + \cdots + 2A_{n-2}] + b(nA_0t^{n-1} + \cdots + A_{n-1}) + c(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_n) = a_0t^n + \cdots + a_n. \quad (30)$$

Igualando os coeficientes das potências iguais de t nos dá

$$\begin{aligned} cA_0 &= a_0, \\ cA_1 + nbA_0 &= a_1, \\ &\vdots \\ cA_n + bA_{n-1} + 2aA_{n-2} &= a_n. \end{aligned}$$

Se $c \neq 0$, a solução da primeira equação é $A_0 = a_0/c$, e as equações restantes determinam $A_1, \ldots, A_n$ sucessivamente. Se $c = 0$, mas $b \neq 0$, então o polinômio à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (30) tem grau $n - 1$ e ela não pode ser satisfeita. Para garantir que $aY''(t) + bY'(t)$ é um polinômio de grau n, precisamos escolher $Y(t)$ como sendo um polinômio de grau $n + 1$. Supomos, então, que

$$Y(t) = t(A_0t^n + \cdots + A_n).$$

Não existe termo constante nessa expressão para $Y(t)$, mas não há necessidade de incluir esse termo, já que constantes são soluções da equação homogênea quando $c = 0$. Como $b \neq 0$, temos $A_0 = a_0/b(n + 1)$ e os outros coeficientes $A_1, \ldots, A_n$ podem ser determinados analogamente. Se ambos c e b são iguais a zero, supomos que

$$Y(t) = t^2(A_0t^n + \cdots + A_n).$$

O termo $aY''(t)$ é um polinômio de grau n e podemos proceder como anteriormente. Novamente, os termos constante e linear em

TABELA 3.6.1 A Solução Particular de $ay'' + by' + cy = g_i(t)$.

$g_i(t)$	$Y_i(t)$
$P_n(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_n$	$t^s(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_n)$
$P_n(t)e^{\alpha t}$	$t^s(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_n)e^{\alpha t}$
$P_n(t)e^{\alpha t}\begin{cases}\text{sen}\,\beta t \\ \cos\beta t\end{cases}$	$t^s[(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_n)e^{\alpha t}\cos\beta t + (B_0t^n + B_1t^{n-1} + \cdots + B_n)e^{\alpha t}\text{sen}\,\beta t]$

Observação: Aqui, s denota o menor inteiro não-negativo ($s = 0$, 1 ou 2) que garanta que nenhuma parcela de $Y_i(t)$ seja solução da equação homogênea correspondente. Equivalentemente, para os três casos, s é o número de vezes que 0 é uma raiz da equação característica, α é uma raiz da equação característica e $\alpha + i\beta$ é uma raiz da equação característica, respectivamente.

$Y(t)$ são omitidos, já que, nesse caso, ambos são soluções da equação homogênea.

$g(t) = e^{\alpha t}P_n(t)$. O problema de determinar uma solução particular de

$$ay'' + by' + cy = e^{\alpha t}P_n(t) \tag{31}$$

pode ser reduzido ao caso precedente através de uma substituição. Seja

$$Y(t) = e^{\alpha t}u(t);$$

então

$$Y'(t) = e^{\alpha t}[u'(t) + \alpha u(t)]$$

e

$$Y''(t) = e^{\alpha t}[u''(t) + 2\alpha u'(t) + \alpha^2 u(t)].$$

Substituindo na Eq. (31), cancelando o fator $e^{\alpha t}$ e juntando os termos semelhantes, obtemos

$$au''(t) + (2a\alpha + b)u'(t) + (a\alpha^2 + b\alpha + c)u(t) = P_n(t). \tag{32}$$

A determinação de uma solução particular da Eq. (32) é precisamente o mesmo problema, exceto pelo nome das constantes, que resolver a Eq. (28). Portanto, se $a\alpha^2 + b\alpha + c$ não for zero, supomos que $u(t) = A_0t^n + \ldots + A_0$; logo, uma solução particular da Eq. (31) tem a forma

$$Y(t) = e^{\alpha t}(A_0t^n + A_1t^{n-1} + \cdots + A_n). \tag{33}$$

Por outro lado, se $a\alpha^2 + b\alpha + c$ for zero, mas $2a\alpha + b$ não o for, precisamos tomar $u(t)$ da forma $t(A_0t^n + \ldots + A_0)$. A forma correspondente para $Y(t)$ é t vezes a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (33). Note que, se $a\alpha^2 + b\alpha + c$ for zero, então $e^{\alpha t}$ é uma solução da equação homogênea. Se ambos $a\alpha^2 + b\alpha + c$ e $2a\alpha + b$ forem nulos (e isso implica que tanto $e^{\alpha t}$ quanto $te^{\alpha t}$ são soluções da equação homogênea), então a forma correta para $u(t)$ é $t^2(A_0t^n + \ldots + A_0)$. Portanto, $Y(t)$ é t^2 vezes a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (33).

$g(t) = e^{\alpha t}P_n(t)\cos\beta t$ ou $e^{\alpha t}P_n(t)\,\mathrm{sen}\,\beta t$. Esses dois casos são semelhantes, logo consideraremos apenas o último. Podemos reduzir esse problema ao precedente notando que, em conseqüência da fórmula de Euler, $\mathrm{sen}\,\beta t = (e^{i\beta t} - e^{-i\beta t})/2i$. Portanto, $g(t)$ é da forma

$$g(t) = P_n(t)\frac{e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}}{2i}$$

e devemos escolher

$$Y(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}(A_0t^n + \cdots + A_n) + e^{(\alpha-i\beta)t}(B_0t^n + \cdots + B_n),$$

ou, equivalentemente,

$$Y(t) = e^{\alpha t}(A_0t^n + \cdots + A_n)\cos\beta t + e^{\alpha t}(B_0t^n + \cdots + B_n)\,\mathrm{sen}\,\beta t.$$

Em geral, prefere-se essa última forma. Se $\alpha \pm i\beta$ satisfazem a equação característica correspondente à equação homogênea, temos, é claro, que multiplicar cada um dos polinômios por t para aumentar o grau de um.

Se a função não-homogênea envolve ambos $\cos\beta t$ e $\mathrm{sen}\,\beta t$, é conveniente, em geral, tratar esses termos em conjunto, já que cada um, individualmente, pode gerar a mesma forma de solução particular. Por exemplo, se $g(t) = t\,\mathrm{sen}\,t + 2\cos t$, a forma de $Y(t)$ seria

$$Y(t) = (A_0t + A_1)\,\mathrm{sen}\,t + (B_0t + B_1)\cos t,$$

desde que $\mathrm{sen}\,t$ e $\cos t$ não fossem soluções da equação homogênea.

Problemas

Nos problemas de 1 a 12, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

1. $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$
2. $y'' + 2y' + 5y = 3\,\mathrm{sen}\,2t$
3. $y'' - 2y' - 3y = -3te^{-t}$
4. $y'' + 2y' = 3 + 4\,\mathrm{sen}\,2t$
5. $y'' + 9y = t^2e^{3t} + 6$
6. $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$
7. $2y'' + 3y' + y = t^2 + 3\,\mathrm{sen}\,t$
8. $y'' + y = 3\,\mathrm{sen}\,2t + t\cos 2t$
9. $u'' + \omega_0^2u = \cos\omega t, \quad \omega^2 \neq \omega_0^2$
10. $u'' + \omega_0^2u = \cos\omega_0 t$
11. $y'' + y' + 4y = 2\,\mathrm{senh}\,t$ *Sugestão:* $\mathrm{senh}\,t = (e^t - e^{-t})/2$
12. $y'' - y' - 2y = \cosh 2t$ *Sugestão:* $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$

Nos problemas de 13 a 18, encontre a solução do problema de valor inicial dado.

13. $y'' + y' - 2y = 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
14. $y'' + 4y = t^2 + 3e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
15. $y'' - 2y' + y = te^t + 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
16. $y'' - 2y' - 3y = 3te^{2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
17. $y'' + 4y = 3\,\mathrm{sen}\,2t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
18. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t}\cos 2t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

Nos problemas de 19 a 26:
(a) Determine uma forma adequada para $Y(t)$ para se usar o método dos coeficientes indeterminados.
(b) Use um sistema de álgebra computacional para encontrar uma solução particular da equação dada.

19. $y'' + 3y' = 2t^4 + t^2e^{-3t} + \mathrm{sen}\,3t$
20. $y'' + y = t(1 + \mathrm{sen}\,t)$
21. $y'' - 5y' + 6y = e^t\cos 2t + e^{2t}(3t + 4)\,\mathrm{sen}\,t$
22. $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-t} + 2e^{-t}\cos t + 4e^{-t}t^2\,\mathrm{sen}\,t$
23. $y'' - 4y' + 4y = 2t^2 + 4te^{2t} + t\,\mathrm{sen}\,2t$
24. $y'' + 4y = t^2\,\mathrm{sen}\,2t + (6t + 7)\cos 2t$
25. $y'' + 3y' + 2y = e^t(t^2 + 1)\,\mathrm{sen}\,2t + 3e^{-t}\cos t + 4e^t$
26. $y'' + 2y' + 5y = 3te^{-t}\cos 2t - 2te^{-2t}\cos t$
27. Considere a equação

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t} \tag{i}$$

do Exemplo 5. Lembre-se de que $y_1(t) = e^{-t}$ e $y_2(t) = e^{4t}$ são soluções da equação homogênea associada. Adaptando o método de redução de ordem (Seção 3.5), procure uma solução da equação não-homogênea da forma $Y(t) = v(t)y_1(t) = v(t)e^{-t}$, onde $v(t)$ deverá ser determinado.

(a) Substitua $Y(t)$, $Y'(t)$ e $Y''(t)$ na Eq. (i) e mostre que $v(t)$ tem que satisfazer $v'' - 5v' = 2$.
(b) Seja $w(t) = v'(t)$ e mostre que $w(t)$ tem que satisfazer $w' - 5w = 2$. Resolva essa equação para $w(t)$.
(c) Integre $w(t)$ para encontrar $v(t)$ e depois mostre que

$$Y(t) = -\frac{2}{5}te^{-t} + \frac{1}{5}c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t}.$$

A primeira parcela na expressão à direita do sinal de igualdade é a solução particular desejada da equação não-homogênea. Note que ela contém um produto de t e de e^{-t}.

28. Determine a solução geral de

$$y'' + \lambda^2 y = \sum_{m=1}^{N} a_m \operatorname{sen} m\pi t,$$

onde $\lambda > 0$ e $\lambda \neq m\pi$ para $m = 1, \ldots, N$.

29. Em muitos problemas físicos, o termo não-homogêneo pode ser especificado por fórmulas diferentes em períodos de tempo diferentes. Como exemplo, determine a solução $y = \phi(t)$ de

$$y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \le t \le \pi, \\ \pi e^{\pi - t}, & t > \pi, \end{cases}$$

satisfazendo as condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$. Suponha, também, que y e y' são contínuas em $t = \pi$. Faça o gráfico do termo não-homogêneo e da solução em função do tempo. *Sugestão*: Resolva, primeiro, o problema de valor inicial para $t \le \pi$; depois, resolva para $t > \pi$, determinando as constantes nessa última solução a partir das condições de continuidade em $t = \pi$.

30. Siga as instruções do Problema 29 para resolver a equação diferencial

$$y'' + 2y' + 5y = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \pi/2, \\ 0, & t > \pi/2 \end{cases}$$

com condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

Comportamento de Soluções quando $t \to \infty$. Nos Problemas 31 e 32, continuamos a discussão iniciada nos problemas de 38 a 40 da Seção 3.5. Considere a equação diferencial

$$ay'' + by' + cy = g(t), \qquad \text{(i)}$$

onde a, b e c são constantes positivas.

31. Se $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ são soluções da Eq. (i), mostre que $Y_1(t) - Y_2(t) \to 0$ quando $t \to \infty$. Esse resultado é verdadeiro se $b = 0$?

32. Se $g(t) = d$, uma constante, mostre que toda solução da Eq. (i) tende a d/c quando $t \to \infty$. O que acontece se $c = 0$? E se b também for nulo?

33. Indicamos, neste problema, um procedimento[7] diferente para resolver a equação diferencial

$$y'' + by' + cy = (D^2 + bD + c)y = g(t), \qquad \text{(i)}$$

onde b e c são constantes, e D denota diferenciação em relação a t. Sejam r_1 e r_2 os zeros do polinômio característico da equação homogênea associada. Essas raízes podem ser reais e distintas, reais e iguais, ou números complexos conjugados.
(a) Verifique que a Eq. (i) pode ser escrita na forma fatorada

$$(D - r_1)(D - r_2)y = g(t),$$

onde $r_1 + r_2 = -b$ e $r_1 r_2 = c$.
(b) Seja $u = (D - r_2)y$. Mostre que a solução da Eq. (i) pode ser encontrada resolvendo-se as duas equações de primeira ordem a seguir:

$$(D - r_1)u = g(t), \qquad (D - r_2)y = u(t).$$

Nos problemas de 34 a 37, use o método do Problema 33 para resolver a equação diferencial dada.

34. $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$ (veja o Exemplo 1)
35. $2y'' + 3y' + y = t^2 + 3\operatorname{sen} t$ (veja o Problema 7)
36. $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$ (veja o Problema 6)
37. $y'' + 2y' = 3 + 4\operatorname{sen} 2t$ (veja o Problema 4)

3.7 Variação dos Parâmetros

Vamos descrever, nesta seção, um outro método para encontrar uma solução particular de uma equação não-homogênea. Esse método, conhecido como **variação dos parâmetros**, é devido a Lagrange e complementa muito bem o método dos coeficientes indeterminados. A principal vantagem do método de variação dos parâmetros é que é um *método geral*; pelo menos em princípio, pode ser aplicado a qualquer equação e não precisa de hipóteses detalhadas sobre a forma da solução. De fato, usaremos esse método mais tarde nesta seção para deduzir uma fórmula para uma solução particular de uma equação diferencial linear não-homogênea de segunda ordem. Por outro lado, o método de variação dos parâmetros pode precisar que calculemos determinadas integrais envolvendo o termo não-homogêneo da equação diferencial, o que pode apresentar dificuldades. Antes de olhar o método no caso geral, vamos ilustrar seu uso em um exemplo.

Exemplo 1

Encontre uma solução particular de

$$y'' + 4y = 3\csc t. \qquad (1)$$

Observe que esse problema não é um bom candidato para o método de coeficientes indeterminados, como descrito na Seção 3.6, já que o termo não-homogêneo, $g(t) = 3 \csc t$, envolve um quociente (em vez de uma soma ou produto) de $\operatorname{sen} t$ ou $\cos t$. Precisamos, portanto, de uma abordagem diferente. Note, também, que a equação homogênea associada à Eq. (1) é

$$y'' + 4y = 0, \qquad (2)$$

e que a solução geral da Eq. (2) é

$$y_c(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t. \qquad (3)$$

A idéia básica no método de variação dos parâmetros é substituir as constantes c_1 e c_2 na Eq. (3) por funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$, res-

[7] R. S. Luthar, "Another Approach to a Standard Differential Equation", *Two Year College Mathematics Journal 10* (1979), pp. 200-201; veja também D. C. Sandell e F. M. Stein, "Factorization of Operators of Second Order Linear Homogeneous Ordinary Differential Equations", *Two Year College Mathematics Journal 8* (1977), pp. 132-141, para uma discussão mais geral de operadores que fatoram.

pectivamente, e depois determinar essas funções de modo que a expressão resultante

$$y = u_1(t)\cos 2t + u_2(t)\,\mathrm{sen}\,2t \tag{4}$$

seja solução da equação não-homogênea (1).

Para determinar u_1 e u_2, precisamos substituir y da Eq. (4) na Eq. (1). No entanto, mesmo sem fazer essa substituição, podemos antecipar que o resultado será uma única equação envolvendo alguma combinação de u_1, u_2 e suas derivadas primeiras e segundas. Como temos apenas uma equação e duas funções, esperamos que existam muitas escolhas possíveis para u_1 e u_2 que satisfaçam nossas necessidades. De outra forma, podemos ser capazes de impor uma segunda condição de nossa escolha, obtendo, assim, duas equações para as duas funções desconhecidas u_1 e u_2. Vamos mostrar em breve (seguindo Lagrange) que é possível escolher essa segunda condição de maneira a tornar os cálculos bem mais eficientes.

Voltando à Eq. (4), derivando-a e rearrumando os termos, obtemos

$$y' = -2u_1(t)\,\mathrm{sen}\,2t + 2u_2(t)\cos 2t + u_1'(t)\cos 2t + u_2'(t)\,\mathrm{sen}\,2t. \tag{5}$$

Mantendo em mente a possibilidade de se escolher uma segunda condição sobre u_1 e u_2, vamos supor que a soma das duas últimas parcelas à direita do sinal de igualdade na Eq. (5) seja nula; isto é, supomos que

$$u_1'(t)\cos 2t + u_2'(t)\,\mathrm{sen}\,2t = 0. \tag{6}$$

Segue, então da Eq. (5) que

$$y' = -2u_1(t)\,\mathrm{sen}\,2t + 2u_2(t)\cos 2t. \tag{7}$$

Embora o efeito, em última análise, da condição (6) ainda não esteja claro, pelo menos simplificou a expressão para y'. Continuando, derivando a Eq. (7), obtemos

$$y'' = -4u_1(t)\cos 2t - 4u_2(t)\,\mathrm{sen}\,2t - 2u_1'(t)\,\mathrm{sen}\,2t + 2u_2'(t)\cos 2t. \tag{8}$$

Então, substituindo y e y'' na Eq. (1) pelas Eqs. (4) e (8), respectivamente, vemos que u_1 e u_2 têm que satisfazer

$$-2u_1'(t)\,\mathrm{sen}\,2t + 2u_2'(t)\cos 2t = 3\csc t. \tag{9}$$

Resumindo nossos resultados até agora, queremos escolher u_1 e u_2 de modo a satisfazer as Eqs. (6) e (9). Essas equações podem ser consideradas como um par de equações lineares *algébricas* para as quantidades desconhecidas $u_1'(t)$ e $u_2'(t)$. As Eqs. (6) e (9) podem ser resolvidas de diversas maneiras. Por exemplo, resolvendo a Eq. (6) para $u_2'(t)$, temos

$$u_2'(t) = -u_1'(t)\frac{\cos 2t}{\mathrm{sen}\,2t}. \tag{10}$$

Substituindo $u_2'(t)$ na Eq. (9) por essa expressão e simplificando, obtemos

$$u_1'(t) = -\frac{3\csc t\,\mathrm{sen}\,2t}{2} = -3\cos t. \tag{11}$$

Agora, substituindo essa expressão para $u_1'(t)$ de volta na Eq. (10) e usando as fórmulas para o ângulo duplo, vemos que

$$u_2'(t) = \frac{3\cos t\cos 2t}{\mathrm{sen}\,2t} = \frac{3(1-2\,\mathrm{sen}^2 t)}{2\,\mathrm{sen}\,t} = \frac{3}{2}\csc t - 3\,\mathrm{sen}\,t. \tag{12}$$

Tendo obtido $u_1'(t)$ e $u_2'(t)$, integramos a seguir para encontrar $u_1(t)$ e $u_2(t)$. O resultado é

$$u_1(t) = -3\,\mathrm{sen}\,t + c_1 \tag{13}$$

e

$$u_2(t) = \tfrac{3}{2}\ln|\csc t - \mathrm{cotg}\,t| + 3\cos t + c_2. \tag{14}$$

Substituindo essas expressões na Eq. (4), temos

$$y = -3\,\mathrm{sen}\,t\cos 2t + \tfrac{3}{2}\ln|\csc t - \mathrm{cotg}\,t|\,\mathrm{sen}\,2t + 3\cos t\,\mathrm{sen}\,2t + c_1\cos 2t + c_2\,\mathrm{sen}\,2t.$$

Finalmente, usando mais uma vez as fórmulas para o dobro do ângulo, obtemos

$$y = 3\,\mathrm{sen}\,t + \tfrac{3}{2}\ln|\csc t - \mathrm{cotg}\,t|\,\mathrm{sen}\,2t + c_1\cos 2t + c_2\,\mathrm{sen}\,2t. \tag{15}$$

As parcelas na Eq. (15) envolvendo as constantes arbitrárias c_1 e c_2 correspondem à solução geral da equação homogênea associada, enquanto a soma restante forma uma solução particular da equação não-homogênea (1). Portanto, a Eq. (15) é a solução geral da Eq. (1).

No exemplo precedente, o método de variação dos parâmetros funcionou bem para determinar uma solução particular e, portanto, a solução geral, da Eq. (1). A próxima pergunta é se esse método pode ser aplicado efetivamente a uma equação arbitrária. Vamos considerar, então,

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \tag{16}$$

onde p, q e g são funções contínuas dadas. Como ponto de partida, vamos supor que conhecemos a solução geral

$$y_c(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \tag{17}$$

da equação homogênea associada

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{18}$$

Essa é uma hipótese importante, já que, até agora, só mostramos como resolver a Eq. (18) se tiver coeficientes constantes. Se a Eq. (18) tem coeficientes que dependem de t, então, em geral, os métodos descritos no Cap. 5 têm que ser usados para se obter $y_c(t)$.

A idéia crucial, como ilustrado no Exemplo 1, é substituir as constantes c_1 e c_2 na Eq. (17) por funções $u_1(t)$ e $u_2(t)$, respectivamente; isso nos dá

$$y = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t). \tag{19}$$

Podemos, então, tentar determinar $u_1(t)$ e $u_2(t)$ de modo que a expressão na Eq. (19) seja solução da equação não-homogênea (16), em vez da equação homogênea (18). Derivando a Eq. (19), obtemos

$$y' = u_1'(t)y_1(t) + u_1(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2(t) + u_2(t)y_2'(t). \tag{20}$$

Como no Exemplo 1, vamos igualar a zero a soma dos termos envolvendo $u_1'(t)$ e $u_2'(t)$ na Eq. (20); isto é, vamos supor que

$$u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0. \tag{21}$$

Então, da Eq. (20), temos

$$y' = u_1(t)y_1'(t) + u_2(t)y_2'(t). \tag{22}$$

Derivando mais uma vez, obtemos

$$y'' = u_1'(t)y_1'(t) + u_1(t)y_1''(t) + u_2'(t)y_2'(t) + u_2(t)y_2''(t). \tag{23}$$

Agora, vamos substituir y, y' e y'' na Eq. (16) pelas expressões nas Eqs. (19), (22) e (23), respectivamente. Após rearrumar os termos na equação resultante, vemos que

$$\begin{aligned} u_1(t)[y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)] \\ + u_2(t)[y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t)] \\ + u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t). \end{aligned} \tag{24}$$

Cada uma das expressões entre colchetes na Eq. (24) é nula, pois ambas as funções y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea (18). Portanto, a Eq. (24) se reduz a

$$u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t). \tag{25}$$

As Eqs. (21) e (25) formam um sistema de duas equações lineares algébricas para as derivadas $u_1'(t)$ e $u_2'(t)$ das funções desconhecidas. Elas correspondem, exatamente, às Eqs. (6) e (9) no Exemplo 1.

Resolvendo o sistema (21), (25), obtemos

$$u_1'(t) = -\frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}, \qquad u_2'(t) = \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}, \tag{26}$$

onde $W(y_1, y_2)$ é o wronskiano de y_1 e y_2. Note que a divisão por W é permitida, já que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções e, portanto, seu wronskiano não se anula. Integrando a Eq. (26), encontramos as funções desejadas $u_1(t)$ e $u_2(t)$, a saber,

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -\int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\,dt + c_1, \\ u_2(t) &= \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\,dt + c_2. \end{aligned} \tag{27}$$

Se as integrais nas Eqs. (27) puderem ser calculadas em termos de funções elementares, então substituímos os resultados na Eq. (19), obtendo, assim, a solução geral da Eq. (16). Mais geralmente, a solução sempre pode ser expressa em termos de integrais, como enunciado no teorema a seguir.

Teorema 3.7.1

Se as funções p, q e g são contínuas em um intervalo aberto I e se as funções y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes da equação homogênea (18) associada à equação não-homogênea (16),

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t),$$

então uma solução particular da Eq. (16) é

$$Y(t) = -y_1(t)\int \frac{y_2(s)g(s)}{W(y_1,y_2)(s)}\,ds + y_2(t)\int \frac{y_1(s)g(s)}{W(y_1,y_2)(s)}\,ds, \tag{28}$$

onde t_0 é qualquer ponto em I escolhido convenientemente. A solução geral é

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + Y(t), \tag{29}$$

como enunciado no Teorema 3.6.2.

Examinando a expressão (28) e revendo o processo segundo o qual a deduzimos, vemos que podem existir duas grandes dificuldades na utilização do método de variação dos parâmetros. Como mencionamos anteriormente, uma é a determinação de y_1 e y_2, ou seja, a determinação de um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea (18), quando os coeficientes da equação não são constantes. Uma outra possível dificuldade é o cálculo das integrais que aparecem na Eq. (28). Isso depende inteiramente da natureza das funções y_1, y_2 e g. Ao usar a Eq. (28), certifique-se de que a equação diferencial é exatamente da forma (16); caso contrário, o termo não-homogêneo $g(t)$ não será identificado corretamente.

Uma grande vantagem do método de variação dos parâmetros é que a Eq. (28) fornece uma expressão para a solução particular $Y(t)$ em termos de uma função não-homogênea arbitrária $g(t)$. Essa expressão é um bom ponto de partida se você quiser investigar o efeito de variações no termo não-homogêneo, ou se quiser analisar a resposta de um sistema sujeito a um número de forças externas diferentes.

Problemas

Nos problemas de 1 a 4, use o método de variação dos parâmetros para encontrar uma solução particular da equação diferencial dada. Depois verifique sua resposta usando o método dos coeficientes indeterminados.

1. $y'' - 5y' + 6y = 2e^t$
2. $y'' - y' - 2y = 2e^{-t}$
3. $y'' + 2y' + y = 3e^{-t}$
4. $4y'' - 4y' + y = 16e^{t/2}$

Nos problemas de 5 a 12, encontre a solução geral da equação diferencial dada. Nos Problemas 11 e 12, g é uma função contínua arbitrária.

5. $y'' + y = \operatorname{tg} t, \quad 0 < t < \pi/2$
6. $y'' + 9y = 9\sec^2 3t, \quad 0 < t < \pi/6$
7. $y'' + 4y' + 4y = t^{-2}e^{-2t}, \quad t > 0$
8. $y'' + 4y = 3\csc 2t, \quad 0 < t < \pi/2$
9. $4y'' + y = 2\sec(t/2), \quad -\pi < t < \pi$
10. $y'' - 2y' + y = e^t/(1 + t^2)$
11. $y'' - 5y' + 6y = g(t)$
12. $y'' + 4y = g(t)$

Nos problemas de 13 a 20, verifique que as funções dadas y_1 e y_2 satisfazem a equação homogênea associada, depois encontre uma solução particular da equação não-homogênea dada. Nos Problemas 19 e 20, g é uma função contínua arbitrária.

13. $t^2y'' - 2y = 3t^2 - 1, \quad t > 0;$
$y_1(t) = t^2, \quad y_2(t) = t^{-1}$
14. $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 2t^3,$
$t > 0; \quad y_1(t) = t, \quad y_2(t) = te^t$
15. $ty'' - (1+t)y' + y = t^2e^{2t}, \quad t > 0;$
$y_1(t) = 1 + t, \quad y_2(t) = e^t$
16. $(1-t)y'' + ty' - y = 2(t-1)^2e^{-t}, \quad 0 < t < 1;$
$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = t$
17. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln x, \quad x > 0;$
$y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x^2 \ln x$
18. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0{,}25)y = 3x^{3/2}\operatorname{sen} x, \quad x > 0;$
$y_1(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x, \quad y_2(x) = x^{-1/2}\cos x$
19. $(1-x)y'' + xy' - y = g(x), \quad 0 < x < 1;$
$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = x$
20. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0{,}25)y = g(x), \quad x > 0;$
$y_1(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x, \quad y_2(x) = x^{-1/2}\cos x$
21. Mostre que a solução do problema de valor inicial

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0' \quad \text{(i)}$$

pode ser escrita como $y = u(t) + v(t)$, onde u e v são soluções dos dois problemas de valor inicial

$$L[u] = 0, \quad u(t_0) = y_0, \quad u'(t_0) = y_0', \quad \text{(ii)}$$

$$L[v] = g(t), \quad v(t_0) = 0, \quad v'(t_0) = 0, \quad \text{(iii)}$$

respectivamente. Em outras palavras, as partes não-homogêneas na equação diferencial e nas condições iniciais podem ser tratadas separadamente. Note que u é fácil de achar, se for conhecido um conjunto fundamental de soluções para $L[u] = 0$.
22. Escolhendo o limite inferior de integração na Eq. (28) no texto como o ponto inicial t_0, mostre que $Y(t)$ torna-se

$$Y(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{y_1(s)y_2(t) - y_1(t)y_2(s)}{y_1(s)y_2'(s) - y_1'(s)y_2(s)} g(s)\, ds.$$

Mostre que $Y(t)$ é uma solução do problema de valor inicial

$$L[y] = g(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0.$$

Assim, Y pode ser identificado com v no Problema 21.
23. (a) Use o resultado do Problema 22 para mostrar que a solução do problema de valor inicial

$$y'' + y = g(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0 \quad \text{(i)}$$

é

$$y = \int_{t_0}^{t} \operatorname{sen}(t - s) g(s)\, ds. \quad \text{(ii)}$$

(b) Use o resultado do Problema 21 para encontrar a solução do problema de valor inicial

$$y'' + y = g(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0'.$$

24. Use o resultado do Problema 22 para encontrar a solução do problema de valor inicial

$$L[y] = (D - a)(D - b)y = g(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0,$$

onde a e b são números reais com $a \neq b$.
25. Use o resultado do Problema 22 para encontrar a solução do problema de valor inicial

$$L[y] = [D^2 - 2\lambda D + (\lambda^2 + \mu^2)]y = g(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0.$$

Note que as raízes da equação característica são $\lambda \pm i\mu$.
26. Use o resultado do Problema 22 para encontrar a solução do problema de valor inicial

$$L[y] = (D - a)^2 y = g(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0,$$

onde a é um número real arbitrário.
27. Combinando os resultados dos problemas de 24 a 26 mostre que a solução do problema de valor inicial

$$L[y] = (aD^2 + bD + c)y = g(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0,$$

onde a, b e c são constantes, tem a forma

$$y = \phi(t) = \int_{t_0}^{t} K(t - s) g(s)\, ds. \quad \text{(i)}$$

A função K depende apenas das soluções y_1 e y_2 da equação homogênea associada e é independente do termo não-homogêneo. Uma vez determinado K, todos os problemas não-homogêneos envolvendo o mesmo operador diferencial L ficam reduzidos ao cálculo de uma integral. Note, também, que, embora K dependa de t e s, aparece apenas a combinação $t - s$, de modo que K é, de fato, uma função de uma única variável. Quando pensamos em $g(t)$ como sendo os dados de entrada (*input*) do problema e em $\phi(t)$ como os dados de saída (*output*), segue da Eq. (i) que os dados de saída dependem dos dados de entrada em todo o intervalo, do ponto inicial t_0 ao ponto atual t. A integral na Eq. (i) é a **convolução** de K e g, e K é o **núcleo**.
28. O método de redução de ordem (Seção 3.5) também pode ser usado para a equação não-homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad \text{(i)}$$

desde que se conheça uma solução y_1 da equação homogênea associada. Seja $y = v(t)y_1(t)$ e mostre que y satisfaz a Eq. (i) se v for solução de

$$y_1(t)v'' + [2y_1'(t) + p(t)y_1(t)]v' = g(t). \quad \text{(ii)}$$

A Eq. (ii) é uma equação linear de primeira ordem em v. Resolvendo essa equação, integrando o resultado e, depois, multiplicando por $y_1(t)$, obtemos a solução geral da Eq. (i).

Nos problemas de 29 a 32, use o método esquematizado no Problema 28 para resolver a equação diferencial dada.

29. $t^2y'' - 2ty' + 2y = 4t^2, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t$
30. $t^2y'' + 7ty' + 5y = t, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t^{-1}$
31. $ty'' - (1+t)y' + y = t^2e^{2t}, \quad t > 0; \quad y_1(t) = 1 + t$ (veja o Problema 15)
32. $(1-t)y'' + ty' - y = 2(t-1)^2e^{-t}, \quad 0 < t < 1;$
$y_1(t) = e^t$ (veja o Problema 16)

3.8 Vibrações Mecânicas e Elétricas

Uma das razões por que vale a pena estudar equações lineares com coeficientes constantes é que elas servem como modelos matemáticos de alguns processos físicos importantes. Duas áreas importantes de aplicações são os campos de vibrações mecânicas

e elétricas. Por exemplo, o movimento de uma massa presa em uma mola, as torções de uma haste com um volante, o fluxo de corrente elétrica em um circuito simples em série e muitos outros problemas físicos são bem descritos pela solução de um problema de valor inicial da forma

$$ay'' + by' + cy = g(t), \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0'. \quad (1)$$

Isso ilustra uma relação fundamental entre a matemática e a física: *muitos problemas físicos têm o mesmo modelo matemático*. Assim, uma vez sabendo como resolver o problema de valor inicial (1), é necessário, apenas, interpretar apropriadamente as constantes a, b e c, e as funções y e g, para obter soluções de problemas físicos diferentes.

Estudaremos o movimento de uma massa presa a uma mola porque uma compreensão do comportamento desse sistema simples é o primeiro passo na investigação de sistemas vibratórios mais complexos. Além disso, os princípios envolvidos são os mesmos para muitos problemas. Considere uma massa m pendurada em uma das extremidades de uma mola vertical com comprimento original l, como mostra a Fig. 3.8.1. A massa causa um alongamento L da mola para baixo (no sentido positivo). Existem duas forças agindo sobre o ponto onde a massa está presa à mola; veja a Fig. 3.8.2. A força gravitacional, ou peso da massa, puxa para baixo e tem módulo igual a mg, onde g é a aceleração da gravidade. Existe também uma força, F_s, devido à mola, que puxa para cima. Se supusermos que o alongamento L da mola é pequeno, a força da mola fica muito próxima de ser proporcional a L; isso é conhecido como a lei de Hooke.[8] Assim, escrevemos $F_s = -kL$, onde a constante de proporcionalidade k é chamada constante da mola e o sinal de menos é devido ao fato de a força da mola puxar para cima (no sentido negativo). Como a massa está em equilíbrio, as duas forças estão balanceadas, o que significa que

$$mg - kL = 0. \quad (2)$$

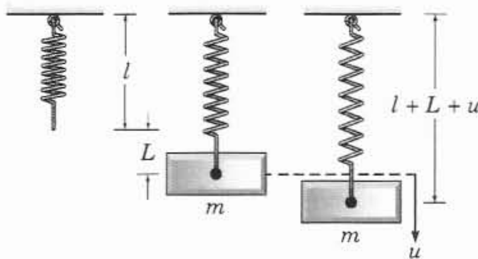


FIG. 3.8.1 Um sistema massa-mola.



FIG. 3.8.2 Diagrama de forças para um sistema massa-mola.

[8] Robert Hooke (1635-1703) foi um cientista inglês com interesses variados. Seu livro mais importante, *Micrographia*, foi publicado em 1665 e descreve uma variedade de observações microscópicas. Hooke publicou sua lei sobre o comportamento elástico pela primeira vez em 1676 como *ceiiinosssttuv*; em 1678 ele deu a interpretação como *ut tensio sic vis*, o que significa, *grosso modo*, "como a força, assim é o deslocamento".

Para um dado peso $w = mg$, pode-se medir L e depois usar a Eq. (2) para determinar k. Note que k tem unidades de força/comprimento.

No problema dinâmico correspondente, estamos interessados em estudar o movimento da massa, seja na presença de uma força externa ou seja sob um deslocamento inicial. Denote por $u(t)$, medido positivamente no sentido para baixo, o deslocamento da massa a partir de sua posição de equilíbrio no instante t; veja a Fig. 3.8.1. Então $u(t)$ está relacionado às forças que agem sobre a massa pela lei do movimento de Newton,

$$mu''(t) = f(t), \quad (3)$$

onde u'' é a aceleração da massa e f é a força total agindo sobre a massa. Note que tanto u quanto f são funções do tempo. Existem quatro forças separadas que têm que ser consideradas para se determinar f:

1. O peso $w = mg$ da massa sempre age para baixo.
2. A força da mola F_s é suposta de ser proporcional ao alongamento total $L + u$ da mola e sempre age para restaurar a mola à sua posição natural. Se $L + u > 0$, então a mola está distendida e a força da mola puxa para cima. Nesse caso,

$$F_s = -k(L + u). \quad (4)$$

Por outro lado, se $L + u < 0$, então a mola está comprimida de uma distância $|L + u|$ e a força da mola, agora puxando para baixo, é dada por $F_s = k|L + u|$. No entanto, quando $L + u < 0$, temos $|L + u| = -(L + u)$, logo F_s é dada, novamente, pela Eq. (4). Assim, independente da posição da massa, a força exercida pela mola sempre é dada pela Eq. (4).
3. A força de amortecimento ou resistência F_d sempre age no sentido oposto ao sentido do movimento da massa. Essa força pode aparecer de diversas fontes: resistência do ar ou de outro meio onde a massa esteja se movendo, dissipação de energia interna devido à extensão ou compressão da mola, atrito entre a massa e qualquer guia (se existir) que limite seu movimento a uma dimensão, ou um dispositivo mecânico (amortecedor) que gere uma força de resistência ao movimento da massa. Em qualquer caso, supomos que essa força de resistência é proporcional ao módulo da velocidade $|du/dt|$ da massa; em geral, isso é chamado de amortecimento viscoso. Se $du/dt > 0$, então u está crescendo, de modo que a massa está se movendo para baixo. Nesse caso F_d aponta para cima e é dada por

$$F_d(t) = -\gamma u'(t), \quad (5)$$

onde γ é uma constante positiva de proporcionalidade conhecida como constante de amortecimento. Por outro lado, se $du/dt < 0$, então u está diminuindo, de modo que a massa está se movendo para cima e F_d aponta para baixo. Nesse caso, $F_d = \gamma|u'(t)|$; como $|u'(t)| = -u'(t)$, segue que F_d é dado, novamente, pela Eq. (5). Assim, independentemente do sentido de movimento da massa, a força de amortecimento sempre é dada pela Eq. (5).

A força de amortecimento pode ser bastante complicada, e a hipótese de que ela é modelada adequadamente pela Eq. (5) é discutível. Alguns amortecedores funcionam como a Eq. (5) descreve e, se as outras fontes de dissipação forem pequenas, pode ser possível ignorá-las todas, ou ajustar a constante de amortecimento γ de modo a aproximá-las. Um grande benefício da hipótese (5) é que ela nos leva a uma equação diferencial linear (em vez de não-linear). Isso, por sua vez, sig-

nifica que pode ser feita uma análise completa do sistema diretamente, como mostraremos nesta e na próxima seção.

4. Pode ser aplicada uma força externa $F(t)$ apontando para baixo ou para cima, dependendo se $F(t)$ é positiva ou negativa. Isso poderia ser uma força devida ao movimento da estrutura onde está presa a mola, ou poderia ser uma força aplicada diretamente na massa. Muitas vezes a força externa é periódica.

Levando em consideração essas forças, podemos reescrever a lei de Newton (3) como

$$\begin{aligned} mu''(t) &= mg + F_s(t) + F_d(t) + F(t) \\ &= mg - k[L + u(t)] - \gamma u'(t) + F(t). \end{aligned} \tag{6}$$

Como $mg - kL = 0$ pela Eq. (2), segue que a equação de movimento da massa é

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = F(t), \tag{7}$$

onde as constantes m, γ e k são positivas. Note que a Eq. (7) tem a mesma forma que a Eq. (1).

É importante compreender que a Eq. (7) é apenas uma equação aproximada para o deslocamento $u(t)$. Em particular, ambas as Eqs. (4) e (5) devem ser vistas como aproximações para a força da mola e a força de amortecimento, respectivamente. Não levamos em consideração na nossa discussão, também, a massa da mola, supondo-a desprezível perto da massa do corpo.

A formulação completa do problema de vibração requer que especifiquemos duas condições iniciais, a saber, a posição inicial u_0 e a velocidade inicial v_0 da massa:

$$u(0) = u_0, \qquad u'(0) = v_0. \tag{8}$$

Segue do Teorema 3.2.1 que essas condições fazem com que o problema matemático tenha uma única solução. Isso é consistente com nossa intuição física de que, se a massa é colocada em movimento com um deslocamento e velocidade iniciais, então sua posição estará unicamente determinada em todos os instantes futuros. A posição da massa é dada (aproximadamente) pela solução da Eq. (7) sujeita às condições iniciais dadas (8).

Exemplo 1

Uma massa de 4 libras (cerca de 1,8 kg) estica uma mola de 2 polegadas (cerca de 5 cm). Suponha que a massa é deslocada 6 polegadas adicionais e depois é solta. A massa está em um meio que exerce uma resistência viscosa de 6 libras quando a massa está a uma velocidade de 3 pés por segundo (cerca de 91 cm). Sob as hipóteses discutidas nesta seção, formule o problema de valor inicial que governa o movimento da massa.

O problema de valor inicial pedido consiste na equação diferencial (7) e condições iniciais (8), de modo que nossa tarefa é determinar as diversas constantes que aparecem nessas equações. A primeira etapa é escolher as unidades de medida. Da forma como foi enunciado o problema, é natural usar as medidas inglesas, no lugar do sistema métrico de unidades. A única unidade de tempo mencionada é o segundo, de modo que mediremos t em segundos. Por outro lado, o enunciado contém tanto pés quanto polegadas como unidades de comprimento. Não importa qual a medida a ser usada, mas, uma vez escolhida a medida, temos que ser consistentes. Para definir, vamos medir o deslocamento em pés (um pé tem 12 polegadas).

Como nada foi dito no enunciado do problema sobre uma força externa, vamos supor que $F(t) = 0$. Para determinar m, note que

$$m = \frac{w}{g} = \frac{4\ \text{lb}}{32\ \text{pés/s}^2} = \frac{1}{8}\ \frac{\text{lb-s}^2}{\text{pés}}.$$

O coeficiente de amortecimento γ é determinado da afirmação de que $\gamma u'$ é igual a 6 lb quando u' é 3 pés/s. Logo,

$$\gamma = \frac{6\ \text{lb}}{3\ \text{pés/s}} = 2\frac{\text{lb-s}}{\text{pés}}.$$

A constante da mola k é encontrada a partir da afirmação de que a massa estica a mola por 2 in, ou 1/6 pés. Portanto,

$$k = \frac{4\ \text{lb}}{1/6\ \text{pés}} = 24\frac{\text{lb}}{\text{pés}}.$$

Em conseqüência, a Eq. (7) fica

$$\tfrac{1}{8}u'' + 2u' + 24u = 0,$$

ou

$$u'' + 16u' + 192u = 0. \tag{9}$$

As condições iniciais são

$$u(0) = \tfrac{1}{2}, \qquad u'(0) = 0. \tag{10}$$

A segunda condição inicial é implicada pela palavra "solta" no enunciado do problema, que interpretamos como a massa sendo colocada em movimento sem velocidade inicial.

Vibrações Livres Não-Amortecidas. Se não existe força externa, então $F(t) = 0$ na Eq. (7). Vamos supor, também, que não há amortecimento, de modo que $\gamma = 0$; essa é uma configuração idealizada do sistema, que dificilmente (se alguma vez) acontece na prática. No entanto, se o amortecimento for muito pequeno, a hipótese de que não há amortecimento pode dar resultados satisfatórios em intervalos de tempo pequenos ou até moderados. Nesse caso a equação de movimento (7) se reduz a

$$mu'' + ku = 0. \tag{11}$$

A solução geral da Eq. (11) é

$$u = A\cos\omega_0 t + B\,\text{sen}\,\omega_0 t, \tag{12}$$

onde

$$\omega_0^2 = k/m. \tag{13}$$

As constantes arbitrárias A e B podem ser determinadas se forem dadas condições iniciais da forma (8).

Ao discutir a solução da Eq. (11), é conveniente reescrever a Eq. (12) na forma

$$u = R\cos(\omega_0 t - \delta), \tag{14}$$

ou

$$u = R\cos\delta\cos\omega_0 t + R\,\mathrm{sen}\,\delta\,\mathrm{sen}\,\omega_0 t. \tag{15}$$

Comparando as Eqs. (15) e (12), vemos que A, B, R e δ estão relacionados pelas equações

$$A = R\cos\delta, \qquad B = R\,\mathrm{sen}\,\delta. \tag{16}$$

Assim,

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}, \qquad \mathrm{tg}\,\delta = B/A. \tag{17}$$

Ao calcular δ é preciso tomar cuidado para se escolher o quadrante correto; isso pode ser feito verificando-se os sinais de cos δ e sen δ nas Eqs. (16).

O gráfico da função na Eq. (14), ou na equação equivalente (12), aparece na Fig. 3.8.3 para um conjunto típico de condições iniciais. O gráfico é uma onda co-senoidal deslocada que descreve um movimento periódico, ou harmônico simples, da massa. O **período** do movimento é

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\left(\frac{m}{k}\right)^{1/2}. \tag{18}$$

A freqüência circular $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, medida em radianos por unidade de tempo, é chamada de **freqüência natural** da vibração. O deslocamento máximo R da massa a partir de sua posição de equilíbrio é a **amplitude** do movimento. O parâmetro adimensional δ é chamado de **fase**, ou ângulo de fase, e mede o deslocamento da onda a partir de sua posição normal, correspondendo a $\delta = 0$.

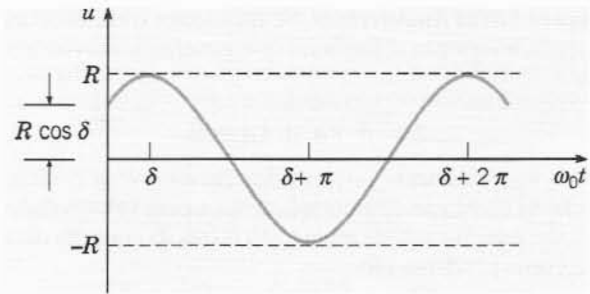


FIG. 3.8.3 Movimento harmônico simples; $u = R\cos(\omega_0 t - \delta)$.

Note que o movimento descrito pela Eq. (14) tem amplitude constante, que não diminui com o tempo. Isso reflete o fato de, na ausência de amortecimento, o sistema não ter como dissipar a energia dada pelos deslocamento e velocidade iniciais. Além disso, para uma massa m e uma constante de mola k dadas, o sistema sempre vibra à mesma freqüência ω_0, independentemente das condições iniciais. No entanto, as condições iniciais ajudam a determinar a amplitude do movimento. Finalmente, note que, pela Eq. (18), T aumenta quando m aumenta, de modo que massas maiores vibram mais devagar. Por outro lado, T diminui quando k aumenta, o que significa que molas mais duras fazem com que o sistema vibre mais rapidamente.

Exemplo 2

Suponha que uma massa de 10 lb (cerca de 4,5 kg) estica uma mola de 2 in (cerca de 5 cm). Se a massa for deslocada 2 polegadas a mais e depois colocada em movimento com uma velocidade inicial apontando para cima de 1 ft/s (cerca de 30 cm/s), determine a posição da massa em qualquer instante posterior. Determine, também, o período, a amplitude e a fase do movimento.

A constante da mola é k = 10 lb/2 in = 60 lb/ft, e a massa é $m = w/g$ = 10/32 lb s²/ft.[9] Logo, a equação de movimento se reduz a

$$u'' + 192u = 0, \tag{19}$$

e a solução geral é

$$u = A\cos(8\sqrt{3}t) + B\,\mathrm{sen}(8\sqrt{3}t).$$

A solução que satisfaz as condições iniciais $u(0) = 1/6$ ft e $u'(0) = -1$ ft/s é

$$u = \frac{1}{6}\cos(8\sqrt{3}t) - \frac{1}{8\sqrt{3}}\mathrm{sen}(8\sqrt{3}t). \tag{20}$$

A freqüência natural é $\omega_0 = \sqrt{192} \cong 13{,}856$ rad/s, de modo que $T = 2\pi/\omega_0 \cong 0{,}45345$ s. A amplitude R e a fase δ são dadas pelas Eqs. (17). Temos

$$R^2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{192} = \frac{19}{576}, \quad \text{logo } R \cong 0{,}18162 \text{ pés.}$$

A segunda das Eqs. (17) nos dá tg $\delta = -\sqrt{3}/4$. Existem duas soluções dessa equação, uma no segundo quadrante e outra no quarto. No problema atual, cos $\delta > 0$ e sen $\delta < 0$, logo δ está no quarto quadrante e temos

$$\delta = -\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{3}/4) \cong -0{,}40864 \text{ rad.}$$

O gráfico da solução (20) está ilustrado na Fig. 3.8.4.

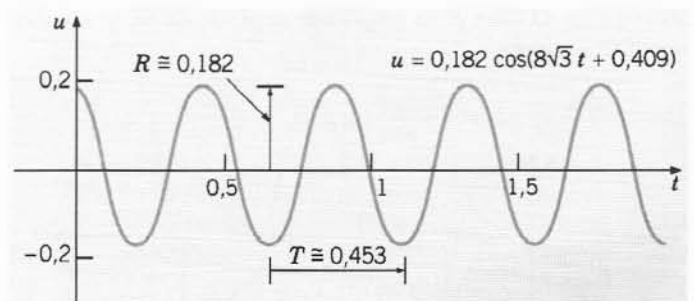


FIG. 3.8.4 Uma vibração livre sem amortecimento; $u'' + 192u = 0$, $u(0) = 1/6$, $u'(0) = -1$.

[9] A aceleração da gravidade nas medidas inglesas é de 32 ft/s². (*N. T.*)

Vibrações Livres Amortecidas. Se incluirmos o efeito do amortecimento, a equação diferencial que governa o movimento da massa é

$$mu'' + \gamma u' + ku = 0. \tag{21}$$

Estamos especialmente interessados em examinar o efeito da variação na constante de amortecimento γ para valores dados da massa m e da constante da mola k. As raízes da equação característica correspondente são

$$r_1, r_2 = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m} = \frac{\gamma}{2m}\left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4km}{\gamma^2}}\right). \tag{22}$$

Dependendo do sinal de $\gamma^2 - 4km$, a solução u tem uma das seguintes formas:

$$\gamma^2 - 4km > 0, \quad u = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}; \tag{23}$$

$$\gamma^2 - 4km = 0, \quad u = (A + Bt)e^{-\gamma t/2m}; \tag{24}$$

$$\gamma^2 - 4km < 0, \quad u = e^{-\gamma t/2m}(A\cos\mu t + B\operatorname{sen}\mu t), \quad \mu = \frac{(4km - \gamma^2)^{1/2}}{2m} > 0. \tag{25}$$

Como m, γ e k são positivos, $\gamma^2 - 4km$ é sempre menor do que γ^2. Então, se $\gamma^2 - 4km \geq 0$, os valores de r_1 e r_2 dados pela Eq. (22) são *negativos*. Se $\gamma^2 - 4km < 0$, então os valores de r_1 e r_2 são complexos, mas com parte real *negativa*. Assim, em todos os casos, a solução u tende a zero quando $t \to \infty$; isso ocorre independentemente dos valores das constantes arbitrárias A e B, isto é, independentemente das condições iniciais. Isso confirma nossa expectativa intuitiva de que o amortecimento dissipa gradualmente a energia do sistema e, em conseqüência, o movimento vai parando com o passar do tempo.

O caso mais importante é o terceiro, que ocorre quando o amortecimento é pequeno. Fazendo $A = R\cos\delta$ e $B = R\operatorname{sen}\delta$ na Eq. (25), obtemos

$$u = Re^{-\gamma t/2m}\cos(\mu t - \delta). \tag{26}$$

O deslocamento u fica entre as curvas $u = \pm Re^{-\gamma t/2m}$; logo, parece-se com uma onda co-senoidal cuja amplitude diminui quando t aumenta. Um exemplo típico está esboçado na Fig. 3.8.5. O movimento é chamado de oscilação amortecida, ou vibração amortecida. O fator R na amplitude depende de m, γ, k e das condições iniciais.

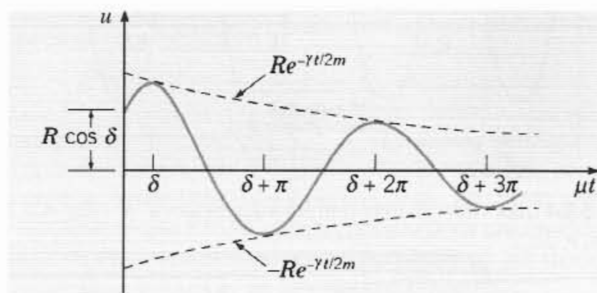


FIG. 3.8.5 Vibração amortecida; $u = Re^{-\gamma t/2m}\cos(\mu t - \delta)$.

Embora o movimento não seja periódico, o parâmetro μ determina a freqüência segundo a qual a massa oscila para cima e para baixo; em conseqüência, μ é chamada de **quase freqüência**. Comparando μ com a freqüência ω_0 do movimento sem amortecimento, vemos que

$$\frac{\mu}{\omega_0} = \frac{(4km - \gamma^2)^{1/2}/2m}{\sqrt{k/m}} = \left(1 - \frac{\gamma^2}{4km}\right)^{1/2} \cong 1 - \frac{\gamma^2}{8km}. \tag{27}$$

A última aproximação é válida quando $\gamma^2/4km$ é pequeno; referimo-nos a essa situação como "pouco amortecida". Assim, o efeito de pouco amortecimento é reduzir, ligeiramente, a freqüência da oscilação. Por analogia com a Eq. (18), a quantidade $T_d = 2\pi/\mu$ é chamada de **quase período**. É o tempo entre dois máximos ou dois mínimos sucessivos da posição da massa, ou entre passagens sucessivas da massa por sua posição de equilíbrio indo no mesmo sentido. A relação entre T_d e T é dada por

$$\frac{T_d}{T} = \frac{\omega_0}{\mu} = \left(1 - \frac{\gamma^2}{4km}\right)^{-1/2} \cong \left(1 + \frac{\gamma^2}{8km}\right), \tag{28}$$

onde, novamente, a última aproximação é válida quando $\gamma^2/4km$ é pequeno. Assim, pouco amortecimento aumenta o quase período.

As Eqs. (27) e (28) reforçam o significado da razão adimensional $\gamma^2/4km$. Não é apenas o tamanho de γ que determina se o movimento é pouco ou muito amortecido, mas o tamanho de γ^2 comparado com $4km$. Quando $\gamma^2/4km$ é pequeno, o amortecimento tem efeito pequeno na quase freqüência e no quase período do movimento. Por outro lado, se queremos estudar o movimento detalhado da massa em todos os instantes, então *nunca* podemos desprezar a força de amortecimento, não importa o quão pequena.

Quando $\gamma^2/4km$ aumenta, a quase freqüência μ diminui e o quase período T_d aumenta. De fato, $\mu \to 0$ e $T_d \to \infty$ quando $\gamma \to 2\sqrt{km}$. Esse valor é conhecido como **amortecimento crítico**, enquanto para valores maiores de γ o movimento é dito **superamortecido**. Nesses casos, dados pelas Eqs. (24) e (23), respectivamente, a massa volta à sua posição de equilíbrio, mas não oscila em torno dela, como para γ pequeno. A Fig. 3.8.6 mostra dois exemplos típicos de movimento com amortecimento crítico, e a situação é mais discutida nos Problemas 21 e 22.

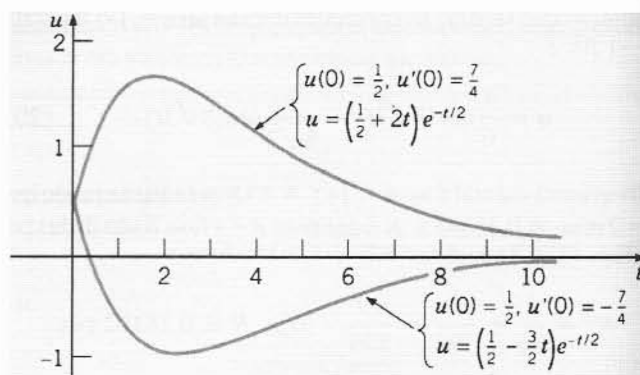


FIG. 3.8.6 Movimentos com amortecimento crítico: $u'' + u' + 0{,}25u = 0$; $u = (A + Bt)e^{-t/2}$.

Exemplo 3

O movimento de determinado sistema mola-massa é governado pela equação diferencial

$$u'' + 0{,}125u' + u = 0, \qquad (29)$$

onde u é medido em pés e t em segundos. Se $u(0) = 2$ e $u'(0) = 0$, determine a posição da massa em qualquer instante. Encontre a quase freqüência e o quase período, assim como o instante no qual a massa passa pela primeira vez pela sua posição de equilíbrio. Encontre, também, o instante τ tal que $|u(t)| < 0{,}1$ para todo $t > \tau$.

A solução da Eq. (29) é

$$u = e^{-t/16}\left[A\cos\frac{\sqrt{255}}{16}t + B\,\mathrm{sen}\frac{\sqrt{255}}{16}t\right].$$

Para satisfazer as condições iniciais, precisamos escolher $A = 2$ e $B = 2/\sqrt{255}$, logo a solução do problema de valor inicial é

$$u = e^{-t/16}\left(2\cos\frac{\sqrt{255}}{16}t + \frac{2}{\sqrt{255}}\,\mathrm{sen}\frac{\sqrt{255}}{16}t\right)$$

$$= \frac{32}{\sqrt{255}}e^{-t/16}\cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}t - \delta\right), \qquad (30)$$

onde $\mathrm{tg}\,\delta = 1/\sqrt{255}$, de modo que $\delta \approx 0{,}06254$. A Fig. 3.8.7 mostra o deslocamento da massa em função do tempo. Para efeitos de comparação, mostramos, também, o movimento no caso em que o amortecimento é desprezado.

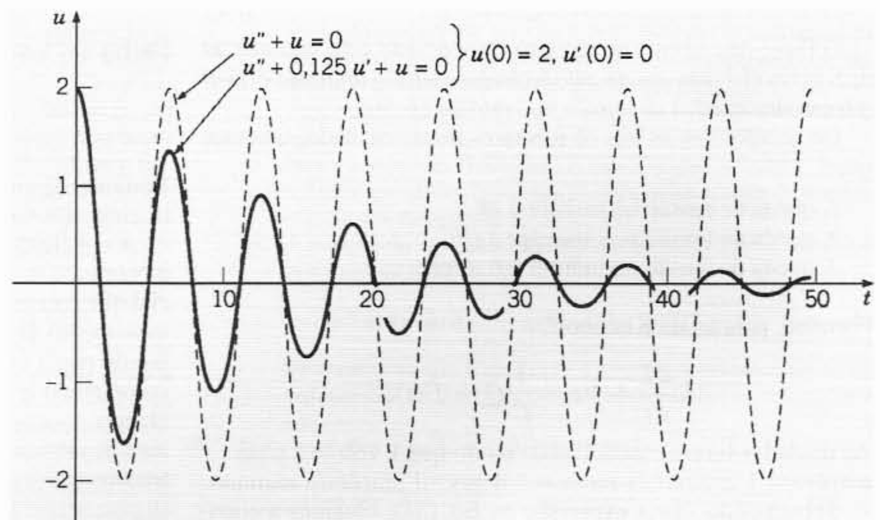


FIG. 3.8.7 Vibração pouco amortecida (curva sólida) e sem amortecimento (curva pontilhada).

A quase freqüência é $\mu = \sqrt{255}/16 \cong 0{,}998$ e o quase período é $T_d = 2\pi/\mu \cong 6{,}295$ s. Esses valores diferem apenas ligeiramente dos valores correspondentes (1 e 2π, respectivamente) para a oscilação sem amortecimento. Isso também é evidente nos gráficos na Fig. 3.8.7, que sobem e descem praticamente juntos. O coeficiente de amortecimento é pequeno neste exemplo, apenas um dezesseis avos do valor crítico, de fato. Não obstante, a amplitude da oscilação é rapidamente reduzida. A Fig. 3.8.8

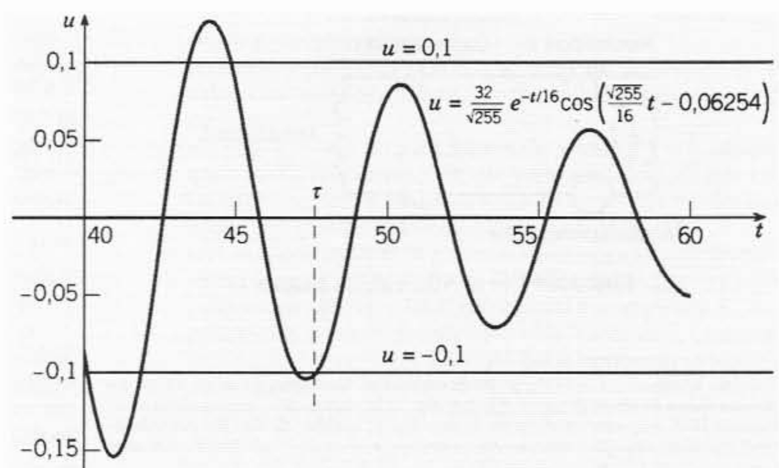


FIG. 3.8.8 Solução do Exemplo 3; determinação de τ.

mostra o gráfico da solução para $40 \le t \le 60$, junto com os gráficos de $u = \pm 0{,}1$. Pelo gráfico, τ parece ser em torno de 47,5 e um cálculo mais preciso mostra que $\tau \approx 47{,}5149$ s.

Para encontrar o instante no qual a massa passa, pela primeira vez, pela sua posição de equilíbrio, vamos nos referir à Eq. (30) e fazer $\sqrt{255}t/16 - \delta$ igual a $\pi/2$, o menor zero positivo da função cosseno. Então, resolvendo para t, obtemos

$$t = \frac{16}{\sqrt{255}}\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) \cong 1{,}637 \text{ s}.$$

Circuitos Elétricos. Um segundo exemplo da ocorrência de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes é sua utilização como modelo do fluxo de corrente elétrica no circuito simples ilustrado na Fig. 3.8.9. A corrente I, medida em ampères, é uma função do tempo t. A resistência R (em ohms), a capacitância C (em farads) e a indutância L (em henrys) são todas constantes positivas que supomos conhecidas. A tensão aplicada E (em volts) é uma função do tempo dada. Uma outra quantidade física que entra na discussão é a carga total Q (em coulombs) no capacitor no instante t. A relação entre a carga Q e a corrente I é

$$I = dQ/dt. \tag{31}$$

O fluxo de corrente no circuito é governado pela segunda lei de Kirchhoff:[10] *Em um circuito fechado, a tensão aplicada é igual à soma das quedas de tensão no resto do circuito.*

De acordo com as leis elementares da eletricidade, sabemos que:

A queda de tensão no resistor é IR.
A queda de tensão no capacitor é Q/C.
A queda de tensão no indutor é $L\,dI/dt$.

Portanto, pela lei de Kirchhoff,

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t). \tag{32}$$

As unidades foram escolhidas de modo que 1 volt = 1 ohm · 1 ampère = 1 coulomb/1 farad = 1 henry · 1 ampère/1 segundo.

Substituindo I pela expressão na Eq. (31), obtemos a equação diferencial

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t) \tag{33}$$

para a carga Q. As condições iniciais são

$$Q(t_0) = Q_0, \qquad Q'(t_0) = I(t_0) = I_0. \tag{34}$$

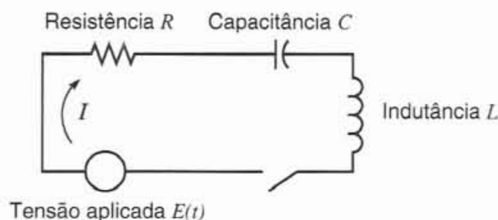


FIG. 3.8.9 Um circuito elétrico simples.

Logo, precisamos saber a carga no capacitor e a corrente no circuito em algum instante inicial t_0.

De outro modo, podemos obter uma equação diferencial para a corrente I derivando a Eq. (33) em relação a t e depois usando a Eq. (31) para substituir dQ/dt. O resultado é

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t), \tag{35}$$

com as condições iniciais

$$I(t_0) = I_0, \qquad I'(t_0) = I_0'. \tag{36}$$

Da Eq. (32), segue que

$$I_0' = \frac{E(t_0) - RI_0 - (1/C)Q_0}{L}. \tag{37}$$

Portanto, I_0' também é determinado pela carga e pela corrente iniciais, que são quantidades fisicamente mensuráveis.

A conclusão mais importante dessa discussão é que o fluxo de corrente no circuito é descrito por um problema de valor inicial que tem precisamente a mesma forma que o que descreve o movimento de um sistema mola-massa. Esse é um bom exemplo do papel unificador da matemática: uma vez que você sabe como resolver equações lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, você pode interpretar os resultados em termos de vibrações mecânicas, circuitos elétricos ou qualquer outra situação física que leve ao mesmo problema.

Problemas

Nos problemas de 1 a 4, determine ω_0, R e δ de modo a escrever a expressão dada na forma $u = R\cos(\omega_0 t - \delta)$.

1. $u = 3\cos 2t + 4\,\mathrm{sen}\,2t$
2. $u = -\cos t + \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,t$
3. $u = 4\cos 3t - 2\,\mathrm{sen}\,3t$
4. $u = -2\cos \pi t - 3\,\mathrm{sen}\,\pi t$
5. Uma massa de 2 libras (cerca de 900 g) estica uma mola de 6 polegadas (cerca de 15 cm). Se a massa é puxada para baixo 3 polegadas adicionais e depois é solta, e se não há amortecimento, determine a posição u da massa em qualquer instante t. Faça o gráfico de u em função de t. Encontre a freqüência, o período e a amplitude do movimento.
6. Uma massa de 100 g estica uma mola de 5 cm. Se a massa é colocada em movimento, a partir de sua posição de equilíbrio, com uma velocidade apontando para baixo de 10 cm/s, e se não há amortecimento, determine a posição u da massa em qualquer instante t. Quando a massa retorna pela primeira vez à sua posição de equilíbrio?
7. Uma massa de 3 lb (cerca de 1,36 kg) estica uma mola de 3 in (cerca de 7,6 cm). Se a massa é empurrada para cima, contraindo a mola de 1 in, e depois colocada em movimento com uma velocidade para baixo de 2 ft/s, e se não há amortecimento, encontre a posição u da massa em qualquer instante t. Determine a freqüência, o período, a amplitude e a fase do movimento.

[10] Gustav Kirchhoff (1824-1887), professor em Breslau, Heidelberg e Berlim, foi um dos maiores físicos do século dezenove. Ele descobriu as leis básicas dos circuitos elétricos em torno de 1845, enquanto estudante em Königsberg. É, também, famoso por seu trabalho fundamental em absorção eletromagnética e emissão, e foi um dos fundadores da espectroscopia.

8. Um circuito em série tem um capacitor de $0,25 \times 10^{-6}$ farad e um indutor de 1 henry. Se a carga inicial no capacitor é de 10^{-6} coulomb e não há corrente inicial, encontre a carga Q no capacitor em qualquer instante t.
9. Uma massa de 20 g estica uma mola de 5 cm. Suponha que a massa também está presa a um amortecedor viscoso com uma constante de amortecimento de 400 dinas · s/cm. Se a massa é puxada para baixo mais 2 cm e depois solta, encontre sua posição u em qualquer instante t. Faça o gráfico de u em função de t. Determine a quase freqüência e o quase período. Determine a razão entre o quase período e o período do movimento sem amortecimento correspondente. Encontre, também, o instante τ tal que $|u(t)| < 0,05$ cm para todo $t > \tau$.
10. Uma massa de 16 lb (cerca de 7 kg) estica uma mola de 3 in (cerca de 7,5 cm). A massa está presa a um amortecedor viscoso com constante de amortecimento de 2 lb · s/ft (1 ft = 12 in). Se a massa é colocada em movimento a partir de sua posição de equilíbrio com uma velocidade para baixo de 3 ft/s, encontre sua posição u em qualquer instante t. Faça o gráfico de u em função de t. Determine quando a massa retorna pela primeira vez à sua posição de equilíbrio. Encontre, também, o instante τ tal que $|u(t)| < 0,01$ in para todo $t > \tau$.
11. Uma mola é esticada 10 cm por uma força de 3 newtons. Uma massa de 2 kg é pendurada na mola e presa a um amortecedor viscoso que exerce uma força de 3 newtons quando a velocidade da massa é de 5 m/s. Se a massa é puxada 5 cm abaixo de sua posição de equilíbrio e dada uma velocidade inicial para baixo de 10 cm/s, determine sua posição u em qualquer instante t. Encontre a quase freqüência μ e a razão entre μ e a freqüência natural do movimento sem amortecimento correspondente.
12. Um circuito em série tem um capacitor de 10^{-3} farad, um resistor de 3×10^2 ohms e um indutor de 0,2 henry. A carga inicial no capacitor é 10^{-6} coulomb e não há corrente inicial. Encontre a carga Q no capacitor em qualquer instante t.
13. Um certo sistema em vibração satisfaz a equação $u'' + \gamma u' + u = 0$. Encontre o valor do coeficiente de amortecimento γ para o qual o quase período do movimento amortecido é 50% maior do que o período do movimento sem amortecimento correspondente.
14. Mostre que o período do movimento de uma vibração não-amortecida de uma massa pendurada em uma mola vertical é $2\pi\sqrt{L/g}$, onde L é o alongamento da mola devido ao peso da massa e g é a aceleração da gravidade.
15. Mostre que a solução do problema de valor inicial

$$mu'' + \gamma u' + ku = 0, \qquad u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = u_0'$$

pode ser expressa como a soma $u = v + w$, onde v satisfaz as condições iniciais $v(t_0) = u_0$, $v'(t_0) = 0$, w satisfaz as condições iniciais $w(t_0) = 0$, $w'(t_0) = u_0'$ e ambas satisfazem a mesma equação diferencial que u. Esse é um outro exemplo de superposição de soluções de problemas mais simples para se obter a solução de um problema mais geral.
16. Mostre que $A \cos \omega_0 t + B \operatorname{sen} \omega_0 t$ pode ser escrito na forma $r \operatorname{sen}(\omega_0 t - \theta)$. Determine r e θ em função de A e B. Se $R\cos(\omega_0 t - \delta) = r\operatorname{sen}(\omega_0 t - \theta)$, determine a relação entre R, r, δ e θ.
17. Uma massa de 8 lb (cerca de 3,6 kg) estica uma mola de 1,5 in (cerca de 3,8 cm). A massa também está presa a um amortecedor com coeficiente γ. Determine o valor de γ para o qual o sistema tenha amortecimento crítico; certifique-se de colocar as unidades de γ.
18. Se um circuito em série tem um capacitor de $C = 0,8 \times 10^{-6}$ farad e um indutor de $L = 0,2$ henry, encontre a resistência R de modo ao circuito ter amortecimento crítico.
19. Suponha que o sistema descrito pela equação $mu'' + \gamma u' + ku = 0$ tem amortecimento crítico ou está superamortecido. Mostre que a massa pode passar por sua posição de equilíbrio no máximo uma vez, independentemente das condições iniciais. *Sugestão*: Determine todos os valores possíveis de t para os quais $u = 0$.
20. Suponha que o sistema descrito pela equação $mu'' + \gamma u' + ku = 0$ tem amortecimento crítico e que as condições iniciais são $u(0) = u_0$, $u'(0) = v_0$. Se $v_0 = 0$, mostre que $u \to 0$ quando $t \to \infty$, mas que u nunca se anula. Se u_0 for positivo, determine uma condição sobre v_0 que garanta que a massa vai passar pela sua posição de equilíbrio após o instante inicial.
21. **Decremento Logarítmico.** (a) Para a oscilação amortecida descrita pela Eq. (26), mostre que o intervalo de tempo entre os máximos sucessivos é de $T_d = 2\pi/\mu$.
(b) Mostre que a razão entre os deslocamentos em dois máximos sucessivos é dada por $\exp(\gamma T_d/2m)$. Note que essa razão não depende do par de máximos sucessivos escolhido. O logaritmo neperiano dessa razão é chamado de decremento logarítmico e denotado por Δ.
(c) Mostre que $\Delta = \pi\gamma/m\mu$. Como m, μ e Δ são quantidades facilmente mensuráveis em um sistema mecânico, esse resultado fornece um método conveniente e *prático* para determinar a constante de amortecimento do sistema, que é mais difícil de medir diretamente. Em particular, para o movimento de uma massa vibrando em um fluido viscoso, a constante de amortecimento depende da viscosidade do fluido; para formas geométricas simples, a forma dessa dependência é conhecida e a relação precedente permite a determinação experimental da viscosidade. Essa é uma das maneiras mais precisas de se determinar a viscosidade de um gás a altas pressões.
22. Tendo em vista o Problema 21, encontre o decremento logarítmico do sistema no Problema 10.
23. Para o sistema no Problema 17, suponha que $\Delta = 3$ e $T_d = 0,3$ s. Tendo em vista o Problema 21, determine o valor do coeficiente de amortecimento γ.
24. A posição de um determinado sistema mola-massa satisfaz o problema de valor inicial

$$\tfrac{3}{2}u'' + ku = 0, \qquad u(0) = 2, \quad u'(0) = v.$$

Se observa-se que o período e a amplitude do movimento resultante são π e 3, respectivamente, determine os valores de k e v.
25. Considere o problema de valor inicial

$$u'' + \gamma u' + u = 0, \qquad u(0) = 2, \quad u'(0) = 0.$$

Queremos explorar o quão longo é o intervalo de tempo necessário para que a solução se torne "desprezível" e como esse intervalo depende do coeficiente de amortecimento γ. Mais precisamente, vamos procurar o instante τ tal que $|u(t)| < 0,01$ para todo $t > \tau$. Note que o amortecimento crítico para este problema ocorre quando $\gamma = 2$.
(a) Seja $\gamma = 0,25$ e determine τ ou, pelo menos, estime-o de forma razoavelmente precisa a partir de um gráfico da solução.
(b) Repita o item (a) para diversos outros valores de γ no intervalo $0 < \gamma < 1,5$. Note que τ sempre decresce quando γ cresce, para γ nesse intervalo.
(c) Crie um gráfico de τ em função de γ colocando os pares de valores encontrados nos itens (a) e (b). O gráfico parece ser uma curva suave?
(d) Repita o item (b) para valores de γ entre 1,5 e 2. Mostre que τ continua a diminuir até que γ atinja um determinado valor crítico γ_0, após o qual τ aumenta. Encontre γ_0 e o valor mínimo correspondente de τ com duas casas decimais.
(e) Uma outra maneira de proceder é escrever a solução do problema de valor inicial na forma (26). Despreze o fator co-seno e considere, apenas, o fator exponencial e a amplitude R. Depois, encontre uma expressão para τ em função de γ. Compare os resultados aproximados obtidos desse modo com os valores determinados nos itens (a), (b) e (d).
26. Considere o problema de valor inicial

$$mu'' + \gamma u' + ku = 0, \qquad u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0.$$

Suponha que $\gamma^2 < 4km$.
(a) Resolva o problema de valor inicial.
(b) Escreva a solução na forma $u(t) = R\exp(-\gamma t/2m)\cos(\mu t - \delta)$. Determine R em função de m, γ, k, u_0 e v_0.
(c) Investigue a dependência de R no coeficiente de amortecimento γ para valores fixos dos outros parâmetros.

27. Um bloco cúbico de lado l e densidade de massa por unidade de volume ρ está flutuando em um fluido com densidade de massa por unidade de volume ρ_0, onde $\rho_0 > \rho$. Se o bloco é mergulhado ligeiramente e depois solto, ele oscila na posição vertical. Supondo que se pode desprezar o amortecimento viscoso do fluido e a resistência do ar, deduza a equação diferencial do movimento e determine o período do movimento.
Sugestão: Use o princípio de Arquimedes: Um objeto completa ou parcialmente submerso em um fluido sofre a ação de uma força empurrando-o para cima (o empuxo) de módulo igual ao peso do fluido deslocado.

28. A posição de um determinado sistema mola-massa satisfaz o problema de valor inicial

$$u'' + 2u = 0, \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 2.$$

(a) Encontre a solução desse problema de valor inicial.
(b) Faça os gráficos de u e de u' em função de t no mesmo par de eixos.
(c) Faça o gráfico com u' em um dos eixos e u no outro; isto é, faça o gráfico paramétrico de $u(t)$ e $u'(t)$, usando t como parâmetro. Esse tipo de gráfico é conhecido como gráfico de fase (ou retrato de fase) e o plano uu' é chamado de plano de fase. Note que uma curva fechada no plano de fase corresponde a uma solução periódica $u(t)$. Qual o sentido do movimento (trigonométrico ou horário) no retrato de fase quando t aumenta?

29. A posição de determinado sistema mola-massa satisfaz o problema de valor inicial

$$u'' + \tfrac{1}{4}u' + 2u = 0, \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 2.$$

(a) Encontre a solução desse problema de valor inicial.
(b) Faça os gráficos de u e de u' em função de t no mesmo par de eixos.
(c) Faça o gráfico de u' em função de u no plano de fase (veja o Problema 28). Identifique diversos pontos correspondentes nas curvas dos itens (b) e (c). Qual o sentido do movimento no plano de fase quando t aumenta?

30. Na ausência de amortecimento, o movimento de um sistema massa-mola satisfaz o problema de valor inicial

$$mu'' + ku = 0, \qquad u(0) = a, \quad u'(0) = b.$$

(a) Mostre que a energia cinética dada inicialmente à massa é $mb^2/2$ e que a energia potencial armazenada inicialmente na mola é $ka^2/2$, de modo que a energia total inicial do sistema é $(ka^2 + mb^2)/2$.
(b) Resolva o problema de valor inicial dado.
(c) Usando a solução no item (b), determine a energia total no sistema em qualquer instante t. Seu resultado deve confirmar o princípio de conservação de energia para esse sistema.

31. Suponha que uma massa m desliza sem atrito em uma superfície horizontal. A massa está presa a uma mola com constante k, como ilustrado na Fig. 3.8.10, e está sujeita, também, à resistência viscosa do ar com coeficiente γ. Mostre que o deslocamento $u(t)$ da massa a partir de sua posição de equilíbrio satisfaz a Eq. (21). Como a dedução da equação de movimento nesse caso difere da dedução dada no texto?

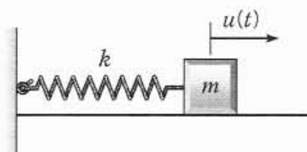


FIG. 3.8.10 Um sistema massa-mola.



32. No sistema massa-mola do Problema 31, suponha que a força exercida pela mola não é dada pela lei de Hooke mas, em vez disso, satisfaz a relação

$$F_s = -(ku + \epsilon u^3),$$

onde $k > 0$ e ϵ é pequeno em módulo, mas pode ter qualquer sinal. A mola é dita "dura" se $\epsilon > 0$ e "mole" se $\epsilon < 0$. Por que esses termos são apropriados?
(a) Mostre que o deslocamento $u(t)$ da massa a partir de sua posição de equilíbrio satisfaz a equação diferencial

$$mu'' + \gamma u' + ku + \epsilon u^3 = 0.$$

Suponha que as condições iniciais são

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$$

No restante deste problema, suponha que $m = 1$, $k = 1$ e $\gamma = 0$.
(b) Encontre $u(t)$ quando $\epsilon = 0$ e determine, também, a amplitude e o período do movimento.
(c) Seja $\epsilon = 0{,}1$. Faça o gráfico (de uma aproximação numérica) da solução. Esse movimento parece ser periódico? Se for, estime a amplitude e o período.
(d) Repita o item (c) para $\epsilon = 0{,}2$ e $\epsilon = 0{,}3$.
(e) Coloque em um gráfico os valores estimados da amplitude A e do período T em função de ϵ. Descreva a maneira segundo a qual A e T, respectivamente, dependem de ϵ.
(f) Repita os itens (c), (d) e (e) para valores negativos de ϵ.

3.9 Vibrações Forçadas

Vamos agora investigar a situação na qual uma força externa periódica é aplicada a um sistema mola-massa. O comportamento desse sistema simples modela muitos sistemas oscilatórios sob a ação de uma força externa em conseqüência, por exemplo, de um motor ligado ao sistema. Vamos considerar primeiro o caso no qual há amortecimento e vamos considerar mais tarde o caso especial ideal no qual supõe-se que não há amortecimento.

Vibrações Forçadas com Amortecimento. Suponha que a força externa é dada por $F_0 \cos \omega t$, onde F_0 e ω são constantes positivas representando, respectivamente, a amplitude e a freqüência da força. Então a equação de movimento é

$$mu'' + \gamma u' + ku = F_0 \cos \omega t, \tag{1}$$

onde m, γ e k são, respectivamente, a massa, o coeficiente de amortecimento e a constante da mola do sistema mola-massa. A solução geral da Eq. (1) tem que ser da forma

$$u = c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t = u_c(t) + U(t). \tag{2}$$

As duas primeiras parcelas na expressão à direita do primeiro sinal de igualdade na Eq. (2) formam a solução geral $u_c(t)$ da equação homogênea associada à Eq. (1), enquanto as duas últimas parcelas correspondem a uma solução particular $U(t)$ da equação não-homogênea completa. Os coeficientes A e B podem ser encontrados, como de hábito, substituindo-se essas expressões na equação diferencial (1), enquanto as constantes ar-

bitrárias c_1 e c_2 ficam disponíveis para satisfazer quaisquer condições iniciais que forem prescritas. As soluções $u_1(t)$ e $u_2(t)$ da equação homogênea dependem das raízes r_1 e r_2 da equação característica $mr^2 + \gamma r + k = 0$. Como m, γ e k são todas constantes positivas, segue que, ou ambas as raízes r_1 e r_2 são reais e negativas, ou ambas são complexas conjugadas com parte real negativa. Em qualquer dos casos, ambas as soluções $u_1(t)$ e $u_2(t)$ tendem a zero quando $t \to \infty$. Como $u_c(t)$ tende a desaparecer quando t aumenta, ela é chamada de **solução transiente**. Em muitas aplicações ela tem pouca importância e (dependendo do valor de γ) pode ser difícil de detectar depois de apenas alguns segundos.

O resto da Eq. (2), a saber $U(t) = A\cos\omega t + B \operatorname{sen}\omega t$, não tende a desaparecer quando t aumenta, mas persiste indefinidamente ou enquanto a força externa estiver sendo aplicada. Essa parte representa uma oscilação estacionária com a mesma freqüência que o forçamento e é chamada de **solução estado estacionário** ou **solução forçada**. A solução transiente nos permite satisfazer quaisquer condições iniciais que possam ser impostas; com o passar do tempo, a energia colocada no sistema pelo deslocamento e velocidades iniciais é dissipada pelo amortecimento e o movimento se torna, então, a resposta do sistema à força externa. Sem amortecimento, o efeito das condições iniciais permaneceria indefinidamente.

É conveniente expressar $U(t)$ como uma única expressão trigonométrica, em vez de uma soma de duas parcelas. Lembre-se de que fizemos isso para outras expressões semelhantes na Seção 3.8. Podemos, então, escrever

$$U(t) = R\cos(\omega t - \delta). \tag{3}$$

A amplitude R e a fase δ dependem diretamente de A e de B e, indiretamente, dos parâmetros na equação diferencial (1). É possível mostrar, por cálculos algébricos diretos mas um tanto extensos, que

$$R = \frac{F_0}{\Delta}, \qquad \cos\delta = \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{\Delta}, \qquad \operatorname{sen}\delta = \frac{\gamma\omega}{\Delta}, \tag{4}$$

onde

$$\Delta = \sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad \text{e} \quad \omega_0^2 = k/m. \tag{5}$$

Vamos agora investigar como a amplitude R da oscilação estado estacionário depende da freqüência ω da força externa. Para excitações de baixa freqüência, isso é, quando $\omega \to 0$, segue das Eqs. (4) e (5) que $R \to F_0/k$. No outro extremo, para excitações de freqüência muito alta, as Eqs. (4) e (5) implicam que $R \to 0$ quando $\omega \to \infty$. Em algum valor intermediário de ω, a amplitude pode atingir um máximo. Para encontrar esse ponto de máximo, podemos diferenciar R em relação a ω e igualar o resultado a zero. Dessa forma, encontramos que a amplitude é máxima quando $\omega = \omega_{\text{máx}}$, onde

$$\omega_{\text{máx}}^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2m^2} = \omega_0^2\left(1 - \frac{\gamma^2}{2mk}\right). \tag{6}$$

Note que $\omega_{\text{máx}} < \omega_0$ e que $\omega_{\text{máx}}$ fica próximo de ω_0 quando γ é pequeno. O valor máximo de R é

$$R_{\text{máx}} = \frac{F_0}{\gamma\omega_0\sqrt{1 - (\gamma^2/4mk)}} \cong \frac{F_0}{\gamma\omega_0}\left(1 + \frac{\gamma^2}{8mk}\right), \tag{7}$$

onde a última expressão é uma aproximação para γ pequeno. Se $\gamma^2/mk > 2$, então $\omega_{\text{máx}}$ dado pela Eq. (6) é imaginário; nesse caso, o valor máximo de R ocorre quando $\omega = 0$ e R é uma função monótona decrescente de ω. Lembre-se de que o amortecimento crítico ocorre quando $\gamma^2/mk = 4$.

Para γ pequeno, segue da Eq. (7) que $R_{\text{máx}} \cong F_0/\gamma\omega_0$. Portanto, para sistemas ligeiramente amortecidos, a amplitude R da solução estado estacionário quando ω está próximo de ω_0 é bastante grande mesmo para uma força externa relativamente pequena, e esse efeito é mais pronunciado quanto menor o valor de γ. Esse fenômeno é conhecido como **ressonância** e é, muitas vezes, importante levar isso em consideração durante o projeto. A ressonância pode ser boa ou má, dependendo das circunstâncias. Tem que ser levada muito a sério no projeto de estruturas, como prédios ou pontes, onde pode produzir uma instabilidade induzindo falhas catastróficas na estrutura. Por outro lado, a ressonância pode ser bem usada no projeto de instrumentos, como sismógrafos, que pretendem detectar sinais periódicos fracos.

A Fig. 3.9.1 contém alguns gráficos representativos de Rk/F_0 em função de ω/ω_0 para diversos valores de $\Gamma = \gamma^2/mk$. A quantidade Rk/F_0 é a razão entre a amplitude R da solução estado estacionário e o deslocamento estático F_0/k da mola produzido por uma força F_0. A figura inclui o gráfico correspondente a $\Gamma = 0{,}015625$ porque esse é o valor de Γ que aparece no Exemplo 1. Note, em particular, o cume fino na curva correspondente a $\Gamma = 0{,}015625$ perto de $\omega/\omega_0 = 1$. O caso-limite $\Gamma \to 0$ também está ilustrado. Segue das Eqs. (4) e (5) que $R \to F_0/m|\omega_0^2 - \omega^2|$ quando $\gamma \to 0$ e, portanto, o gráfico de Rk/F_0 é assintótico à reta vertical $\omega = \omega_0$, como ilustrado na figura. À medida que aumenta o amortecimento no sistema, a resposta máxima diminui gradualmente.

A Fig. 3.9.1 também ilustra a utilidade da variável adimensional γ. Você pode verificar facilmente que cada uma das quantidades Rk/F_0, ω/ω_0 e Γ é adimensional. A importância dessa observação é que o número de parâmetros significativos no problema foi reduzido a três, em vez dos cinco que aparecem na Eq. (1). Portanto, apenas uma família de curvas, algumas das quais estão ilustradas na Fig. 3.9.1, descrevem o comportamento da solução em função da freqüência para todos os sistemas governados pela Eq. (1).

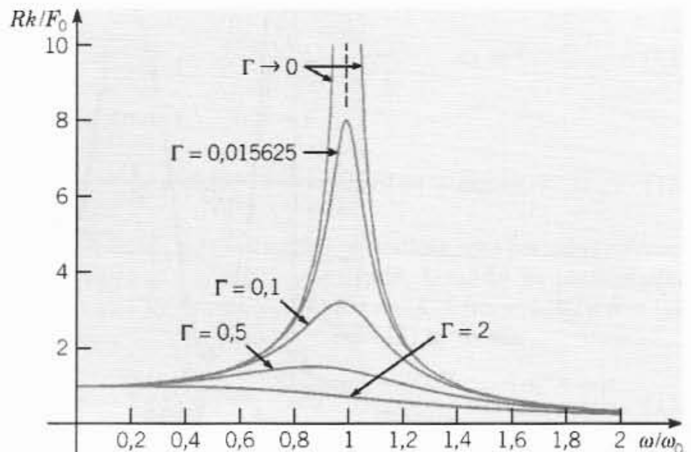


FIG. 3.9.1 Vibração forçada com amortecimento: amplitude da solução estado estacionário em função da freqüência da força externa; $\Gamma = \gamma^2/mk$.

O ângulo de fase δ também depende de modo interessante de ω. Para ω próximo de zero, segue das Eqs. (4) e (5) que $\cos\delta \cong 1$ e $\operatorname{sen}\delta \cong 0$. Logo $\delta \cong 0$ e a solução está quase em fase com a excitação, o que significa que elas aumentam e diminuem juntas e, em particular, atingem seus máximos e mínimos respectivos praticamente juntas. Para $\omega = \omega_0$, vemos que $\cos\delta = 0$ e $\operatorname{sen}\delta = 1$, logo $\delta = \pi/2$. Nesse caso, a solução fica atrasada em relação à excitação, isso é, os picos da solução ocorrem $\pi/2$ mais tarde que os picos da excitação e analogamente para os vales. Finalmente, para ω muito grande, temos $\cos\delta \cong -1$ e $\operatorname{sen}\delta \cong 0$. Logo $\delta \cong \pi$, de modo que a solução está praticamente fora de fase com a excitação; isso significa que a solução é mínima quando a excitação é máxima e vice-versa. A Fig. 3.9.2 mostra os gráficos de δ em função de ω/ω_0 para diversos valores de Γ. Para um pequeno amortecimento, a transição de fase de perto de $\delta = 0$ para perto de $\delta = \pi$ ocorre um tanto abruptamente, enquanto, para valores grandes do parâmetro de amortecimento, a transição acontece de forma mais gradual.

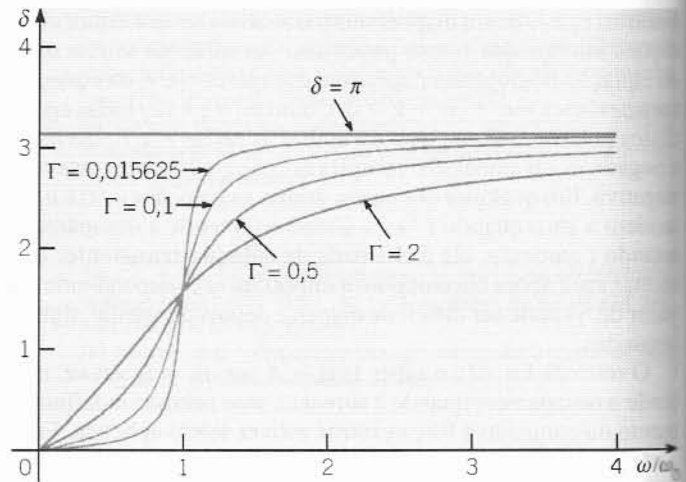


FIG. 3.9.2 Vibração forçada com amortecimento: fase da solução estado estacionário em função da freqüência da força externa; $\Gamma = \gamma^2/mk$.

Exemplo 1

Considere o problema de valor inicial

$$u'' + 0{,}125u' + u = 3\cos\omega t, \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = 0. \tag{8}$$

Desenhe gráficos da solução para valores diferentes da freqüência ω de forçamento e compare-os com os gráficos correspondentes da força externa.

Para esse sistema temos $\omega_0 = 1$ e $\Gamma = 1/64 = 0{,}015625$. O movimento sem força externa foi discutido no Exemplo 3 da Seção 3.8, e a Fig. 3.8.7 mostra o gráfico da solução do problema sem forçamento. As Figs. 3.9.3, 3.9.4 e 3.9.5 mostram a solução do problema com forçamento (8) para $\omega = 0{,}3$, $\omega = 1$ e $\omega = 2$, respectivamente. O gráfico da força externa correspondente também está ilustrado em cada figura. Nesse exemplo, o deslocamento estático F_0/k é igual a 3.

A Fig. 3.9.3 mostra o caso de freqüência baixa, $\omega/\omega_0 = 0{,}3$. Depois que a parte transiente da solução praticamente desaparece, a solução estado estacionário que resta está essencialmente em fase com a excitação, e a amplitude da solução é um pouco maior do que o deslocamento estático. Especificamente, $R \cong 3{,}2939$ e $\delta \cong 0{,}041185$.

O caso ressonante, $\omega/\omega_0 = 1$, está ilustrado na Fig. 3.9.4. Aqui a amplitude da solução estado estacionário é oito vezes maior do que o deslocamento estático, e a figura também mostra o atraso previsto de $\pi/2$ em relação à força externa.

O caso de excitação com freqüência relativamente alta está ilustrado na Fig. 3.9.5. Observe que a amplitude da solução estado estacionário é aproximadamente um terço do deslocamento estático e que a diferença de fase entre a excitação e a solução é aproximadamente π. Mais precisamente, $R \cong 0{,}99655$ e $\delta \cong 3{,}0585$.

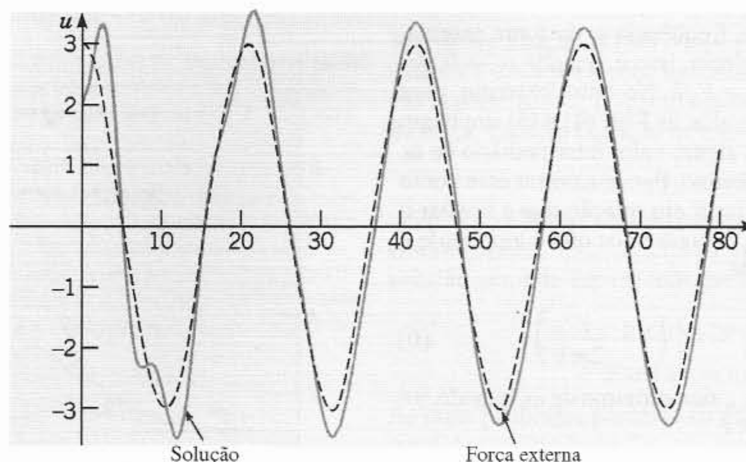


FIG. 3.9.3 Uma vibração forçada com amortecimento; solução de $u'' + 0{,}125u' + u = 3\cos 0{,}3t$, $u(0) = 2$, $u'(0) = 0$.

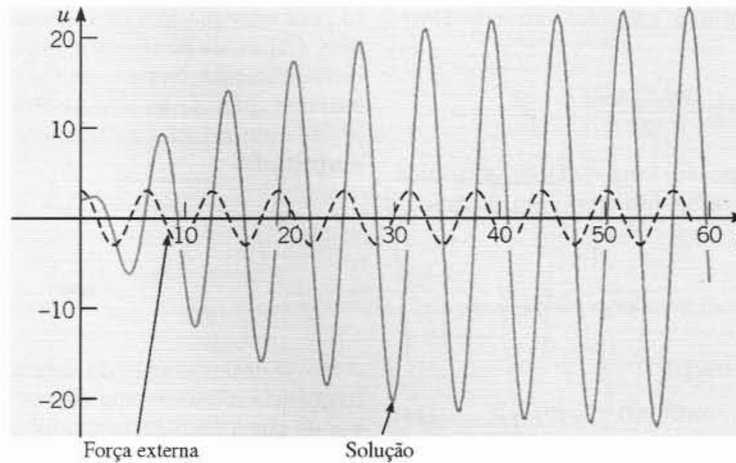


FIG. 3.9.4 Uma vibração forçada com amortecimento; solução de $u'' + 0{,}125u' + u = 3\cos t$, $u(0) = 2$, $u'(0) = 0$.

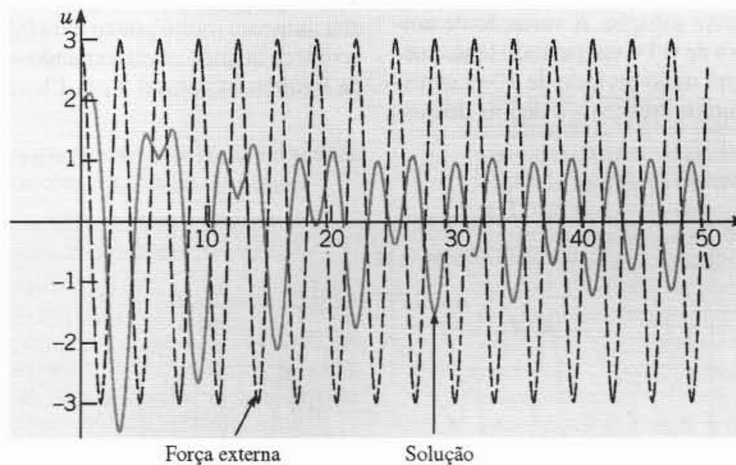


FIG. 3.9.5 Uma vibração forçada com amortecimento; solução de $u'' + 0{,}125u' + u = 3\cos 2t$, $u(0) = 2$, $u'(0) = 0$.

Vibrações Forçadas sem Amortecimento. Vamos supor agora que $\gamma = 0$ na Eq. (1), obtendo assim a equação de movimento oscilatório com forçamento e sem amortecimento

$$mu'' + ku = F_0 \cos \omega t. \tag{9}$$

A forma da solução geral da Eq. (9) vai ser diferente dependendo da freqüência de forçamento ω ser ou não igual à freqüência natural $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ do sistema sem forçamento. Considere primeiro o caso $\omega \neq \omega_0$; então a solução geral da Eq. (9) é

$$u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t. \tag{10}$$

As constantes c_1 e c_2 são determinadas pelas condições iniciais. O movimento resultante é, em geral, a soma de dois movimentos periódicos de freqüências (ω_0 e ω) e amplitudes diferentes.

É particularmente interessante supor que a massa está inicialmente em repouso, de modo que as condições iniciais são $u(0) = 0$ e $u'(0) = 0$. Então a energia que alimenta o sistema vem inteiramente da força externa, sem contribuição das condições iniciais. Nesse caso as constantes c_1 e c_2 na Eq. (10) são dadas por

$$c_1 = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \qquad c_2 = 0, \tag{11}$$

e a solução da Eq. (9) é

$$u = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}(\cos \omega t - \cos \omega_0 t). \tag{12}$$

Essa é a soma de duas funções periódicas com períodos diferentes mas com a mesma amplitude. Usando as identidades trigonométricas para $\cos(A \pm B)$ com $A = (\omega_0 + \omega)t/2$ e $B = (\omega_0 - \omega)t/2$, podemos escrever a Eq. (12) na forma

$$u = \left[\frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \operatorname{sen} \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}\right] \operatorname{sen} \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}. \tag{13}$$

Se $|\omega_0 - \omega|$ é pequeno, então $\omega_0 + \omega$ é muito maior do que $|\omega_0 - \omega|$. Em conseqüência, $\operatorname{sen}(\omega_0 + \omega)t/2$ é uma função que oscila muito mais rapidamente do que $\operatorname{sen}(\omega_0 - \omega)t/2$. Logo o movimento consiste em uma oscilação rápida com freqüência

$(\omega_0 + \omega)/2$ mas com uma amplitude senoidal variando devagar e igual a

$$\frac{2F_0}{m|\omega_0^2 - \omega^2|}\left|\operatorname{sen}\frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}\right|.$$

Esse tipo de movimento, que possui uma variação periódica de amplitude, exibe o que é conhecido como um **batimento**. Por exemplo, um tal fenômeno ocorre em acústica quando dois diapasões de freqüências quase iguais são excitados simultaneamente. Nesse caso a variação periódica de amplitude é bastante aparente ao ouvido. Em eletrônica, a variação da amplitude em relação ao tempo é chamada de **modulação da amplitude**.

Exemplo 2

Considere o problema de valor inicial

$$u'' + u = 0{,}5\cos 0{,}8t, \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \tag{14}$$

e faça o gráfico da solução.

Nesse caso $\omega_0 = 1$, $\omega = 0{,}8$ e $F_0 = 0{,}5$, de modo que a solução do problema dada pela Eq. (13) é

$$u = 2{,}77778 \operatorname{sen} 0{,}1t \operatorname{sen} 0{,}9t. \tag{15}$$

A Fig. 3.9.6 mostra o gráfico dessa solução. A variação de amplitude tem uma freqüência baixa de 0,1 e um período lento correspondente de 20π. Note que um meio período de 10π corresponde a um único ciclo de amplitude crescente e depois decrescente. O deslocamento do sistema mola-massa oscila com uma freqüência relativamente alta de 0,9, que é só ligeiramente menor do que a freqüência natural ω_0.

Agora imagine que a freqüência de forçamento ω é ainda mais aumentada, digamos para $\omega = 0{,}9$. Então a freqüência baixa é diminuída pela metade para 0,05, e o meio período correspondente é dobrado para 20π. O multiplicador 2,7778 também aumenta substancialmente para 5,2632. No entanto, a freqüência alta aumenta muito pouco para 0,95. Você pode visualizar o que acontece quando ω vai tomando valores cada vez mais próximos da freqüência natural $\omega_0 = 1$?

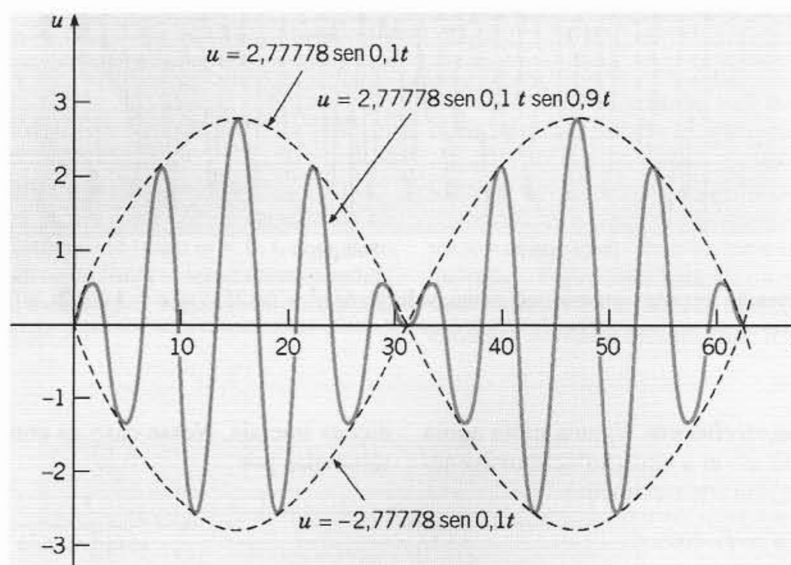


FIG. 3.9.6 Um batimento; solução de $u'' + u = 0{,}5 \cos 0{,}8t$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$.

Vamos voltar para a Eq. (9) e considerar o caso da ressonância, quando $\omega = \omega_0$, isso é, a freqüência de forçamento é igual à freqüência natural do sistema. Então o termo não-homogêneo $F_0 \cos \omega t$ é uma solução da equação homogênea associada. Nesse caso a solução da Eq. (9) é

$$u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen} \omega_0 t. \tag{16}$$

Devido ao termo $t \operatorname{sen} \omega_0 t$, a solução prevê que o movimento vai se tornar ilimitado quando $t \to \infty$ independentemente dos valores de c_1 e de c_2; veja a Fig. 3.9.7 para um exemplo típico. É claro que, no mundo real, oscilações ilimitadas não podem ocorrer. Quando u torna-se muito grande, o modelo matemático no qual a Eq. (9) se baseia não é mais válido, já que a hipótese de que a força da mola depende linearmente do deslocamento precisa que u seja pequeno. Como vimos, se o amortecimento está incluído no modelo, o movimento previsto permanece limitado; no entanto, a solução correspondente ao forçamento $F_0 \cos \omega t$ pode ser bastante grande se o amortecimento é pequeno e se ω está perto de ω_0.

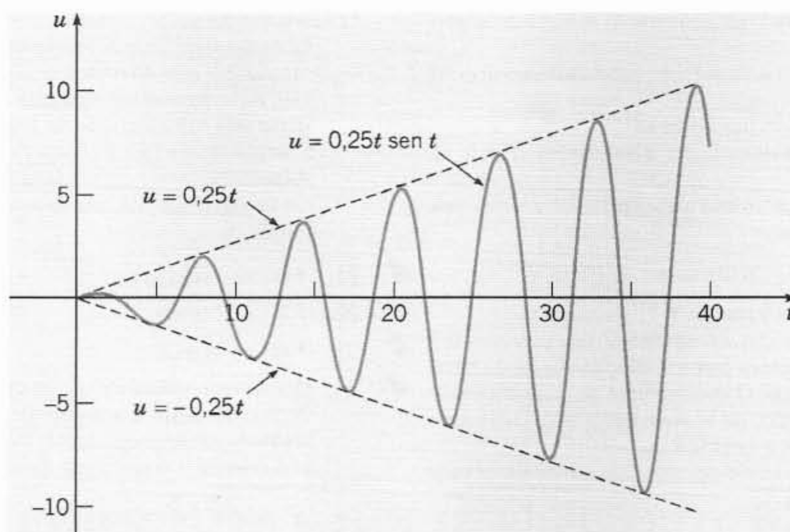


FIG. 3.9.7 Ressonância; solução de $u'' + u = 0{,}5 \cos t$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$; $u = 0{,}25t \operatorname{sen} t$.

Problemas

Nos problemas de 1 a 4, escreva a expressão dada como um produto de duas funções trigonométricas com freqüências diferentes.

1. $\cos 9t - \cos 7t$ 2. $\operatorname{sen} 7t - \operatorname{sen} 6t$
3. $\cos \pi t + \cos 2\pi t$ 4. $\operatorname{sen} 3t + \operatorname{sen} 4t$
5. Uma massa de 4 lb (cerca de 1,8 kg) estica uma mola de 1,5 in (cerca de 5 cm). A massa é deslocada 2 in no sentido positivo a partir de sua posição de equilíbrio e solta sem velocidade inicial. Supondo que não há amortecimento e que a massa sofre a ação de uma força externa de $2 \cos 3t$ lb, formule o problema de valor inicial que descreve o movimento dessa massa.
6. Uma massa de 5 kg estica uma mola de 10 cm. A massa sofre a ação de uma força externa de $10 \operatorname{sen}(t/2)$ N e se move em um meio que amortece o movimento com uma força viscosa de 2 N quando a velocidade da massa é de 4 cm/s. Se a massa é colocada em movimento a partir de sua posição de equilíbrio com uma velocidade inicial de 3 cm/s, formule o problema de valor inicial que descreve o movimento da massa.
7. (a) Encontre a solução do Problema 5.
(b) Faça o gráfico da solução.
(c) Se a força externa dada for substituída pela força da freqüência ω igual a $4 \operatorname{sen} \omega t$, encontre o valor de ω para o qual ocorre ressonância.
8. (a) Encontre a solução do problema de valor inicial no Problema 6.
(b) Identifique as partes transiente e estado estacionário da solução.
(c) Faça o gráfico da solução estado estacionário.
(d) Se a força externa dada é substituída pela força da freqüência ω igual a $2 \cos \omega t$, encontre o valor de ω para o qual a amplitude à resposta forçada é máxima.
9. Se um sistema massa-mola não-amortecido com uma massa de 6 lb (cerca de 2,7 kg) e uma constante da mola de 1 lb por polegada é colocado em movimento, de repente, no instante $t = 0$, por uma força externa de $4 \cos 7t$ lb, determine a posição da massa em qualquer instante e desenhe o gráfico de seu deslocamento em função do tempo.
10. Uma massa de 8 lb (cerca de 3,6 kg) estica uma mola de 6 in (cerca de 15 cm). Uma força externa de $8 \operatorname{sen} 8t$ lb age sobre o sistema. Se a massa é puxada 3 in para baixo e depois solta, determine a posição da massa em qualquer instante de tempo. Determine os quatro primeiros instantes em que a velocidade da massa é nula.
11. Uma mola é esticada 6 in (cerca de 15 cm) por uma massa de 8 lb (cerca de 3,6 kg). A massa está presa a um amortecedor que tem uma constante de amortecimento de 0,25 lb·s/pé e está sob a ação de uma força externa igual a $4 \cos 2t$ lb.
(a) Determine a solução estado estacionário desse problema.
(b) Se a massa dada é substituída por uma massa m, determine o valor de m para o qual a amplitude da solução estado estacionário é máxima.
12. A mola de um sistema massa-mola tem constante de 3 N/m. É presa uma massa de 2 kg na mola e o movimento se dá em um fluido viscoso que oferece uma resistência numericamente igual ao módulo da velocidade instantânea. Se o sistema sofre a ação de uma força externa de $3 \cos 3t - 2 \operatorname{sen} 3t$ N, determine a solução estado estacionário. Expresse sua resposta na forma $R \cos(\omega t - \delta)$.
13. Forneça os detalhes na determinação de quando a solução estado estacionário dada pela Eq. (11) é máxima; isto é, mostre que $\omega^2_{\text{máx}}$ e $R_{\text{máx}}$ são dados pelas Eqs. (12) e (13), respectivamente.
14. Encontre a velocidade da resposta estado estacionário dada pela Eq. (3). Depois mostre que a velocidade é máxima quando $\omega = \omega_0$.
15. Encontre a solução do problema de valor inicial

$$u'' + u = F(t), \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0,$$

onde

$$F(t) = \begin{cases} F_0 t, & 0 \le t \le \pi, \\ F_0(2\pi - t), & \pi < t \le 2\pi, \\ 0, & 2\pi < t. \end{cases}$$

Sugestão: Trate separadamente cada intervalo de tempo e iguale as soluções nos intervalos diferentes supondo que u e u' são funções contínuas de t.
16. Um circuito em série tem um capacitor de $0{,}25 \times 10^{-6}$ farad, um resistor de 5×10^3 ohms e um indutor de 1 henry. A carga inicial no capacitor é zero. Se uma bateria de 12 volts é conectada ao circuito e o circuito é fechado em $t = 0$, determine a carga no capacitor em $t = 0{,}001$ s, em $t = 0{,}01$ s e em qualquer instante t. Determine, também, a carga limite quando $t \to \infty$.
17. Considere um sistema vibratório descrito pelo problema de valor inicial

$$u'' + \tfrac{1}{4}u' + 2u = 2\cos \omega t, \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 2.$$

(a) Determine a parte estado estacionário da solução desse problema.
(b) Encontre a amplitude A da solução estado estacionário em função de ω.
(c) Faça o gráfico de A em função de ω.
(d) Encontre o valor máximo de A e a freqüência ω onde ele ocorre.

18. Considere o sistema forçado, mas não amortecido descrito pelo problema de valor inicial

$$u'' + u = 3\cos\omega t, \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

(a) Encontre a solução $u(t)$ para $\omega \neq 1$.
(b) Faça o gráfico da solução $u(t)$ em função de t para $\omega = 0{,}7$, $\omega = 0{,}8$ e $\omega = 0{,}9$. Descreva como a solução $u(t)$ muda quando ω varia nesse intervalo. O que acontece se ω assume valores cada vez mais próximos de 1? Note que a freqüência natural do sistema sem a força externa é $\omega_0 = 1$.

19. Considere o sistema vibratório descrito pelo problema de valor inicial

$$u'' + u = 3\cos\omega t, \qquad u(0) = 1, \quad u'(0) = 1.$$

(a) Encontre a solução para $\omega \neq 1$.
(b) Faça o gráfico da solução $u(t)$ em função de t para $\omega = 0{,}7$, $\omega = 0{,}8$ e $\omega = 0{,}9$. Compare os resultados com os do Problema 18, isto é, descreva o efeito das condições iniciais não-nulas.

20. Para o problema de valor inicial no Problema 18, faça o gráfico de u' em função de u para $\omega = 0{,}7$, $\omega = 0{,}8$ e $\omega = 0{,}9$; isto é, faça um retrato de fase da solução para esses valores de ω. Use um intervalo de tempo suficientemente longo para que apareça como uma curva fechada no gráfico de fase. Coloque uma seta na sua curva indicando o sentido de percurso quando t aumenta.

Os problemas de 21 a 23 tratam do problema de valor inicial

$$u'' + 0{,}125u' + 4u = F(t), \qquad u(0) = 2, \quad u'(0) = 0.$$

Em cada um desses problemas:
(a) Faça os gráficos da função externa $F(t)$ e da solução $u(t)$ em função de t usando o mesmo conjunto de eixos. Use um intervalo de tempo suficientemente longo para que a solução transiente seja substancialmente reduzida. Observe a relação entre a amplitude e a fase da força externa e a amplitude e a fase da solução. Note que $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 2$.
(b) Faça o retrato de fase da solução, isto é, o gráfico de u' em função de u.

21. $F(t) = 3\cos(t/4)$

22. $F(t) = 3\cos 2t$

23. $F(t) = 3\cos 6t$

24. Um sistema massa-mola com uma mola dura (Problema 32 da Seção 3.8) sofre a ação de uma força externa periódica. Na ausência de amortecimento, suponha que o deslocamento da massa satisfaz o problema de valor inicial

$$u'' + u + \tfrac{1}{5}u^3 = \cos\omega t, \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

(a) Seja $\omega = 1$ e gere, em um computador, a solução do problema dado. O sistema exibe batimento?
(b) Faça o gráfico da solução para diversos valores de ω entre 1/2 e 2. Descreva como a solução varia quando ω aumenta.

25. Suponha que o sistema do Problema 24 seja modificado para incluir amortecimento e que o problema de valor inicial resultante é

$$u'' + \tfrac{1}{5}u' + u + \tfrac{1}{5}u^3 = \cos\omega t, \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

(a) Gere, em um computador, o gráfico da solução para diversos valores de ω entre 1/2 e 2 e estime a amplitude R da solução estado estacionário em cada caso.
(b) Usando os dados encontrados em (a), faça o gráfico de R em função de ω. Para que freqüência ω a amplitude é máxima?
(c) Compare os resultados dos itens (a) e (b) com os resultados correspondentes para o problema linear.

REFERÊNCIAS

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1961; New York: Dover, 1989).

Existem muitos livros sobre vibrações mecânicas e circuitos elétricos. Um que trata de ambos é:

Close, C. M., and Frederick, D. K., *Modeling and Analysis of Dynamic Systems* (3rd ed.)(New York: Wiley, 2001 Houghton-Mifflin, 1993).

Um livro clássico sobre vibrações mecânicas é:

Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations* (4th ed.) (New York: McGraw-Hill, 1956; New York; Dover, 1985).

Um livro de nível intermediário mais recente é:

Thomson, W. T., *Theory of Vibrations with Applications* (5th ed.) (Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1997).

Um livro elementar sobre circuitos elétricos é:

Bobrow, L. S., *Elementary Linear Circuit Analysis* (New York: Oxford University Press, 1996).

CAPÍTULO 4

Equações Lineares de Ordem Mais Alta

A estrutura teórica e os métodos de resolução desenvolvidos no capítulo anterior para equações lineares de segunda ordem podem ser estendidos, diretamente, para equações lineares de terceira ordem ou de ordem mais alta. Neste capítulo, vamos fazer um apanhado geral rápido dessa generalização, apontando, em especial, os exemplos nos quais aparecem fenômenos novos, devido à grande variedade de situações que podem ocorrer para equações de ordem mais alta.

4.1 Teoria Geral para Equações Lineares de Ordem *n*

Uma equação diferencial linear de ordem n é uma equação da forma

$$P_0(t)\frac{d^n y}{dt^n} + P_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + P_n(t)y = G(t). \quad (1)$$

Supomos que as funções $P_0, \ldots, P_n$ e G são funções reais e contínuas definidas em algum intervalo I: $\alpha < t < \beta$, e que P_0 nunca se anula nesse intervalo. Então, dividindo a Eq. (1) por $P_0(t)$, obtemos

$$L[y] = \frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + p_n(t)y = g(t). \quad (2)$$

O operador diferencial linear L de ordem n definido pela Eq. (2) é semelhante ao operador de segunda ordem definido no Cap. 3. A teoria matemática associada à Eq. (2) é inteiramente análoga à teoria para equações lineares de segunda ordem; por essa razão, apenas enunciaremos os resultados para o problema de ordem n. As demonstrações da maioria dos resultados também são semelhantes às demonstrações para as equações de segunda ordem e são, em geral, deixadas como exercício.

Como a Eq. (2) envolve a n-ésima derivada de y em relação a t, serão necessárias, *grosso modo*, n integrações para se resolver essa equação. Cada uma dessas integrações vai gerar uma constante arbitrária. Podemos esperar, portanto, que, para obter uma única solução, será preciso especificar n condições iniciais,

$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (3)$$

onde t_0 pode ser qualquer ponto no intervalo I e $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ é qualquer conjunto dado de constantes reais. O teorema de existência e unicidade a seguir, semelhante ao Teorema 3.2.1, garante que existe uma solução do problema de valor inicial (2), (3) e que ela é única.

Teorema 4.1.1

Se as funções $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e g são contínuas em I, então existe exatamente uma solução $y = \phi(t)$ da equação diferencial (2) que também satisfaz as condições iniciais (3). Essa solução existe em todo o intervalo I.

Não demonstraremos esse teorema aqui. No entanto, se os coeficientes $p_1, \ldots, p_n$ forem constantes, então podemos construir a solução do problema de valor inicial (2), (3) de modo semelhante ao que fizemos no Cap. 3; veja as seções de 4.2 a 4.4. Embora possamos encontrar a solução nesse caso, não saberemos se ela é única se não usarmos o Teorema 4.1.1. Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada nos livros de Ince (Seção 3.32) e de Coddington (Cap. 6).

A Equação Homogênea. Como no problema correspondente de segunda ordem, vamos discutir primeiro a equação homogênea

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = 0. \quad (4)$$

Se as funções $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são soluções da Eq. (4), segue, por cálculo direto, que a combinação linear

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t), \tag{5}$$

onde $c_1, ..., c_n$ são constantes arbitrárias, também é solução da Eq. (4). É natural, então, perguntar se todas as soluções da Eq. (4) podem ser expressas como uma combinação linear de $y_1, \ldots, y_n$. Isso será verdade se for possível escolher as constantes $c_1, ..., c_n$ de modo que a combinação linear (5) satisfaça as condições iniciais (3), sejam elas quais forem. Ou seja, para qualquer escolha do ponto t_0 em I e para qualquer escolha de $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, precisamos ser capazes de determinar $c_1, \ldots, c_n$ de modo que as equações

$$\begin{aligned} c_1 y_1(t_0) + \cdots + c_n y_n(t_0) &= y_0 \\ c_1 y_1'(t_0) + \cdots + c_n y_n'(t_0) &= y_0' \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \tag{6}$$

sejam satisfeitas. As Eqs. (6) podem ser resolvidas de maneira única para as constantes $c_1, ..., c_n$ desde que o determinante dos coeficientes não seja nulo. Por outro lado, se o determinante dos coeficientes é nulo, então sempre é possível escolher valores de $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ de modo que as Eqs. (6) não tenham solução. Portanto, uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução para as Eqs. (6), para valores arbitrários de $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, é que o wronskiano

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{7}$$

não se anule em $t = t_0$. Como t_0 pode ser qualquer ponto do intervalo I, é necessário e suficiente que $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ não se anule em nenhum ponto do intervalo. Do mesmo modo que para equações de segunda ordem, pode-se mostrar que, se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são soluções da Eq. (4), então $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ou é zero para todo t no intervalo I, ou nunca se anula aí; veja o Problema 20. Temos, portanto, o teorema a seguir:

Teorema 4.1.2

Se as funções $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são contínuas no intervalo aberto I, se as funções $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são soluções da Eq. (4) e se $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(t) \neq 0$ para, pelo menos, um ponto t em I, então toda solução da Eq. (4) pode ser expressa como uma combinação linear das soluções $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Um conjunto de soluções $y_1, y_2, \ldots, y_n$ da Eq. (4) cujo wronskiano não se anula é chamado de **conjunto fundamental de soluções**. A existência de um conjunto fundamental de soluções pode ser demonstrada exatamente da mesma forma que para equações lineares de segunda ordem (veja o Teorema 3.2.5). Como todas as soluções da Eq. (4) são da forma (5), usamos o termo **solução geral** para nos referirmos a qualquer combinação linear de qualquer conjunto fundamental de soluções da Eq. (4).

A discussão de dependência e independência linear dada na Seção 3.3 também pode ser generalizada. As funções $f_1, f_2, \ldots, f_n$ são ditas **linearmente dependentes** em I se existe um conjunto de constantes $k_1, k_2, \ldots, k_n$, nem todas nulas, tal que

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + \cdots + k_n f_n = 0 \tag{8}$$

para todo t em I. As funções $f_1, \ldots, f_n$ são ditas **linearmente independentes** em I se não forem linearmente dependentes aí. Se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são soluções da Eq. (4), então pode-se mostrar que uma condição necessária e suficiente para que sejam linearmente independentes é que $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(t_0) \neq 0$ para algum t_0 em I (veja o Problema 25). Portanto, um conjunto fundamental de soluções para a Eq. (4) é linearmente independente e um conjunto linearmente independente de n soluções da Eq. (4) é um conjunto fundamental de soluções.

A Equação Não-Homogênea. Considere, agora, a equação não-homogênea (2),

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)y = g(t).$$

Se Y_1 e Y_2 são duas soluções quaisquer da Eq. (2), segue imediatamente da linearidade do operador L que

$$L[Y_1 - Y_2](t) = L[Y_1](t) - L[Y_2](t) = g(t) - g(t) = 0.$$

Portanto, a diferença entre duas soluções quaisquer da equação não-homogênea (2) é uma solução da equação homogênea (4). Como qualquer solução da equação homogênea pode ser expressa como uma combinação linear de um conjunto fundamental de soluções $y_1, y_2, \ldots, y_n$, segue que qualquer solução da Eq. (2) pode ser escrita na forma

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t) + Y(t), \tag{9}$$

onde Y é alguma solução particular da equação não-homogênea (2). A combinação linear (9) é chamada de solução geral da equação não-homogênea (2).

Assim, o problema básico é determinar um conjunto fundamental de soluções $y_1, y_2, \ldots, y_n$ da equação homogênea (4). Se os coeficientes forem constantes, esse é um problema relativamente simples. Se os coeficientes não forem constantes, é necessário, em geral, usar métodos numéricos como os do Cap. 8 ou métodos de expansão em série semelhantes aos do Cap. 5. Esses últimos tendem a ficar cada vez mais complicados quando a ordem da equação aumenta.

O método de redução de ordem (Seção 3.5) também se aplica a equações lineares de ordem n. Se y_1 é uma solução da Eq. (4), então a substituição $y = v(t)y_1(t)$ leva a uma equação diferencial linear de ordem $n - 1$ para v' (veja o Problema 26 para o caso $n = 3$). No entanto, se $n \geq 3$, a equação reduzida é, pelo menos, de segunda ordem e apenas em casos raros vai ser significativamente mais simples do que a equação original. Dessa forma, na prática, a redução de ordem é raramente útil para equações de ordem maior do que dois.

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, determine os intervalos nos quais existem, com certeza, soluções.

1. $y^{(4)} + 4y''' + 3y = t$
2. $ty''' + (\operatorname{sen} t)y'' + 3y = \cos t$
3. $t(t-1)y^{(4)} + e^t y'' + 4t^2 y = 0$
4. $y''' + ty'' + t^2 y' + t^3 y = \ln t$
5. $(x-1)y^{(4)} + (x+1)y'' + (\operatorname{tg} x)y = 0$
6. $(x^2-4)y^{(6)} + x^2 y''' + 9y = 0$

Nos problemas de 7 a 10, determine se o conjunto de funções dado é linearmente dependente ou linearmente independente. Se for line-

armente dependente, encontre uma relação linear entre os elementos do conjunto.

7. $f_1(t) = 2t - 3, \quad f_2(t) = t^2 + 1, \quad f_3(t) = 2t^2 - t$
8. $f_1(t) = 2t - 3, \quad f_2(t) = 2t^2 + 1, \quad f_3(t) = 3t^2 + t$
9. $f_1(t) = 2t - 3, \quad f_2(t) = t^2 + 1, \quad f_3(t) = 2t^2 - t,$ $f_4(t) = t^2 + t + 1$
10. $f_1(t) = 2t - 3, \quad f_2(t) = t^3 + 1, \quad f_3(t) = 2t^2 - t,$ $f_4(t) = t^2 + t + 1$

Nos problemas de 11 a 16, verifique que as funções dadas são soluções da equação diferencial e determine seu wronskiano.

11. $y''' + y' = 0; \quad 1, \quad \cos t, \quad \operatorname{sen} t$
12. $y^{(4)} + y'' = 0; \quad 1, \quad t, \quad \cos t, \quad \operatorname{sen} t$
13. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0; \quad e^t, \quad e^{-t}, \quad e^{-2t}$
14. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0; \quad 1, \quad t, \quad e^{-t}, \quad te^{-t}$
15. $xy''' - y'' = 0; \quad 1, \quad x, \quad x^3$
16. $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0; \quad x, \quad x^2, \quad 1/x$
17. Mostre que $W(5, \operatorname{sen}^2 t, \cos 2t) = 0$ para todo t. Você pode obter esse resultado sem calcular o wronskiano?
18. Verifique que o operador diferencial definido por
$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)y$$
é um operador diferencial linear, isto é, mostre que
$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2],$$
onde y_1 e y_2 são funções n vezes diferenciáveis, e c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Portanto, mostre que, se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são soluções de $L[y] = 0$, então a combinação linear $c_1y_1 + \ldots + c_ny_n$ também é solução de $L[y] = 0$.
19. Seja L o operador linear definido por
$$L[y] = a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_ny,$$
onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são constantes reais.
(a) Encontre $L[t^n]$.
(b) Encontre $L[e^{rt}]$.
(c) Determine quatro soluções da equação $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$. Você acha que essas quatro soluções formam um conjunto fundamental de soluções? Por quê?
20. Neste problema, mostramos como generalizar o Teorema 3.3.2 (teorema de Abel) para equações de ordem maior. Vamos, primeiro, esboçar o procedimento para a equação de terceira ordem
$$y''' + p_1(t)y'' + p_2(t)y' + p_3(t)y = 0.$$
Sejam y_1, y_2 e y_3 soluções dessa equação em um intervalo I.
(a) Se $W = W(y_1, y_2, y_3)$, mostre que
$$W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' \end{vmatrix}.$$
Sugestão: A derivada de um determinante 3×3 é a soma de três determinantes 3×3 obtidos derivando-se a primeira, a segunda e a terceira linha, respectivamente.
(b) Substitua y_1''', y_2''' e y_3''' a partir da equação diferencial; multiplique a primeira linha por p_3, a segunda por p_2 e some o resultado à última linha para obter
$$W' = -p_1(t)W.$$
(c) Mostre que
$$W(y_1, y_2, y_3)(t) = c\exp\left[-\int p_1(t)\,dt\right].$$
Logo, W ou é sempre igual a zero ou nunca é nulo em I.
(d) Generalize esse argumento para a equação de ordem n
$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)y = 0$$
com soluções $y_1, \ldots, y_n$, isto é, estabeleça a fórmula de Abel,
$$W(y_1, \ldots, y_n)(t) = c\exp\left[-\int p_1(t)\,dt\right],$$
para esse caso.

Nos problemas de 21 a 24, use a fórmula de Abel (Problema 20) para encontrar o wronskiano de um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial dada.

21. $y''' + 2y'' - y' - 3y = 0$
22. $y^{(4)} + y = 0$
23. $ty''' + 2y'' - y' + ty = 0$
24. $t^2y^{(4)} + ty''' + y'' - 4y = 0$
25. O objetivo deste problema é mostrar que, se $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(t_0) \neq 0$ para algum t_0 no intervalo I, então $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são linearmente independentes em I e, se eles são linearmente independentes e soluções de
$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)y = 0 \qquad \text{(i)}$$
em I, então $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ nunca se anula em I.
(a) Suponha que $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(t_0) \neq 0$ e que
$$c_1y_1(t) + \cdots + c_ny_n(t) = 0 \qquad \text{(ii)}$$
para todo t em I. Escrevendo as equações correspondentes às $n - 1$ primeiras derivadas da Eq. (ii) em t_0, mostre que $c_1 = \ldots = c_n = 0$. Logo, $y_1, \ldots, y_n$ são linearmente independentes.
(b) Suponha que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são soluções linearmente independentes da Eq. (i). Se $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(t_0) = 0$ para algum t_0, mostre que existe uma solução não-nula da Eq. (i) satisfazendo as condições iniciais
$$y(t_0) = y'(t_0) = \cdots = y^{(n-1)}(t_0) = 0.$$
Como $y = 0$ é uma solução desse problema de valor inicial, a parte de unicidade do Teorema 4.1.1 nos dá uma contradição. Portanto, W nunca se anula.
26. Mostre que, se y_1 é uma solução de
$$y''' + p_1(t)y'' + p_2(t)y' + p_3(t)y = 0,$$
então a substituição $y = y_1(t)v(t)$ nos leva à seguinte equação de segunda ordem para v':
$$y_1v''' + (3y_1' + p_1y_1)v'' + (3y_1'' + 2p_1y_1' + p_2y_1)v' = 0.$$

Nos Problemas 27 e 28, use o método de redução de ordem (Problema 26) para resolver a equação diferencial dada.

27. $(2 - t)y''' + (2t - 3)y'' - ty' + y = 0, \quad t < 2; \quad y_1(t) = e^t$
28. $t^2(t + 3)y''' - 3t(t + 2)y'' + 6(1 + t)y' - 6y = 0, \quad t > 0;$ $y_1(t) = t^2, \quad y_2(t) = t^3$

4.2 Equações Homogêneas com Coeficientes Constantes

Considere a equação diferencial linear homogênea de ordem n
$$L[y] = a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \qquad (1)$$
onde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são constantes reais. Do que sabemos sobre equações lineares de segunda ordem, é natural esperar que $y = e^{rt}$ seja solução da Eq. (1) para valores apropriados de r. De fato,
$$L[e^{rt}] = e^{rt}(a_0r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}r + a_n) = e^{rt}Z(r) \qquad (2)$$

para todo r, onde

$$Z(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n. \quad (3)$$

Para os valores de r tais que $Z(r) = 0$, segue que $L[e^{rt}] = 0$ e $y = e^{rt}$ é uma solução da Eq. (1). O polinômio $Z(r)$ é chamado de **polinômio característico**, e a equação $Z(r) = 0$ é a **equação característica** da equação diferencial (1). Um polinômio de grau n tem n zeros,[1] digamos $r_1, r_2, \ldots, r_n$, alguns dos quais podem ser iguais; podemos, portanto, escrever a equação característica na forma

$$Z(r) = a_0(r - r_1)(r - r_2)\cdots(r - r_n). \quad (4)$$

Raízes Reais e Distintas. Se as raízes da equação característica são reais e duas delas são sempre diferentes, então temos n soluções distintas $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \ldots, e^{r_n t}$ da Eq. (1). Se essas funções forem linearmente independentes, então a solução geral da Eq. (1) é

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \cdots + c_n e^{r_n t}. \quad (5)$$

Um modo de estabelecer a independência linear de $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \ldots, e^{r_n t}$ é calcular seu wronskiano. Uma outra maneira é indicada no Problema 40.

Exemplo 1

Encontre a solução geral de

$$y^{(4)} + y''' - 7y'' - y' + 6y = 0. \quad (6)$$

Encontre, também, a solução que satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -2, \quad y'''(0) = -1 \quad (7)$$

e desenhe seu gráfico.

Supondo que $y = e^{rt}$, precisamos determinar r resolvendo a equação polinomial

$$r^4 + r^3 - 7r^2 - r + 6 = 0. \quad (8)$$

As raízes dessa equação são $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, $r_3 = 2$ e $r_4 = -3$. Portanto, a solução geral da Eq. (6) é

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} + c_4 e^{-3t}. \quad (9)$$

As condições iniciais (7) indicam que $c_1, \ldots, c_4$ têm que satisfazer as quatro equações

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &= 1, \\ c_1 - c_2 + 2c_3 - 3c_4 &= 0, \\ c_1 + c_2 + 4c_3 + 9c_4 &= -2, \\ c_1 - c_2 + 8c_3 - 27c_4 &= -1. \end{aligned} \quad (10)$$

Resolvendo esse sistema de quatro equações algébricas lineares, encontramos

$$c_1 = \tfrac{11}{8}, \quad c_2 = \tfrac{5}{12}, \quad c_3 = -\tfrac{2}{3}, \quad c_4 = -\tfrac{1}{8}.$$

Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \tfrac{11}{8}e^t + \tfrac{5}{12}e^{-t} - \tfrac{2}{3}e^{2t} - \tfrac{1}{8}e^{-3t}. \quad (11)$$

O gráfico da solução está ilustrado na Fig. 4.2.1.

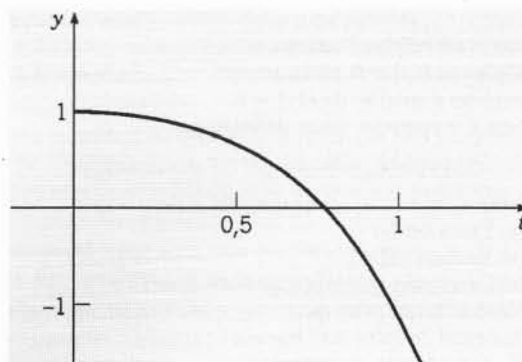


FIG. 4.2.1 Solução do problema de valor inicial do Exemplo 1.

Como ilustrado no Exemplo 1, o procedimento para resolver uma equação diferencial linear de ordem n com coeficientes constantes depende da obtenção das raízes de uma equação polinomial de ordem n correspondente. Se forem dadas condições iniciais, torna-se necessário resolver um sistema de n equações algébricas lineares para se determinar os valores corretos das constantes $c_1, \ldots, c_n$. Embora cada uma dessas tarefas se torne cada vez mais complicada à medida que n cresce, elas podem ser feitas, em geral, sem dificuldades com uma calculadora ou um computador.

Para polinômios de terceiro e quarto graus, existem fórmulas[2] análogas à fórmula para a equação de segundo grau, porém mais complicadas, que fornecem expressões exatas para as raízes. Algoritmos para encontrar raízes estão disponíveis em calculadoras científicas e computadores. Algumas vezes eles estão incluídos no programa que resolve equações diferenciais, de modo que o processo de fatorar o polinômio característico fica escondido e a solução da equação diferencial é produzida automaticamente.

[1] Uma pergunta que foi importante em matemática durante mais de 200 anos era se toda equação polinomial tinha pelo menos uma raiz. A resposta afirmativa a essa pergunta, que é o teorema fundamental da álgebra, foi dada por Carl Friedrich Gauss (1777-1855) em sua dissertação de doutorado em 1799, embora sua demonstração não seja rigorosa o suficiente para os padrões atuais. Diversas outras demonstrações foram encontradas desde então, incluindo três pelo próprio Gauss. Hoje em dia, os alunos encontram o teorema fundamental da álgebra, muitas vezes, em um primeiro curso de variáveis complexas, onde pode ser demonstrado como conseqüência de algumas propriedades básicas de funções analíticas de variável complexa.

[2] O método para resolver equações de terceiro grau foi descoberto, aparentemente, por Scipione dal Ferro (1465-1526) em torno de 1500, embora tenha sido publicado primeiro em 1545 por Girolamo Cardano (1501-1576) em sua obra *Ars Magna*. Esse livro contém, também, um método para resolver equações de quarta ordem, cuja autoria é atribuída, por Cardano, a seu aluno Ludovico Ferrari (1522-1565). O problema de existência de fórmulas análogas para as raízes de equações de ordem mais alta permanece em aberto por mais de dois séculos, até que, em 1826, Niels Abel mostrou que não podem existir fórmulas para a solução geral de equações polinomiais de grau cinco ou maior. Uma teoria mais geral foi desenvolvida por Evariste Galois (1811-1832) em 1831 mas, infelizmente, não se tornou amplamente conhecida por muitas décadas.

Se você tiver que fatorar o polinômio característico manualmente, eis um resultado que às vezes ajuda. Suponha que o polinômio

$$a_0r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_{n-1}r + a_n = 0 \qquad (12)$$

tem coeficientes inteiros. Se $r = p/q$ é uma raiz racional, onde p e q não têm fatores comuns, então p tem que ser um fator de a_n e q tem que ser um fator de a_0. Por exemplo, na Eq. (8), os fatores de a_0 são ± 1 e os de a_n são ± 1, ± 2, ± 3 e ± 6. Dessa forma, as únicas raízes racionais possíveis para essa equação são ± 1, ± 2, ± 3 e ± 6. Testando essas raízes possíveis, encontramos que 1, -1, 2 e -3 são raízes de fato. Nesse caso não existem outras raízes, já que o polinômio tem grau quatro. Se algumas raízes forem irracionais ou complexas, como é o caso em geral, então esse processo não vai encontrá-las, mas pelo menos o grau do polinômio pode ser reduzido dividindo-o pelos fatores correspondentes às raízes racionais.

Se as raízes da equação característica forem reais e distintas, vimos que a solução geral (5) é, simplesmente, uma soma de funções exponenciais. Para valores grandes de t, a solução será dominada pela parcela correspondente à raiz algebricamente maior. Se essa raiz for positiva, as soluções se tornarão exponencialmente ilimitadas, enquanto se a raiz for negativa, as soluções tenderão a zero. Finalmente, se a maior raiz for nula, as soluções tenderão a uma constante não-nula quando t tornar-se muito grande. É claro que, para determinadas condições iniciais, os coeficientes da parcela que seria a dominante pode ser nulo; nesse caso a natureza da solução para valores grandes de t será determinada pela maior raiz presente na solução.

Raízes Complexas. Se a equação característica tiver raízes complexas, elas têm que aparecer em pares conjugados, $\lambda \pm i\mu$, já que os coeficientes $a_0, \ldots, a_n$ são reais. Desde que nenhuma raiz se repita, a solução geral da Eq. (1) ainda é da forma (5). No entanto, da mesma forma que para equações de segunda ordem (Seção 3.4), podemos substituir as soluções complexas $e^{(\lambda+i\mu)t}$ e $e^{(\lambda-i\mu)t}$ pelas soluções reais

$$e^{\lambda t}\cos\mu t, \qquad e^{\lambda t}\,\text{sen}\,\mu t \qquad (13)$$

obtidas como as partes real e imaginária de $e^{(\lambda+i\mu)t}$. Dessa forma, mesmo que algumas das raízes da equação característica sejam complexas, ainda é possível expressar a solução geral da Eq. (1) como combinação linear de soluções reais.

Exemplo 2

Encontre a solução geral de

$$y^{(4)} - y = 0. \qquad (14)$$

Encontre, também, a solução que satisfaz as condições iniciais

$$y(0) = 7/2, \quad y'(0) = -4, \quad y''(0) = 5/2, \quad y'''(0) = -2 \qquad (15)$$

e desenhe seu gráfico.

Substituindo y por e^{rt}, vemos que a equação característica é

$$r^4 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0.$$

Logo, as raízes são $r = 1$, $r = -1$, $r = i$ e $r = -i$, e a solução geral da Eq. (14) é

$$y = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3\cos t + c_4\,\text{sen}\,t.$$

Se impusermos as condições iniciais (15), encontramos

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = 3, \qquad c_3 = 1/2, \qquad c_4 = -1;$$

assim, a solução do problema de valor inicial dado é

$$y = 3e^{-t} + \tfrac{1}{2}\cos t - \text{sen}\,t. \qquad (16)$$

O gráfico dessa solução está ilustrado na Fig. 4.2.2.

Observe que as condições iniciais (15) fazem com que o coeficiente c_1 da parcela exponencial crescente na solução geral seja zero. Essa parcela, portanto, está ausente na solução (16), que descreve um decaimento exponencial para uma oscilação estacionária, como mostra a Fig. 4.2.2. No entanto, se as condições iniciais forem ligeiramente alteradas, então c_1 não será, provavelmente, nulo e a natureza da solução vai mudar tremendamente. Por exemplo, se as três primeiras condições iniciais permanecem iguais, mas o valor de $y'''(0)$ muda de -2 para $-15/8$, então a solução do problema de valor inicial se torna

$$y = \tfrac{1}{32}e^t + \tfrac{95}{32}e^{-t} + \tfrac{1}{2}\cos t - \tfrac{17}{16}\,\text{sen}\,t. \qquad (17)$$

Os coeficientes na Eq. (17) diferem pouco dos na Eq. (16), mas a parcela que cresce exponencialmente, mesmo com o coeficiente relativamente pequeno 1/32, domina completamente a solução quando t se torna maior ou em torno de 4 ou 5. Isso pode ser visto claramente na Fig. 4.2.3, que mostra o gráfico das duas soluções (16) e (17).

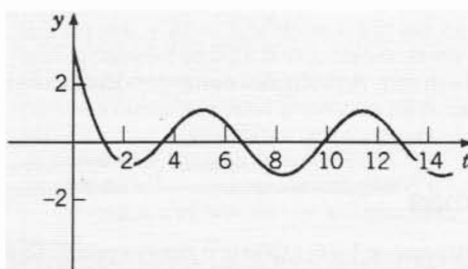


FIG. 4.2.2 O gráfico da solução (16).

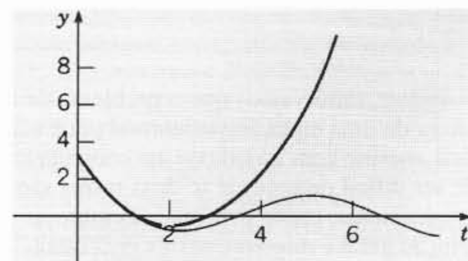


FIG. 4.2.3 Gráficos das soluções (16) (curva mais fina) e (17) (curva mais grossa).

Raízes Repetidas. Se as raízes da equação característica não forem distintas — isto é, se algumas das raízes forem repetidas — então a solução (5) não é, obviamente, a solução geral da Eq. (1). Lembre-se de que, se r_1 é uma raiz repetida para a equação linear de segunda ordem $a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$, então as duas soluções linearmente independentes são e^{r_1t} e te^{r_1t}. Para uma equação de ordem n, se uma raiz de $Z(r) = 0$, digamos $r = r_1$, tem multiplicidade s (onde $s \leq n$), então

$$e^{r_1t}, \quad te^{r_1t}, \quad t^2e^{r_1t}, \quad \ldots, \quad t^{s-1}e^{r_1t} \tag{18}$$

são as soluções correspondentes da Eq. (1); veja o Problema 41 para uma demonstração dessa afirmação.

Se uma raiz complexa $\lambda + i\mu$ repete-se s vezes, a raiz complexa conjugada $\lambda - i\mu$ também se repete s vezes. Correspondendo a essas $2s$ soluções complexas, podemos encontrar $2s$ soluções reais observando que as partes reais e imaginárias de $e^{(\lambda+i\mu)t}, te^{(\lambda+i\mu)t}, \ldots, t^{s-1}e^{(\lambda+i\mu)t}$ também são soluções linearmente independentes:

$$e^{\lambda t}\cos\mu t, \quad e^{\lambda t}\,\mathrm{sen}\,\mu t, \quad te^{\lambda t}\cos\mu t, \quad te^{\lambda t}\,\mathrm{sen}\,\mu t, \quad \ldots, t^{s-1}e^{\lambda t}\cos\mu t, \quad t^{s-1}e^{\lambda t}\,\mathrm{sen}\,\mu t.$$

Portanto, a solução geral da Eq. (1) sempre pode ser expressa como uma combinação linear de n soluções reais. Considere o exemplo a seguir.

Exemplo 3

Encontre a solução geral de

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0. \tag{19}$$

A equação característica é

$$r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)(r^2 + 1) = 0.$$

As raízes são $r = i, i, -i, -i$, e a solução geral da Eq. (19) é

$$y = c_1\cos t + c_2\,\mathrm{sen}\,t + c_3t\cos t + c_4t\,\mathrm{sen}\,t.$$

Na determinação das raízes de uma equação característica, pode ser necessário calcular raízes cúbicas, quartas ou até mesmo raízes de ordem maior de um número (que pode ser complexo). Em geral, a maneira mais conveniente de se fazer isso é usando a fórmula de Euler $e^{it} = \cos t + i\,\mathrm{sen}\,t$ e as regras algébricas dadas na Seção 3.4. Isso está ilustrado no exemplo a seguir.

Exemplo 4

Encontre a solução geral de

$$y^{(4)} + y = 0. \tag{20}$$

A equação característica é

$$r^4 + 1 = 0.$$

Para resolver a equação, precisamos encontrar as raízes quartas de -1. Mas -1, considerado como um número complexo, é $-1 + 0i$. Tem módulo 1 e ângulo polar π. Então,

$$-1 = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi = e^{i\pi}.$$

Além disso, o ângulo está determinado a menos de um múltiplo de 2π. Assim,

$$-1 = \cos(\pi + 2m\pi) + i\,\mathrm{sen}(\pi + 2m\pi) = e^{i(\pi+2m\pi)},$$

onde m é zero ou qualquer inteiro positivo ou negativo. Logo,

$$(-1)^{1/4} = e^{i(\pi/4+m\pi/2)} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right).$$

As raízes quartas de -1 são obtidas fazendo-se $m = 0, 1, 2$ e 3; elas são

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

É fácil verificar que, para qualquer outro valor de m, obtemos uma dessas quatro raízes. Por exemplo, correspondendo a $m = 4$, obtemos $(1 + i)/\sqrt{2}$. A solução geral da Eq. (20) é

$$y = e^{t/\sqrt{2}}\left(c_1\cos\frac{t}{\sqrt{2}} + c_2\,\mathrm{sen}\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + e^{-t/\sqrt{2}}\left(c_3\cos\frac{t}{\sqrt{2}} + c_4\,\mathrm{sen}\frac{t}{\sqrt{2}}\right). \tag{21}$$

Para concluir, observamos que o problema de encontrar todas as raízes de uma equação polinomial pode não ser inteiramente fácil, mesmo com a ajuda de um computador. Por exemplo, pode ser difícil determinar se duas raízes são iguais ou se estão, simplesmente, muito próximas. Lembre-se de que a forma da solução geral é diferente nesses dois casos.

Se as constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ na Eq. (1) forem números complexos, a solução da Eq. (1) ainda é da forma (4). Nesse caso, no entanto, as raízes da equação característica são, em geral, complexas e não é mais verdade que o complexo conjugado de uma raiz é também raiz. As soluções correspondentes tomam valores complexos.

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, expresse o número complexo dado na forma $R(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) = Re^{i\theta}$.

1. $1 + i$
2. $-1 + \sqrt{3}i$
3. -3
4. $-i$
5. $\sqrt{3} - i$
6. $-1 - i$

Nos problemas de 7 a 10, siga o procedimento ilustrado no Exemplo 4 para determinar as raízes indicadas do número complexo dado.

7. $1^{1/3}$
8. $(1-i)^{1/2}$
9. $1^{1/4}$
10. $[2(\cos\pi/3 + i\,\text{sen}\,\pi/3)]^{1/2}$

Nos problemas de 11 a 28, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

11. $y''' - y'' - y' + y = 0$
12. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
13. $2y''' - 4y'' - 2y' + 4y = 0$
14. $y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0$
15. $y^{(6)} + y = 0$
16. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$
17. $y^{(6)} - 3y^{(4)} + 3y'' - y = 0$
18. $y^{(6)} - y'' = 0$
19. $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y''' - 3y'' + 2y' = 0$
20. $y^{(4)} - 8y' = 0$
21. $y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0$
22. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$
23. $y''' - 5y'' + 3y' + y = 0$
24. $y''' + 5y'' + 6y' + 2y = 0$
25. $18y''' + 21y'' + 14y' + 4y = 0$
26. $y^{(4)} - 7y''' + 6y'' + 30y' - 36y = 0$
27. $12y^{(4)} + 31y''' + 75y'' + 37y' + 5y = 0$
28. $y^{(4)} + 6y''' + 17y'' + 22y' + 14y = 0$

Nos problemas de 29 a 36, encontre a solução do problema de valor inicial dado e faça seu gráfico. Como a solução se comporta quando $t \to \infty$?

29. $y''' + y' = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$
30. $y^{(4)} + y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$, $y'''(0) = 0$
31. $y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0$; $y(1) = -1$, $y'(1) = 2$, $y''(1) = 0$, $y'''(1) = 0$
32. $y''' - y'' + y' - y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = -2$
33. $2y^{(4)} - y''' - 9y'' + 4y' + 4y = 0$; $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$, $y'''(0) = 0$
34. $4y''' + y' + 5y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$
35. $6y''' + 5y'' + y' = 0$; $y(0) = -2$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 0$
36. $y^{(4)} + 6y''' + 17y'' + 22y' + 14y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 3$
37. Mostre que a solução geral de $y^{(4)} - y = 0$ pode ser escrita como

$$y = c_1\cos t + c_2\,\text{sen}\,t + c_3\cosh t + c_4\,\text{senh}\,t.$$

Determine a solução que satisfaz as condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 1$. Por que é conveniente usar as soluções cosh t e senh t, em vez de e^t e e^{-t}?

38. Considere a equação $y^{(4)} - y = 0$.
(a) Use a fórmula de Abel [Problema 20(d) da Seção 4.1] para encontrar o wronskiano de um conjunto fundamental de soluções da equação dada.
(b) Determine o wronskiano das soluções e^t, e^{-t}, cos t e sen t.
(c) Determine o wronskiano das soluções cosh t, senh t, cos t e sen t.

39. Considere o sistema massa-mola ilustrado na Fig. 4.2.4 consistindo em duas massas unitárias suspensas em molas com constantes 3 e 2, respectivamente. Suponha que não haja amortecimento no sistema.
(a) Mostre que os deslocamentos u_1 e u_2 das massas a partir de suas respectivas posições de equilíbrio satisfazem as equações

$$u_1'' + 5u_1 = 2u_2, \qquad u_2'' + 2u_2 = 2u_1. \qquad \text{(i)}$$

(b) Resolva a primeira das Eqs. (i) para u_2 e substitua o resultado na segunda equação, obtendo, assim, a seguinte equação de quarta ordem para u_1:

$$u_1^{(4)} + 7u_1'' + 6u_1 = 0. \qquad \text{(ii)}$$

Encontre a solução geral da Eq. (ii).

FIG. 4.2.4 Um sistema com duas molas e duas massas.

(c) Suponha que as condições iniciais são

$$u_1(0) = 1, \quad u_1'(0) = 0, \quad u_2(0) = 2, \quad u_2'(0) = 0. \qquad \text{(iii)}$$

Use a primeira das Eqs. (i) e as condições iniciais (iii) para obter os valores de $u_1''(0)$ e de $u_1'''(0)$. Depois mostre que a solução da Eq. (ii) que satisfaz as quatro condições iniciais em u_1 é $u_1(t) = \cos t$. Mostre que a solução correspondente u_2 é $u_2(t) = 2\cos t$.
(d) Suponha, agora, que as condições iniciais são

$$u_1(0) = -2, \quad u_1'(0) = 0, \quad u_2(0) = 1, \quad u_2'(0) = 0. \qquad \text{(iv)}$$

Proceda como no item (c) para mostrar que as soluções correspondentes são $u_1(t) = -2\cos\sqrt{6}t$ e $u_2(t) = \cos\sqrt{6}t$.
(e) Observe que as soluções obtidas nos itens (c) e (d) descrevem dois modos de vibração distintos. No primeiro, a freqüência do movimento é 1 e as duas massas movem-se em fase. No segundo, a freqüência é $\sqrt{6}$ e as massas movem-se fora de fase, uma em relação a outra, uma movendo-se para baixo e a outra movendo-se para cima. Para outras condições iniciais, o movimento das massas é uma combinação desses dois modos de vibração.

40. Esquematizamos, neste problema, um modo de mostrar que, se $r_1, \ldots, r_n$ são reais e distintos, então $e^{r_1t}, \cdots, e^{r_nt}$ são linearmente independentes em $-\infty < t < \infty$. Para fazer isso, vamos considerar a relação linear

$$c_1e^{r_1t} + \cdots + c_ne^{r_nt} = 0, \quad -\infty < t < \infty \qquad \text{(i)}$$

e mostrar que todas as constantes são nulas.
(a) Multiplique a Eq. (i) por e^{-r_1t} e derive em relação a t, obtendo, assim,

$$c_2(r_2 - r_1)e^{(r_2-r_1)t} + \cdots + c_n(r_n - r_1)e^{(r_n-r_1)t} = 0.$$

(b) Multiplique o resultado do item (a) por $e^{-(r_2-r_1)t}$ e derive em relação a t para obter

$$c_3(r_3 - r_2)(r_3 - r_1)e^{(r_3-r_2)t} + \cdots$$
$$+ c_n(r_n - r_2)(r_n - r_1)e^{(r_n-r_2)t} = 0.$$

(c) Continue o procedimento iniciado nos itens (a) e (b) obtendo, finalmente,

$$c_n(r_n - r_{n-1}) \cdots (r_n - r_1)e^{(r_n-r_{n-1})t} = 0.$$

Logo, $c_n = 0$ e, portanto,

$$c_1 e^{r_1 t} + \cdots + c_{n-1}e^{r_{n-1}t} = 0.$$

(d) Repita o argumento precedente para mostrar que $c_{n-1} = 0$. De maneira análoga, segue que $c_{n-2} = \ldots = c_1 = 0$. Portanto, as funções $e^{r_1 t}, \cdots, e^{r_n t}$ são linearmente independentes.

41. Vamos indicar, neste problema, um modo de mostrar que, se $r = r_1$ é uma raiz de multiplicidade s do do polinômio característico $Z(r)$, então $e^{r_1 t}, te^{r_1 t}, \ldots, t^{s-1}e^{r_1 t}$ são soluções da Eq. (1). Este problema estende para equações de ordem n o método dado no Problema 22 da Seção 3.5 para equações de segunda ordem. Começamos com a Eq. (2) no texto,

$$L[e^{rt}] = e^{rt}Z(r), \qquad \text{(i)}$$

e diferenciamos repetidamente em relação a r, fazendo $r = r_1$ depois de cada diferenciação.

(a) Observe que, se r_1 é uma raiz de multiplicidade s, então $Z(r) = (r - r_1)^s q(r)$, onde $q(r)$ é um polinômio de grau $n - s$ e $q(r_1) \neq 0$. Mostre que $Z(r_1), Z'(r_1), \ldots, Z^{(s-1)}(r_1)$ são todos iguais a zero, mas $Z^{(s)}(r_1) \neq 0$.

(b) Diferenciando, repetidamente, a Eq. (i) em relação a r, mostre que

$$\frac{\partial}{\partial r} L[e^{rt}] = L\left[\frac{\partial}{\partial r} e^{rt}\right] = L[te^{rt}],$$
$$\frac{\partial^{s-1}}{\partial r^{s-1}} L[e^{rt}] = L[t^{s-1}e^{rt}],$$

(c) Mostre que $e^{r_1 t}, te^{r_1 t}, \ldots, t^{s-1}e^{r_1 t}$ são soluções da Eq. (1).

4.3 O Método dos Coeficientes Indeterminados

Uma solução particular Y da equação linear não-homogênea de ordem n com coeficientes constantes

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = g(t) \qquad (1)$$

pode ser obtida pelo método dos coeficientes indeterminados (também conhecido como *método dos coeficientes a determinar*), desde que $g(t)$ tenha uma forma apropriada. Embora o método dos coeficientes indeterminados não seja tão geral quanto o método de variação dos parâmetros descrito na próxima seção, é, em geral, muito mais fácil de usar quando aplicável.

Como no caso de equações lineares de segunda ordem, quando o operador diferencial linear com coeficientes constantes L é aplicado a um polinômio $A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \ldots + A_m$, a uma função exponencial $e^{\alpha t}$, a uma função seno sen βt, ou a uma função co-seno cos βt, o resultado é, respectivamente, um polinômio, uma função exponencial ou uma combinação linear de funções seno e co-seno. Logo, se $g(t)$ é uma soma de polinômios, exponenciais, senos e co-senos, ou um produto de tais funções, esperamos que seja possível encontrar $Y(t)$ através de uma escolha conveniente de combinações de polinômios, exponenciais etc., multiplicadas por um número de constantes indeterminadas. As constantes são, então, determinadas substituindo-se a expressão proposta na Eq. (1).

A diferença principal em utilizar esse método para equações de ordem mais alta vem do fato de que as raízes da equação polinomial característica podem ter multiplicidade maior do que 2. Em conseqüência, pode ser necessário multiplicar as parcelas propostas para a parte não-homogênea da solução por potências mais altas de t de modo a obter funções diferentes das correspondentes à solução da equação homogênea associada. Isso está ilustrado nos próximos exemplos. Nesses exemplos omitimos diversos passos algébricos, já que nosso objetivo principal é chegar à forma correta da solução.

Exemplo 1

Encontre a solução geral de

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 4e^t. \qquad (2)$$

O polinômio característico para a equação homogênea associada à Eq. (2) é

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = (r - 1)^3,$$

de modo que a solução geral da equação homogênea é

$$y_c(t) = c_1 e^t + c_2 te^t + c_3 t^2 e^t. \qquad (3)$$

Para encontrar uma solução particular $Y(t)$ da Eq. (2), começamos supondo que $y(t) = Ae^t$. No entanto, como e^t, te^t e t^2e^t são todas soluções da equação homogênea, precisamos multiplicar nossa escolha inicial por t^3. Assim, nossa hipótese final é supor que $Y(t) = At^3e^t$, onde A é um coeficiente indeterminado. Para encontrar o valor correto de A, derivamos $Y(t)$ três vezes, usamos esses resultados para substituir y e suas derivadas na Eq. (2) e juntamos os termos correspondentes na equação resultante. Dessa maneira, obtemos

$$6Ae^t = 4e^t.$$

Portanto, $A = 2/3$ e a solução particular é

$$Y(t) = \tfrac{2}{3}t^3e^t. \qquad (4)$$

A solução geral da Eq. (2) é a soma de $y_c(t)$ da Eq. (3) e $Y(t)$ da Eq. (4).

Exemplo 2

Encontre uma solução particular da equação

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 3\,\text{sen}\,t - 5\cos t. \quad (5)$$

Vimos, no Exemplo 3 da Seção 4.2, que a solução geral da equação homogênea é

$$y_c(t) = c_1 \cos t + c_2 \text{sen}\,t + c_3 t\cos t + c_4 t\,\text{sen}\,t, \quad (6)$$

correspondendo às raízes $r = i, i, -i, -i$ da equação característica. Nossa hipótese inicial para uma solução particular é $Y(t) = A\,\text{sen}\,t + B\cos t$, mas precisamos multiplicar essa escolha por t^2 para torná-la diferente de todas as soluções da equação homogênea. Nossa hipótese final é, então,

$$Y(t) = At^2 \text{sen}\,t + Bt^2 \cos t.$$

A seguir, derivamos $Y(t)$ quatro vezes, substituímos na equação diferencial (4) e juntamos os termos correspondentes, obtendo, finalmente,

$$-8A\,\text{sen}\,t - 8B\cos t = 3\,\text{sen}\,t - 5\cos t.$$

Assim, $A = -3/8$, $B = 5/8$ e a solução particular da Eq. (4) é

$$Y(t) = -\tfrac{3}{8}t^2 \text{sen}\,t + \tfrac{5}{8}t^2 \cos t. \quad (7)$$

Se $g(t)$ for uma soma de diversas parcelas, é mais fácil, muitas vezes, calcular separadamente a solução particular correspondente a cada parcela que compõe $g(t)$. Como para equações de segunda ordem, a solução particular do problema completo é a soma das soluções particulares dos problemas componentes. Isso está ilustrado no exemplo a seguir.

Exemplo 3

Encontre uma solução particular de

$$y''' - 4y' = t + 3\cos t + e^{-2t}. \quad (8)$$

Vamos resolver, primeiro, a equação homogênea. A equação característica é $r^3 - 4r = 0$, e as raízes são $0, \pm 2$; portanto,

$$y_c(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}.$$

Podemos escrever uma solução particular da Eq. (8) como uma soma das soluções particulares das equações

$$y''' - 4y' = t, \quad y''' - 4y' = 3\cos t, \quad y''' - 4y' = e^{-2t}.$$

Nossa escolha inicial para uma solução particular $Y_1(t)$ da primeira equação é $A_0 t + A_1$, mas, como uma constante é solução da equação homogênea, multiplicamos por t. Assim,

$$Y_1(t) = t(A_0 t + A_1).$$

Para a segunda equação escolhemos

$$Y_2(t) = B\cos t + C\,\text{sen}\,t,$$

e não há necessidade de modificar essa escolha inicial, já que cos t e sen t não são soluções da equação homogênea. Finalmente, para a terceira equação, como e^{-2t} é uma solução da equação homogênea, supomos que

$$Y_3(t) = Ete^{-2t}.$$

As constantes são determinadas substituindo as escolhas nas equações diferenciais individuais; elas são $A_0 = -1/8$, $A_1 = 0$, $B = 0$, $C = -3/5$ e $E = 1/8$. Portanto, uma solução particular da Eq. (8) é

$$Y(t) = -\tfrac{1}{8}t^2 - \tfrac{3}{5}\,\text{sen}\,t + \tfrac{1}{8}te^{-2t}. \quad (9)$$

Você deve compreender que a quantidade de cálculo necessária para se calcular os coeficientes pode ser bem grande para equações de ordem mais alta, especialmente se o termo não-homogêneo é complicado, ainda que moderadamente. Um sistema de álgebra computacional pode ser extremamente útil na execução desses cálculos algébricos.

O método de coeficientes indeterminados pode ser usado sempre que for possível inferir a forma correta de $Y(t)$. No entanto, isso em geral é impossível para equações diferenciais que não têm coeficientes constantes ou que contêm termos não-homogêneos diferentes dos descritos anteriormente. Para problemas mais complicados, podemos usar o método de variação dos parâmetros que será discutido na próxima seção.

Problemas

Nos problemas de 1 a 8, determine a solução geral da equação diferencial dada.

1. $y''' - y'' - y' + y = 2e^{-t} + 3$
2. $y^{(4)} - y = 3t + \cos t$
3. $y''' + y'' + y' + y = e^{-t} + 4t$
4. $y''' - y' = 2\,\text{sen}\,t$
5. $y^{(4)} - 4y'' = t^2 + e^t$
6. $y^{(4)} + 2y'' + y = 3 + \cos 2t$
7. $y^{(6)} + y''' = t$
8. $y^{(4)} + y''' = \text{sen}\,2t$

Nos problemas de 9 a 12, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Depois faça um gráfico da solução.

9. $y''' + 4y' = t, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$
10. $y^{(4)} + 2y'' + y = 3t + 4, \quad y(0) = y'(0) = 0,$ $y''(0) = y'''(0) = 1$
11. $y''' - 3y'' + 2y' = t + e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\tfrac{1}{4},$ $y''(0) = -\tfrac{3}{2}$
12. $y^{(4)} + 2y''' + y'' + 8y' - 12y = 12\,\text{sen}\,t - e^{-t},$ $y(0) = 3, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 2$

Nos problemas de 13 a 18, determine uma forma adequada para $Y(t)$ se for utilizado o método dos coeficientes indeterminados. Não calcule as constantes.

13. $y''' - 2y'' + y' = t^3 + 2e^t$
14. $y''' - y' = te^{-t} + 2\cos t$
15. $y^{(4)} - 2y'' + y = e^t + \operatorname{sen} t$
16. $y^{(4)} + 4y'' = \operatorname{sen} 2t + te^t + 4$
17. $y^{(4)} - y''' - y'' + y' = t^2 + 4 + t\operatorname{sen} t$
18. $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' = 3e^t + 2te^{-t} + e^{-t}\operatorname{sen} t$
19. Considere a equação diferencial linear de ordem n

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = g(t), \qquad \text{(i)}$$

onde $a_0, \ldots, a_n$ são constantes. Verifique que, se $g(t)$ tiver a forma

$$e^{\alpha t}(b_0 t^m + \cdots + b_m),$$

então a substituição $y = e^{\alpha t}u(t)$ reduz a Eq. (i) à forma

$$k_0 u^{(n)} + k_1 u^{(n-1)} + \cdots + k_n u = b_0 t^m + \cdots + b_m, \quad \text{(ii)}$$

onde $k_0, \ldots, k_n$ são constantes. Determine k_0 e k_n em função dos a_i e de α. Assim, o problema de determinar uma solução particular da equação original é reduzido ao problema mais simples de determinar uma solução particular de uma equação com coeficientes constantes e contendo um polinômio como termo não-homogêneo.

O Método dos Aniquiladores. Nos problemas de 20 a 22, consideramos uma outra maneira de se chegar a uma forma adequada para $Y(t)$ para usar no método dos coeficientes indeterminados. O procedimento baseia-se na observação de que as funções exponenciais, polinomiais ou senoidais (ou somas e produtos de tais funções) podem ser consideradas como soluções de certas equações diferenciais lineares homogêneas com coeficientes constantes. É conveniente usar o símbolo D para d/dt. Então, por exemplo, e^{-t} é uma solução de $(D + 1)y = 0$; diz-se que o operador diferencial $D + 1$ *aniquila*, ou é um *aniquilador* de, e^{-t}. Analogamente, $D^2 + 4$ é um aniquilador de sen $2t$ ou cos $2t$, $(D - 3)^2 = D^2 - 6D + 9$ é um aniquilador de e^{3t} ou te^{3t}, e assim por diante.

20. Mostre que os operadores diferenciais lineares com coeficientes constantes comutam. Isto é, mostre que

$$(D - a)(D - b)f = (D - b)(D - a)f$$

quaisquer que sejam a função duas vezes diferenciável f e as constantes a e b. O resultado pode ser imediatamente estendido a qualquer número finito de fatores.

21. Considere o problema de encontrar a forma da solução particular $Y(t)$ de

$$(D - 2)^3(D + 1)Y = 3e^{2t} - te^{-t}, \qquad \text{(i)}$$

onde a expressão à esquerda do sinal de igualdade na equação está escrito de uma forma que corresponde à fatorização do polinômio característico.

(a) Mostre que $D - 2$ e $(D + 1)^2$ são aniquiladores, respectivamente, das parcelas à direita do sinal de igualdade na Eq. (i) e que o operador composto $(D - 2)(D + 1)^2$ aniquila ambas essas parcelas simultaneamente.

(b) Aplique o operador $(D - 2)(D + 1)^2$ à Eq. (i) e use o resultado do Problema 20 para obter

$$(D - 2)^4(D + 1)^3 Y = 0. \qquad \text{(ii)}$$

Logo, Y é uma solução da equação homogênea (ii). Resolvendo a Eq. (ii), mostre que

$$Y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 te^{2t} + c_3 t^2 e^{2t} + c_4 t^3 e^{2t} + c_5 e^{-t} + c_6 te^{-t} + c_7 t^2 e^{-t}, \qquad \text{(iii)}$$

onde $c_1, \ldots, c_7$ são constantes, ainda indeterminadas.

(c) Note que e^{2t}, te^{2t}, t^2e^{2t} e e^{-t} são soluções da equação homogênea associada à Eq. (i); portanto, essas expressões não servem para resolver a equação não-homogênea. Escolha, então, c_1, c_2, c_3 e c_5 como zero na Eq. (iii), de modo que

$$Y(t) = c_4 t^3 e^{2t} + c_6 te^{-t} + c_7 t^2 e^{-t}. \qquad \text{(iv)}$$

Essa é a forma da solução particular $Y(t)$ da Eq. (i). Os valores dos coeficientes c_4, c_6 e c_7 podem ser encontrados usando-se a Eq. (iv) na equação diferencial (i).

Resumo. Suponha que

$$L(D)y = g(t), \qquad \text{(v)}$$

onde $L(D)$ é um operador diferencial linear com coeficientes constantes e $g(t)$ é uma soma ou produto de funções exponenciais, polinomiais e senoidais. Para encontrar a forma da solução particular da Eq. (v), você pode proceder da seguinte maneira:

(a) Encontre um operador diferencial $H(D)$ com coeficientes constantes que aniquila $g(t)$, isso é, um operador tal que $H(D)g(t) = 0$.

(b) Aplique $H(D)$ à Eq. (v), obtendo

$$H(D)L(D)y = 0, \qquad \text{(vi)}$$

que é uma equação homogênea de ordem maior.

(c) Resolva a Eq. (vi).

(d) Elimine da solução encontrada em (c) os termos que também aparecem como solução da equação homogênea $L(D)y = 0$. Os termos restantes constituem a forma correta da solução particular para a Eq. (v).

22. Use o método dos aniquiladores para encontrar a forma da solução particular $Y(t)$ para cada uma das equações nos problemas de 13 a 18. Não calcule os coeficientes.

4.4 O Método de Variação dos Parâmetros

O método de variação dos parâmetros para determinar uma solução particular de uma equação diferencial linear não-homogênea de ordem n

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = g(t) \qquad (1)$$

é uma extensão direta do método para equações diferenciais de segunda ordem (veja a Seção 3.7). Como anteriormente, para se usar o método de variação de parâmetros é necessário, primeiro, resolver a equação diferencial homogênea associada. Isso pode ser difícil, em geral, a menos que os coeficientes sejam constantes. No entanto, o método de variação dos parâmetros é mais geral do que o método de coeficientes indeterminados, pois nos leva a uma expressão para a solução particular para *qualquer* função contínua g, enquanto o método dos coeficientes indeterminados fica restrito, na prática, a uma classe limitada de funções g.

Suponha, então, que conhecemos um conjunto fundamental de soluções $y_1, y_2, \ldots, y_n$ da equação homogênea. Então, a solução geral da equação homogênea é

$$y_c(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t). \qquad (2)$$

O método de variação dos parâmetros para determinar uma solução particular da Eq. (1) depende da possibilidade de se determinar n funções $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tais que $Y(t)$ seja da forma

$$Y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) + \cdots + u_n(t)y_n(t). \qquad (3)$$

Como precisamos determinar n funções, teremos que especificar n condições. Uma dessas, obviamente, é que Y satisfaça a Eq. (1). As outras $n - 1$ condições são escolhidas de modo a simplificar ao máximo os cálculos. Como não podemos esperar uma simplificação na determinação de Y se tivermos que resolver equações diferenciais de ordem alta para $u_1, \ldots, u_n$, é natural impor condições que suprimam as parcelas contendo as derivadas de ordem mais alta de $u_1, \ldots, u_n$. Da Eq. (3), obtemos

$$Y' = (u_1 y_1' + u_2 y_2' + \cdots + u_n y_n') + (u_1' y_1 + u_2' y_2 + \cdots + u_n' y_n), \qquad (4)$$

onde omitimos a variável independente t, da qual dependem todas as funções na Eq. (4). Então, a primeira condição que impomos é que

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 + \cdots + u_n' y_n = 0. \qquad (5)$$

Continuando esse processo de maneira semelhante até a derivada $n - 1$ de Y, obtemos

$$Y^{(m)} = u_1 y_1^{(m)} + u_2 y_2^{(m)} + \cdots + u_n y_n^{(m)}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \qquad (6)$$

e as $n - 1$ condições seguintes sobre as funções $u_1, \ldots, u_n$:

$$u_1' y_1^{(m-1)} + u_2' y_2^{(m-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(m-1)} = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (7)$$

A n-ésima derivada de Y é

$$Y^{(n)} = (u_1 y_1^{(n)} + \cdots + u_n y_n^{(n)}) + (u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)}). \qquad (8)$$

Finalmente, impomos a condição que Y tem que ser solução da Eq. (1). Usando as derivadas de Y dadas pelas Eqs. (6) e (8), juntando termos semelhantes e usando o fato de que $L[y_i] = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, obtemos

$$u_1' y_1^{(n-1)} + u_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} = g. \qquad (9)$$

A Eq. (9), junto com as $n - 1$ equações (7), nos dão n equações algébricas lineares não-homogêneas simultâneas para $u_1', u_2', \cdots, u_n'$:

$$\begin{aligned} y_1 u_1' + y_2 u_2' + \cdots + y_n u_n' &= 0, \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' + \cdots + y_n' u_n' &= 0, \\ y_1'' u_1' + y_2'' u_2' + \cdots + y_n'' u_n' &= 0, \\ &\vdots \\ y_1^{(n-1)} u_1' + \cdots + y_n^{(n-1)} u_n' &= g. \end{aligned} \qquad (10)$$

O sistema (10) é um sistema algébrico linear para as quantidades desconhecidas $u_1', \cdots, u_n'$. Resolvendo esse sistema e integrando as expressões resultantes, você pode obter os coeficientes $u_1, \ldots, u_n$. Uma condição suficiente para a existência de uma solução do sistema de equações (10) é que o determinante dos coeficientes seja não-nulo para cada valor de t. No entanto, o determinante dos coeficientes é exatamente $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, que é não-nulo, já que $y_1, \ldots, y_n$ são soluções linearmente independentes da equação homogênea. Portanto, é possível determinar $u_1', \cdots, u_n'$. Usando a regra de Cramer[3], podemos escrever a solução do sistema de equações (10) na forma

$$u_m'(t) = \frac{g(t) W_m(t)}{W(t)}, \qquad m = 1, 2, \ldots, n. \qquad (11)$$

Aqui, $W(t) = W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(t)$ e W_m é o determinante obtido de W substituindo-se a m-ésima coluna pela coluna $(0, 0, \ldots, 0, 1)$. Com essa notação, uma solução particular da Eq. (1) é dada por

$$Y(t) = \sum_{m=1}^{n} y_m(t) \int_{t_0}^{t} \frac{g(s) W_m(s)}{W(s)}\, ds, \qquad (12)$$

onde t_0 é arbitrário. Embora o procedimento seja bastante direto, os cálculos envolvidos na determinação de $Y(t)$ pela Eq. (12) tornam-se cada vez mais complicados quando n aumenta. Em alguns casos, os cálculos podem ser um pouco simplificados usando-se a fórmula de Abel (Problema 20 da Seção 4.1),

$$W(t) = W(y_1, \ldots, y_n)(t) = c \exp\left[-\int p_1(t)\, dt\right].$$

A constante c pode ser determinada calculando-se W em algum ponto conveniente.

Exemplo 1

Sabendo que $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = te^t$ e $y_3(t) = e^{-t}$ são soluções da equação homogênea associada a

$$y''' - y'' - y' + y = g(t), \qquad (13)$$

determine uma solução particular da Eq. (13) como uma integral.

Usaremos a Eq. (12). Em primeiro lugar, temos

$$W(t) = W(e^t, te^t, e^{-t})(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & e^{-t} \\ e^t & (t+1)e^t & -e^{-t} \\ e^t & (t+2)e^t & e^{-t} \end{vmatrix}.$$

Fatorando e^t das duas primeiras colunas e e^{-t} da terceira coluna, obtemos

$$W(t) = e^t \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & t+1 & -1 \\ 1 & t+2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Subtraindo, então, a primeira linha da segunda e da terceira, ficamos com

$$W(t) = e^t \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Finalmente, calculando esse último determinante, vemos que

$$W(t) = 4e^t.$$

Agora,

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & te^t & e^{-t} \\ 0 & (t+1)e^t & -e^{-t} \\ 1 & (t+2)e^t & e^{-t} \end{vmatrix}.$$

[3]A regra de Cramer é atribuída a Gabriel Cramer (1704-1752), professor na Académie de Calvin em Genebra, que a publicou sob a forma geral (mas sem demonstração) em 1750. Para sistemas com menor número de equações, os resultados eram conhecidos anteriormente.

Expandindo em relação à primeira coluna, obtemos

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} te^t & e^{-t} \\ (t+1)e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2t - 1.$$

De maneira análoga,

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} e^t & 0 & e^{-t} \\ e^t & 0 & -e^{-t} \\ e^t & 1 & e^{-t} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = 2,$$

e

$$W_3(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & 0 \\ e^t & (t+1)e^t & 0 \\ e^t & (t+2)e^t & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (t+1)e^t \end{vmatrix} = e^{2t}.$$

Substituindo esses resultados na Eq. (12), temos

$$\begin{aligned} Y(t) &= e^t \int_{t_0}^{t} \frac{g(s)(-1-2s)}{4e^s}\,ds + te^t \int_{t_0}^{t} \frac{g(s)(2)}{4e^s}\,ds \\ &\quad + e^{-t} \int_{t_0}^{t} \frac{g(s)e^{2s}}{4e^s}\,ds \\ &= \frac{1}{4}\int_{t_0}^{t} \left\{ e^{t-s}[-1 + 2(t-s)] + e^{-(t-s)} \right\} g(s)\,ds. \end{aligned}$$

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, use o método de variação dos parâmetros para determinar a solução geral da equação diferencial dada.

1. $y''' + y' = \operatorname{tg} t, \quad 0 < t < \pi$
2. $y''' - y' = t$
3. $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4t}$
4. $y''' + y' = \sec t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$
5. $y''' - y'' + y' - y = e^{-t}\operatorname{sen} t$
6. $y^{(4)} + 2y'' + y = \operatorname{sen} t$

Nos Problemas 7 e 8, encontre a solução geral da equação diferencial dada. Deixe sua resposta em função de uma ou mais integrais.

7. $y''' - y'' + y' - y = \sec t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$
8. $y''' - y' = \csc t, \quad 0 < t < \pi$

Nos problemas de 9 a 12, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Depois faça um gráfico da solução.

9. $y''' + y' = \sec t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1,$ $y''(0) = -2$
10. $y^{(4)} + 2y'' + y = \operatorname{sen} t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0,$ $y''(0) = -1, \quad y'''(0) = 1$
11. $y''' - y'' + y' - y = \sec t, \quad y(0) = 2,$ $y'(0) = -1, \ y''(0) = 1$
12. $y''' - y' = \csc t, \quad y(\pi/2) = 2, \quad y'(\pi/2) = 1,$ $y''(\pi/2) = -1$
13. Dado que x, x^2 e $1/x$ são soluções da equação homogênea associada a
$$x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^4, \qquad x > 0,$$
determine uma solução particular.
14. Encontre uma fórmula envolvendo integrais para uma solução particular da equação diferencial
$$y''' - y'' + y' - y = g(t).$$
15. Encontre uma fórmula envolvendo integrais para uma solução particular da equação diferencial
$$y^{(4)} - y = g(t).$$
Sugestão: As funções sen t, cos t, senh t e cosh t formam um conjunto fundamental de soluções para a equação homogênea.
16. Encontre uma fórmula envolvendo integrais para uma solução particular da equação diferencial
$$y''' - 3y'' + 3y' - y = g(t).$$
Se $g(t) = t^{-2}e^t$, determine $Y(t)$.
17. Encontre uma fórmula envolvendo integrais para uma solução particular da equação diferencial
$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = g(x), \qquad x > 0.$$
Sugestão: Verifique que x, x^2 e x^3 são soluções da equação homogênea.

REFERÊNCIAS

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1961; New York: Dover, 1989).

Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations* (London: Longmans, Green, 1927; New York: Dover, 1953).

CAPÍTULO 5

Soluções em Série para Equações Lineares de Segunda Ordem

Encontrar a solução geral de uma equação diferencial linear de segunda ordem depende da determinação de um conjunto fundamental de soluções da equação homogênea. Até agora, só vimos um procedimento sistemático para a construção de soluções fundamentais no caso de coeficientes constantes. Para tratar a classe muito maior de equações com coeficientes variáveis, é necessário estender nossa procura de soluções além das funções elementares do Cálculo. A ferramenta principal de que precisamos é a representação de uma função dada em série de potências. A idéia básica é semelhante ao método dos coeficientes indeterminados: supomos que a solução de uma equação diferencial dada tem expansão em série de potências e, depois, tentamos determinar os coeficientes de modo a satisfazer a equação diferencial.

5.1 Revisão de Séries de Potências

Neste capítulo, vamos discutir a utilização de séries de potências para construir conjuntos fundamentais de soluções para equações diferenciais lineares de segunda ordem cujos coeficientes são funções da variável independente. Começamos resumindo, muito rapidamente, os resultados pertinentes sobre séries de potências que precisaremos. Os leitores familiarizados com séries de potências podem ir diretamente para a Seção 5.2. Os que precisarem de mais detalhes do que os contidos aqui devem consultar um livro de Cálculo.

1. Uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge em um ponto x se

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n(x-x_0)^n$$

existe para esse x. A série certamente converge em $x = x_0$; pode convergir em todo x, ou pode convergir para alguns valores de x e não convergir para outros.

2. A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge absolutamente em um ponto x se

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x-x_0|^n$$

converge. Pode-se mostrar que, se a série converge absolutamente, então ela converge; no entanto, a recíproca não é necessariamente verdadeira.

3. Um dos testes mais úteis para a convergência absoluta de uma série de potências é o teste da razão. Se $an \neq 0$ e se, para um valor fixo de x,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n} \right| = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x-x_0| L,$$

então a série de potências converge absolutamente em x se $|x-x_0| L < 1$ e diverge se $|x-x_0| L > 1$. Se $|x-x_0| L = 1$, o teste não é conclusivo.

Exemplo 1

Para quais valores de x a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(x-2)^n$$

converge?

Vamos usar o teste da razão para testar a convergência. Temos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+2}(n+1)(x-2)^{n+1}}{(-1)^{n+1}n(x-2)^n} \right| = |x-2| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = |x-2|.$$

De acordo com o item 3, a série converge absolutamente para $|x - 2| < 1$, ou $1 < x < 3$, e diverge para $|x - 2| > 1$. Os valores de x para os quais $|x - 2| = 1$ são $x = 1$ e $x = 3$. A série diverge para cada um desses valores de x, já que o n-ésimo termo da série não tende a zero quando $n \to \infty$.

4. Se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ converge em $x = x_1$, então converge absolutamente para $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$; se ela diverge em $x = x_1$, então diverge para $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$.
5. Existe um número não negativo ρ, chamado de **raio de convergência**, tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ converge absolutamente para $|x - x_0| < \rho$ e diverge para $|x - x_0| > \rho$. Para uma série que converge apenas em $x = x_0$, definimos ρ como zero; para uma série que converge em todo x, dizemos que ρ é infinito. Se $\rho > 0$, o intervalo $|x - x_0| < \rho$ é chamado de **intervalo de convergência**; é indicado pelo trecho hachurado na Fig. 5.1.1. A série pode convergir ou divergir quando $|x - x_0| = \rho$.



FIG. 5.1.1 O intervalo de convergência de uma série de potências.

Exemplo 2

Determine o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}.$$

Vamos aplicar o teste da razão:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \frac{n2^n}{(x+1)^n} \right| = \frac{|x+1|}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x+1|}{2}.$$

Assim, a série converge absolutamente para $|x + 1| < 2$, ou $-3 < x < 1$, e diverge para $|x + 1| > 2$. O raio de convergência da série de potências é $\rho = 2$. Finalmente, vamos verificar os extremos do intervalo de convergência. Em $x = 1$, a série é a série harmônica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

que diverge. Em $x = -3$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3+1)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

que converge, mas não absolutamente. Dissemos que a série converge condicionalmente em $x = -3$. Para resumir, a série de potências dada converge para $-3 \le x < 1$ e diverge caso contrário. Ela converge absolutamente em $-3 < x < 1$ e tem raio de convergência 2.

Suponha que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ convergem para $f(x)$ e $g(x)$, respectivamente, para $|x - x_0| < \rho$, $\rho > 0$.

6. As séries podem ser somadas ou subtraídas termo a termo e

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x - x_0)^n;$$

a série resultante converge para $|x - x_0| < \rho$, pelo menos.

7. As séries podem ser multiplicadas formalmente e

$$f(x)g(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n,$$

onde $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0$. A série resultante converge para $|x - x_0| < \rho$, pelo menos.

Além disso, se $g(x_0) \neq 0$, as séries podem ser formalmente divididas e

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x - x_0)^n.$$

Na maioria dos casos, os coeficientes d_n podem ser obtidos mais facilmente igualando-se os coeficientes correspondentes na equação equivalente

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \left[\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x - x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} d_k b_{n-k}\right)(x - x_0)^n.$$

No caso da divisão, o raio de convergência da série de potências resultante pode ser menor do que ρ.

8. A função f é contínua e tem derivadas de todas as ordens para $|x - x_0| < \rho$. Além disso, $f', f'', \ldots$ podem ser calculadas derivando-se a série termo a termo, isto é,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2},$$

e assim por diante, e cada uma dessas séries converge absolutamente no intervalo $|x - x_0| < \rho$.

9. O valor de a_n é dado por

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

A série é chamada de série de Taylor[1] para a função f em torno de $x = x_0$.

10. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ para todo x em algum intervalo aberto centrado em x_0, então $a_n = b_n$ para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Em particular, se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = 0$ para todos esses x, então $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = \ldots = 0$.

Uma função f que tem uma expansão em série de Taylor em torno de $x = x_0$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

com raio de convergência $\rho > 0$ é dita **analítica** em $x = x_0$. Todas as funções familiares do cálculo são analíticas, exceto, talvez, em alguns pontos facilmente reconhecíveis. Por exemplo, sen x e e^x são analíticos em toda a parte, $1/x$ é analítica exceto em $x = 0$ e tg x é analítica exceto nos múltiplos ímpares de $\pi/2$. De acordo com as afirmações 6 e 7, se f e g são analíticas em x_0, então $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g [desde que $g(x_0) \neq 0$] também são analíticas em $x = x_0$. Em muitos aspectos o contexto natural para o uso de séries de potências é o plano complexo. Os métodos e resultados deste capítulo podem ser diretamente estendidos, quase sempre, para equações diferenciais nas quais as variáveis independente e dependente assumem valores complexos.

Deslocamento do Índice de Somatório. O índice de somatório em uma série infinita é uma variável muda, da mesma forma que a variável de integração em uma integral definida é uma variável muda. Logo, não importa a letra usada para o índice de um somatório. Por exemplo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j x^j}{j!}.$$

Da mesma forma que podemos mudar a variável de integração em uma integral definida, é conveniente fazer mudanças no índice de somatório ao se calcular soluções em série para equações diferenciais. Vamos ilustrar através de diversos exemplos como mudar o índice de somatório.

Exemplo 3

Escreva $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ como uma série cujo primeiro termo corresponde a $n = 0$, em vez de $n = 2$.

Seja $m = n - 2$; então $n = m + 2$ e $n = 2$ corresponde a $m = 0$. Logo,

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} x^{m+2}. \tag{1}$$

Escrevendo alguns termos iniciais de cada uma dessas séries, pode-se verificar que elas contêm precisamente os mesmos termos. Finalmente, na série à direita do sinal de igualdade na Eq. (1), podemos substituir a variável muda m por n, obtendo

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2}. \tag{2}$$

Com efeito, deslocamos o índice de 2 unidades para cima e compensamos isto começando a contar a partir de 2 unidades abaixo do índice original.

Exemplo 4

Escreva a série

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n + 2)(n + 1)a_n(x - x_0)^{n-2} \tag{3}$$

como uma série cujo termo geral envolve $(x - x_0)^n$, em vez de $(x - x_0)^{n-2}$.

Novamente, deslocamos o índice do somatório por 2, de modo que n é substituído por $n + 2$ e começamos a contar de 2 unidades abaixo. Obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + 4)(n + 3)a_{n+2}(x - x_0)^n. \tag{4}$$

Você pode verificar facilmente que os termos nas séries (3) e (4) são exatamente os mesmos.

Exemplo 5

Escreva a expressão

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (r + n)a_n x^{r+n-1} \tag{5}$$

como uma série cujo termo geral envolve x^{r+n}

Coloque, primeiro, x^2 dentro do somatório, obtendo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r + n)a_n x^{r+n+1}. \tag{6}$$

[1] Brook Taylor (1685-1731) foi o matemático inglês mais importante da geração seguinte à de Newton. Em 1715, publicou uma versão geral do teorema de expansão que leva o seu nome, um resultado fundamental em todos os ramos da análise. Foi também um dos fundadores do cálculo de diferenças finitas e o primeiro a reconhecer a existência de soluções singulares de equações diferenciais.

A seguir, mude o índice do somatório por 1 e comece a contar 1 acima. Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n x^{r+n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(r+n-1)a_{n-1}x^{r+n}. \qquad (7)$$

Novamente, você pode verificar facilmente que as duas séries na Eq. (7) são idênticas e que ambas são exatamente iguais à expressão em (5).

Exemplo 6

Suponha que

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (8)$$

para todo x e determine o que isso implica sobre os coeficientes a_n.

Queremos usar a afirmação 10 para igualar os coeficientes correspondentes nas duas séries. Para fazer isso, precisamos, primeiro, escrever a Eq. (8) de modo que as duas séries tenham a mesma potência de x em seus termos gerais. Por exemplo, na série à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (8), podemos substituir n por $n + 1$ e começar a contar de 1 a menos. Assim, a Eq. (8) fica

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \qquad (9)$$

De acordo com a afirmação 10, podemos concluir que

$$(n+1)a_{n+1} = a_n, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (10)$$

Logo, escolhendo valores sucessivos de n na Eq. (10), temos

$$a_1 = a_0, \qquad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}, \qquad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3!},$$

e assim por diante. Em geral,

$$a_n = \frac{a_0}{n!}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (11)$$

Portanto, a relação (8) determina todos os coeficientes a seguir em função de a_0. Finalmente, usando os coeficientes dados pela Eq. (11), obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = a_0 e^x,$$

onde seguimos a convenção usual de que $0! = 1$.

Problemas

Nos problemas de 1 a 8, determine o raio de convergência da série de potências dada.

1. $\sum_{n=0}^{\infty}(x-3)^n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n$
3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$
4. $\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n^2}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2(x+2)^n}{3^n}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$

Nos problemas de 9 a 16, determine a série de Taylor da função dada em torno do ponto x_0. Determine, também, o raio de convergência da série.

9. $\operatorname{sen} x, \quad x_0 = 0$
10. $e^x, \quad x_0 = 0$
11. $x, \quad x_0 = 1$
12. $x^2, \quad x_0 = -1$
13. $\ln x, \quad x_0 = 1$
14. $\frac{1}{1+x}, \quad x_0 = 0$
15. $\frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 0$
16. $\frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 2$

17. Dado que $y = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ calcule y' e y'' e escreva os quatro primeiros termos de cada uma das séries, assim como o coeficiente de x^n no termo geral.
18. Dado que $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ calcule y' e y'' e escreva os quatro primeiros termos de cada uma das séries, assim como o coeficiente de x^n no termo geral. Mostre que, se $y'' = y$, então os coeficientes a_0 e a_1 são arbitrários; determine a_2 e a_3 em função de a_0 e a_1. Mostre que $a_{n+2} = a_n/(n+2)(n+1)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Nos Problemas 19 e 20, verifique a equação dada.

19. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-1)^n$
20. $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = a_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1} + a_{k-1})x^k$

Nos problemas de 21 a 27, escreva a expressão dada como uma série cujo termo geral envolve x^n.

21. $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$
22. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$
23. $x\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

24. $(1 - x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$

25. $\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2} + x\sum_{k=1}^{\infty} ka_k x^{k-1}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

27. $x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

28. Determine a_n de modo que a equação

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

seja satisfeita. Tente identificar a função representada pela série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

5.2 Soluções em Série na Vizinhança de um Ponto Ordinário, Parte I

No Cap. 3, descrevemos métodos para resolver equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes. Vamos considerar, agora, métodos para resolver equações lineares de segunda ordem quando os coeficientes são funções da variável independente. Neste capítulo, denotaremos a variável independente por x. Basta considerar a equação homogênea

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0, \quad (1)$$

já que o procedimento para a equação não-homogênea associada é semelhante.

Muitos problemas em física matemática levam a equações da forma (1) com coeficientes polinomiais; exemplos incluem a equação de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

onde ν é constante, e a equação de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0,$$

onde α é constante. Por essa razão, assim como para simplificar os cálculos algébricos, vamos considerar principalmente o caso em que as funções P, Q e R são polinômios. No entanto, como veremos, o método de solução também é aplicável quando P, Q e R são funções analíticas genéricas.

Por enquanto, então, vamos supor que P, Q e R são polinômios e que não têm fatores comuns. Suponha, também, que queremos resolver a Eq. (1) em uma vizinhança de um ponto x_0. A solução da Eq. (1) em um intervalo contendo x_0 está intimamente associada ao comportamento de P nesse intervalo.

Um ponto x_0 no qual $P(x_0) \neq 0$ é chamado de **ponto ordinário**. Como P é contínuo, segue que existe um intervalo em torno de x_0 no qual $P(x)$ nunca se anula. Nesse intervalo, podemos dividir a Eq. (1) por $P(x)$ para obter

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (2)$$

onde $p(x) = Q(x)/P(x)$ e $q(x) = R(x)/P(x)$ são funções contínuas. Logo, pelo Teorema 3.2.1 de existência e unicidade, existe uma única solução da Eq. (1) nesse intervalo que também satisfaz as condições iniciais $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ para valores arbitrários de y_0 e y_0'. Nesta e na próxima seção, vamos discutir soluções da Eq. (1) na vizinhança de um ponto ordinário.

Por outro lado, se $P(x_0) = 0$, então x_0 é chamado de **ponto singular** da Eq. (1). Nesse caso, pelo menos um entre $Q(x_0)$ e $R(x_0)$ é diferente de zero. Em conseqüência, pelo menos um dos coeficientes p e q na Eq. (2) torna-se ilimitado quando $x \to x_0$ e, portanto, o Teorema 3.2.1 não se aplica nesse caso. As seções de 5.4 a 5.8 tratam do problema de encontrar soluções da Eq. (1) na vizinhança de um ponto singular.

Vamos começar o problema de resolver a Eq. (1) em uma vizinhança de um ponto ordinário x_0. Procuramos soluções da forma

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad (3)$$

e supomos que a série converge no intervalo $|x - x_0| < \rho$ para algum $\rho > 0$. Enquanto, à primeira vista, não parece atraente procurar uma solução em forma de série de potências, essa é, de fato, uma forma conveniente e útil para uma solução. Dentro de seu intervalo de convergência, séries de potências se comportam de maneira muito semelhante a polinômios e são fáceis de manipular tanto analiticamente, quanto numericamente. De fato, mesmo se obtivermos uma solução em termos de funções elementares, tais como funções exponenciais ou trigonométricas, precisaremos, provavelmente, de uma série de potências ou expressão equivalente se quisermos avaliá-la numericamente ou desenhar seu gráfico.

O modo mais prático de determinar os coeficientes a_n é substituir a série (3) e suas derivadas por y, y' e y'' na Eq. (1). Os exemplos a seguir ilustram esse processo. As operações envolvidas nos procedimentos, tais como diferenciação, são justificáveis desde que permaneçamos no intervalo de convergência. As equações diferenciais nesses exemplos também têm uma importância considerável por si mesmas.

Exemplo 1

Encontre uma solução em série para a equação

$$y'' + y = 0, \qquad -\infty < x < \infty. \quad (4)$$

Como sabemos, duas soluções linearmente independentes dessa equação são sen x e cos x, de modo que os métodos de expansão em série não são necessários para resolver essa equação. No entanto, esse exemplo ilustra o uso de séries de potências em um caso relativamente simples. Para a Eq. (4), $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$ e $R(x) = 1$, logo todo ponto é um ponto ordinário.

Vamos procurar uma solução em forma de série de potências em torno de $x_0 = 0$,

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \quad (5)$$

e supor que a série converge em algum intervalo $|x| < \rho$.

Diferenciando a Eq. (5) termo a termo, obtemos

$$y' = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}, \qquad (6)$$
$$y'' = 2a_2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}. \qquad (7)$$

Substituindo y e y'' pelas séries (5) e (7) na Eq. (4) temos que

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0.$$

Para combinar as duas séries, precisamos reescrever pelo menos uma delas de modo que ambas tenham o mesmo termo geral. Assim, mudamos o índice do somatório na primeira série substituindo n por $n + 2$ e começando a soma em 0 em vez de 2. Obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0$$

ou

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n]x^n = 0.$$

Para essa equação ser satisfeita para todo x é preciso que o coeficiente de cada potência de x seja nulo; portanto, podemos concluir que

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots. \qquad (8)$$

Equações do tipo (8) são conhecidas como **relações de recorrência**. Os coeficientes sucessivos podem ser calculados um a um escrevendo-se a relação de recorrência primeiro para $n = 0$, depois para $n = 1$, e assim por diante. Neste exemplo, a Eq. (8) relaciona cada coeficiente com o que está duas unidades antes dele. Assim, os coeficientes com índices pares ($a_0, a_2, a_4, \ldots$) e os coeficientes com índices ímpares ($a_1, a_3, a_5, \ldots$) são determinados separadamente. Para os pares, temos

$$a_2 = -\frac{a_0}{2 \cdot 1} = -\frac{a_0}{2!}, \qquad a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 3} = +\frac{a_0}{4!},$$
$$a_6 = -\frac{a_4}{6 \cdot 5} = -\frac{a_0}{6!}, \ldots.$$

Esses resultados sugerem que, em geral, se $n = 2k$, então

$$a_n = a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}a_0, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (9)$$

Podemos provar a Eq. (9) por indução matemática. Observe, primeiro, que ela é válida para $k = 1$. A seguir, suponha que é válida para um valor arbitrário de k e considere o caso $k + 1$. Temos

$$a_{2k+2} = -\frac{a_{2k}}{(2k+2)(2k+1)} = -\frac{(-1)^k}{(2k+2)(2k+1)(2k)!}a_0$$
$$= \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!}a_0.$$

Logo, a Eq. (9) também é verdadeira para $k + 1$ e, em conseqüência, é verdadeira para todos os inteiros positivos k.

Analogamente, para os coeficientes com índices ímpares,

$$a_3 = -\frac{a_1}{2 \cdot 3} = -\frac{a_1}{3!}, \qquad a_5 = -\frac{a_3}{5 \cdot 4} = +\frac{a_1}{5!},$$
$$a_7 = -\frac{a_5}{7 \cdot 6} = -\frac{a_1}{7!}, \ldots,$$

e, em geral, se $n = 2k + 1$, então[2]

$$a_n = a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a_1, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (10)$$

Substituindo esses coeficientes na Eq. (5), temos

$$y = a_0 + a_1x - \frac{a_0}{2!}x^2 - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5!}x^5$$
$$+ \cdots + \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$
$$= a_0\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots\right]$$
$$+ a_1\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots\right]$$
$$= a_0\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + a_1\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}. \qquad (11)$$

Agora que obtivemos formalmente as duas soluções em série da Eq. (4), podemos testá-las quanto à convergência. Usando o teste da razão, é fácil mostrar que cada uma das séries na Eq. (11) converge para todo x e isso justifica, de forma retroativa, todos os passos usados para se obter as soluções. De fato, reconhecemos que a primeira série na Eq. (11) é exatamente a série de Taylor para cos x em torno de $x = 0$ e que a segunda é a série de Taylor para sen x em torno de $x = 0$. Assim, como esperado, obtivemos a solução $y = a_0 \cos x + a_1 \operatorname{sen} x$.

Note que não foram impostas condições sobre a_0 e a_1; portanto, elas são constantes arbitrárias. Das Eqs. (5) e (6) vemos que y e y' calculadas para $x = 0$ tomam os valores a_0 e a_1, respectivamente. Como as condições iniciais $y(0)$ e $y'(0)$ podem ser escolhidas arbitrariamente, segue que a_0 e a_1 devem ser arbitrárias até que sejam dadas condições iniciais específicas.

As Figs. 5.2.1 e 5.2.2 mostram como as somas parciais das séries na Eq. (11) se aproximam de cos x e de sen x. Na medida em que cresce o número de termos, o intervalo sobre o qual a aproximação é satisfatória torna-se maior e, para cada x nesse intervalo, a precisão da aproximação melhora. No entanto, você sempre deve se lembrar de que uma série de potências truncada fornece apenas uma aproximação local da solução em uma vizinhança do ponto inicial $x = 0$; ela nunca pode representar adequadamente a solução para valores grandes de $|x|$.

[2]O resultado dado na Eq. (10) e outras fórmulas análogas neste capítulo podem ser provados por um argumento de indução semelhante ao que acabamos de dar para a Eq. (9). Supomos que esses resultados são plausíveis e omitimos o argumento de indução daqui para a frente.

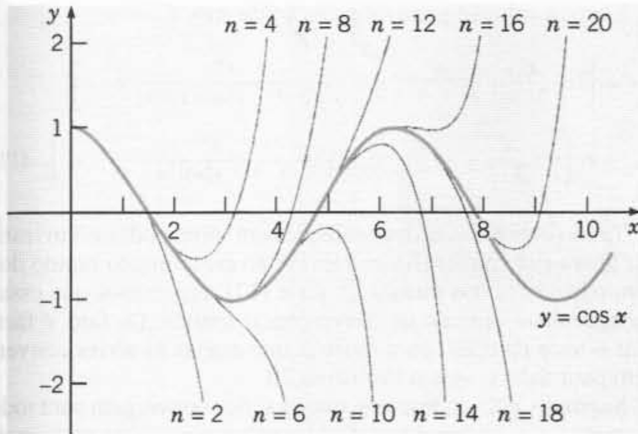


FIG. 5.2.1 Aproximações polinomiais de cos x. O valor de n é o grau do polinômio usado.

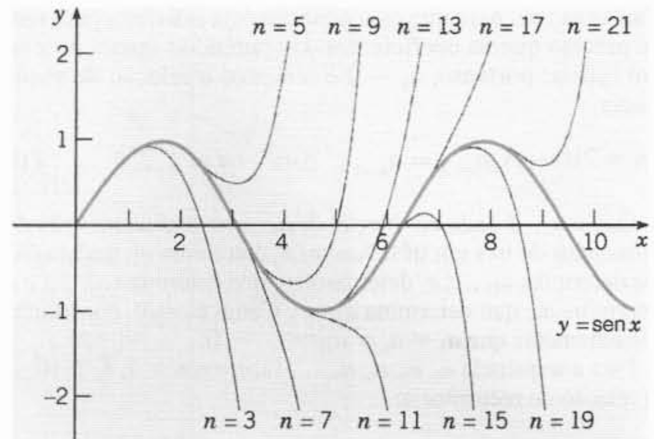


FIG. 5.2.2 Aproximações polinomiais de sen x. O valor de n é o grau do polinômio usado.

No Exemplo 1, sabíamos desde o início que sen x e cos x formavam um conjunto fundamental de soluções da Eq. (4). No entanto, se não soubéssemos disso e tivéssemos tentado simplesmente resolver a Eq. (4) usando expansão em série, ainda assim teríamos obtido a solução (11). Em reconhecimento do fato de que a Eq. (4) ocorre com freqüência em aplicações, poderíamos decidir dar nomes especiais às duas soluções da Eq. (11); talvez

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \qquad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Poderíamos, então, perguntar quais as propriedades dessas funções. Por exemplo, segue imediatamente da expansão em série que $C(0) = 1$, $S(0) = 0$, $C(-x) = C(x)$ e que $S(-x) = -S(x)$. Também é fácil mostrar que

$$S'(x) = C(x), \qquad C'(x) = -S(x).$$

Além disso, calculando a série infinita,[3] podemos mostrar que as funções $C(x)$ e $S(x)$ têm todas as propriedades analíticas e algébricas das funções co-seno e seno, respectivamente.

Embora, provavelmente, você tenha visto as funções seno e co-seno pela primeira vez de um modo mais elementar, em termos de triângulos retângulos, é interessante que essas funções possam ser definidas como soluções de certas equações diferenciais lineares de segunda ordem simples. Para ser preciso, a função sen x pode ser definida como a única solução do problema de valor inicial $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; analogamente, cos x pode ser definido como a única solução do problema de valor inicial $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Muitas outras funções importantes em física matemática também são definidas como soluções de determinados problemas de valor inicial. Para a maioria dessas funções não existe maneira mais simples ou mais elementar de estudá-las.

Exemplo 2

Encontre uma solução em série de potências de x para a equação de Airy[4]

$$y'' - xy = 0, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{12}$$

Para essa equação, $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$ e $R(x) = -x$, logo, todo ponto é um ponto ordinário. Vamos supor que

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{13}$$

e que a série converge em algum intervalo $|x| < \rho$. A série para y'' é dada pela Eq. (7); como explicado no exemplo precedente, podemos reescrevê-la como

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n. \tag{14}$$

Substituindo y e y'' na Eq. (12) pelas séries (13) e (14), obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}. \tag{15}$$

Vamos mudar o índice da última série à direita na equação anterior substituindo n por $n - 1$ e começando a somar a partir de 1 em vez de zero. Temos, então,

$$2 \cdot 1a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n.$$

[3] Essa análise é feita na Seção 24 do livro de K. Knopp, *Theory and Applications of Infinite Series* (Nova York: Hafner, 1951).

[4] Sir George Biddell Airy (1801-1892), astrônomo e matemático inglês, foi diretor do Observatório de Greenwich de 1835 a 1881. Uma das razões pelas quais a equação de Airy é interessante é que as soluções são oscilatórias para x negativo, semelhante às funções trigonométricas, e monótonas para x positivo, semelhante às funções hiperbólicas. Você pode explicar por que é razoável esperar esse tipo de comportamento?

Mais uma vez, para que essa equação seja satisfeita para todo x é preciso que os coeficientes das potências iguais de x sejam iguais; portanto, $a_2 = 0$ e obtemos a relação de recorrência

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_{n-1} \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \quad (16)$$

Como a_{n+2} é dado em função de a_{n-1}, os coeficientes são determinados de três em três. Assim, a_0 determina a_3, que por sua vez determina $a_6, \ldots$; a_1 determina a_4, que determina $a_7, \ldots$; e a_2 determina a_5, que determina $a_8, \ldots$. Como $a_2 = 0$, concluímos imediatamente que $a_5 = a_8 = a_{11} = \ldots = 0$.

Para a seqüência $a_0, a_3, a_6, a_9, \ldots$, fazemos $n = 1, 4, 7, 10, \ldots$ na relação de recorrência:

$$a_3 = \frac{a_0}{2 \cdot 3}, \qquad a_6 = \frac{a_3}{5 \cdot 6} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6},$$
$$a_9 = \frac{a_6}{8 \cdot 9} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}, \ldots.$$

Esses resultados sugerem a fórmula geral

$$a_{3n} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3n-1)(3n)}, \quad n \geqslant 4.$$

Para a seqüência $a_1, a_4, a_7, a_{10}, \ldots$, fazemos $n = 2, 5, 8, 11, \ldots$ na relação de recorrência:

$$a_4 = \frac{a_1}{3 \cdot 4}, \quad a_7 = \frac{a_4}{6 \cdot 7} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7},$$
$$a_{10} = \frac{a_7}{9 \cdot 10} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}, \ldots.$$

Em geral, temos

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (3n)(3n+1)}, \quad n \geqslant 4.$$

Logo, a solução geral da equação de Airy é

$$y = a_0\left[1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots + \frac{x^{3n}}{2 \cdot 3 \cdots (3n-1)(3n)} + \cdots\right]$$
$$+ a_1\left[x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{x^{3n+1}}{3 \cdot 4 \cdots (3n)(3n+1)} + \cdots\right]. \quad (17)$$

Tendo obtido essas duas soluções em série, podemos investigar agora sua convergência. Devido ao crescimento rápido dos denominadores dos termos na série (17), esperamos que essas séries tenham um raio de convergência grande. De fato, é fácil usar o teste da razão para mostrar que ambas as séries convergem para todo x; veja o Problema 20.

Supondo, por um instante, que as séries convergem para todo x, sejam y_1 e y_2 as funções definidas pelas expressões no primeiro e no segundo par de colchetes, respectivamente, na Eq. (17). Então, escolhendo primeiro $a_0 = 1, a_1 = 0$ e depois $a_0 = 0, a_1 = 1$, segue que y_1 e y_2 são soluções da Eq. (12). Note que y_1 satisfaz as condições iniciais $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$ e que y_2 satisfaz as condições iniciais $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$. Portanto, $W(y_1, y_2)(0) = 1 \neq 0$ e, conseqüentemente, y_1 e y_2 são linearmente independentes. Logo, a solução geral da equação de Airy é

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

As Figs. 5.2.3 e 5.2.4 mostram os gráficos das soluções y_1 e y_2, respectivamente, da equação de Airy, assim como os gráficos de diversas somas parciais das duas séries na Eq. (17). Novamente, as somas parciais fornecem aproximações locais para as soluções em uma vizinhança da origem. Embora a qualidade da aproximação melhore na medida em que aumenta o número de termos, nenhum polinômio pode representar de modo adequado y_1 e y_2 para valores grandes de $|x|$. Um modo prático de estimar o intervalo no qual uma soma parcial dada é razoavelmente precisa é comparar os gráficos daquela soma parcial e da próxima, obtida incluindo-se mais um termo. Assim que se puder notar a separação dos gráficos, pode-se ter certeza de que a soma parcial original não é precisa. Por exemplo, na Fig. 5.2.3, os gráficos para $n = 24$ e $n = 27$ começam a se separar em torno de $x = -9/2$. Assim, além desse ponto, a soma parcial de grau 24 não serve como uma aproximação da solução.

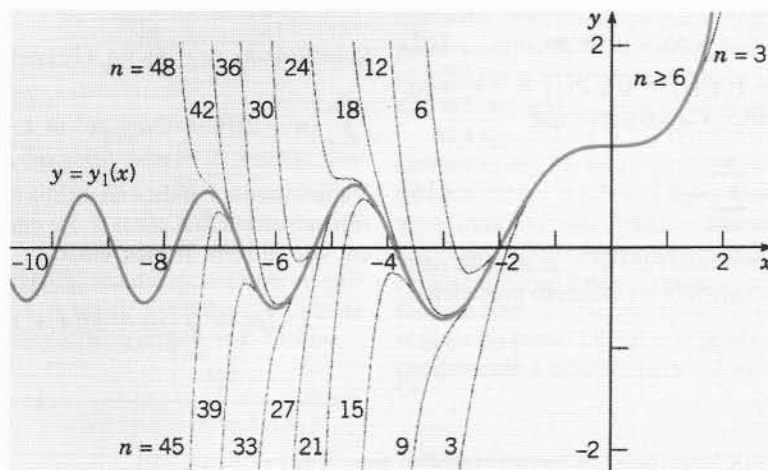


FIG. 5.2.3 Aproximações polinomiais da solução $y_1(x)$ da equação de Airy. O valor de n é o grau do polinômio usado.

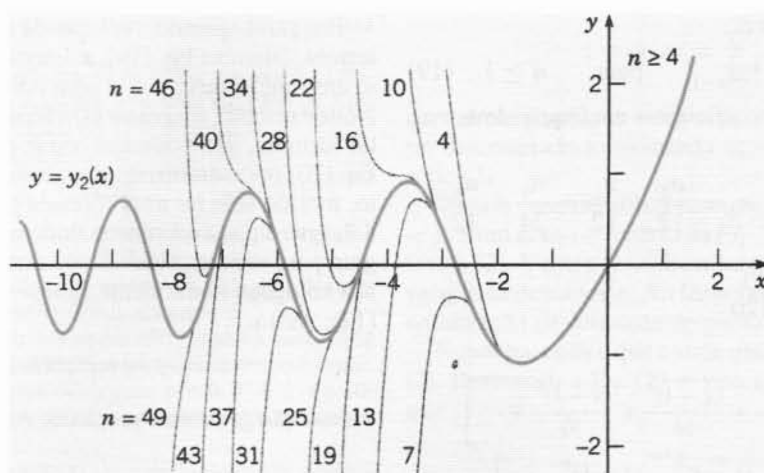


FIG. 5.2.4 Aproximações polinomiais da solução $y_2(x)$ da equação de Airy. O valor de n é o grau do polinômio usado.

Observe que ambas as funções, y_1 e y_2, são monótonas para $x > 0$ e oscilatórias para $x < 0$. Pode-se ver, também, das figuras, que as oscilações não são uniformes, mas, em vez disso, decaem em amplitude e aumentam em freqüência quando aumenta a distância da origem. Em contraste com o Exemplo 1, as soluções y_1 e y_2 da equação de Airy não são funções elementares que você já encontrou em Cálculo. No entanto, pela sua importância em algumas aplicações físicas, essas funções têm sido estudadas extensamente e suas propriedades são bem conhecidas entre matemáticos aplicados e cientistas.

Exemplo 3

Encontre uma solução da equação de Airy em potências de $x - 1$.

O ponto $x = 1$ é um ponto ordinário da Eq. (12) e, portanto, procuramos por uma solução da forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n,$$

onde supomos que a série converge em algum intervalo $|x - 1| < \rho$. Então,

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-1)^n,$$

e

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n.$$

Substituindo y e y'' na Eq. (12), obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n. \quad (18)$$

Para igualar os coeficientes das potências iguais de $(x - 1)$, precisamos escrever x, o coeficiente de y na Eq. (12), em potências de $(x - 1)$; escrevemos, então, $x = 1 + (x - 1)$. Note que essa é precisamente a série de Taylor de x em torno de $x = 1$. Então, a Eq. (18) fica

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n$$

$$= [1 + (x-1)] \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+1}.$$

Mudando o índice da última série à direita, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (x-1)^n.$$

Igualando os coeficientes das potências iguais de $x - 1$, encontramos

$$2a_2 = a_0,$$
$$(3 \cdot 2)a_3 = a_1 + a_0,$$
$$(4 \cdot 3)a_4 = a_2 + a_1,$$
$$(5 \cdot 4)a_5 = a_3 + a_2,$$
$$\vdots$$

A relação de recorrência geral é

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_n + a_{n-1} \quad \text{para} \quad n \geq 1. \quad (19)$$

Resolvendo para os primeiros coeficientes em função de a_0 e a_1, vemos que

$$a_2 = \frac{a_0}{2}, \; a_3 = \frac{a_1}{6} + \frac{a_0}{6}, \; a_4 = \frac{a_2}{12} + \frac{a_1}{12} = \frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{12},$$

$$a_5 = \frac{a_3}{20} + \frac{a_2}{20} = \frac{a_0}{30} + \frac{a_1}{120}.$$

Portanto,

$$y = a_0\left[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{(x-1)^5}{30} + \cdots\right]$$
$$+ a_1\left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120} + \cdots\right]. \quad (20)$$

Em geral, quando a relação de recorrência tem mais de dois termos, como na Eq. (19), a determinação de uma fórmula para a_n em função de a_0 e a_1 é bem complicada, se não impossível. Neste exemplo, encontrar essa fórmula não parece ser fácil. Sem tal fórmula, não podemos testar a convergência das séries na Eq. (20) por métodos diretos, como o teste da razão. No entanto, mesmo sem ter uma fórmula para a_n, vamos ver, na Seção 5.3, que é possível mostrar que as séries na Eq. (20) convergem para todo x. Além disso, elas definem funções y_3 e y_4 que são soluções linearmente independentes da equação de Airy (12). Assim,

$$y = a_0 y_3(x) + a_1 y_4(x)$$

é a solução geral da equação de Airy para $-\infty < x < \infty$.

Vale a pena enfatizar que, como vimos no Exemplo 3, se procurarmos uma solução da Eq. (1) da forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, teremos, também, que expressar os coeficientes $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ em potências de $(x - x_0)$. De outro modo, podemos fazer uma mudança de variável $x - x_0 = t$, obtendo uma nova equação diferencial para y em função de t e depois procurar soluções dessa nova equação da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Ao terminar os cálculos, substituímos t por $x - x_0$ (veja o Problema 19).

Nos Exemplos 2 e 3, encontramos dois conjuntos de soluções da equação de Airy. As funções y_1 e y_2 definidas pelas séries na Eq. (17) são soluções linearmente independentes da Eq. (12) para todo x, o que também é verdade para as funções y_3 e y_4 definidas pelas séries na Eq. (20). De acordo com a teoria geral de equações lineares de segunda ordem, cada uma entre as duas primeiras funções pode ser expressa como combinação linear das duas últimas funções e vice-versa — um resultado que, certamente, não é óbvio examinando-se apenas as séries.

Finalmente, enfatizamos que não é tão importante se não formos capazes de determinar o coeficiente geral a_n em função de a_0 e a_1, como no Exemplo 3. O essencial é podermos determinar *quantos coeficientes quisermos*. Assim, podemos encontrar quantos termos quisermos nas duas soluções em série, mesmo sem conhecer o termo geral. Embora a tarefa de calcular diversos coeficientes em uma solução em série de potências não seja difícil, pode ser tediosa. Um pacote de manipulação simbólica pode ajudar aqui; alguns são capazes de encontrar um número especificado de termos em uma solução em série de potências em resposta a um único comando. Com um pacote gráfico apropriado, pode-se, também, produzir gráficos como os ilustrados nas figuras desta seção.

Problemas

Nos problemas de 1 a 14, resolva a equação diferencial dada através de uma série de potências em torno do ponto x_0 dado. Encontre a relação de recorrência; encontre também os quatro primeiros termos em cada uma das duas soluções linearmente independentes (a menos que a série termine antes). Se possível, encontre o termo geral em cada solução.

1. $y'' - y = 0, \quad x_0 = 0$
2. $y'' - xy' - y = 0, \quad x_0 = 0$
3. $y'' - xy' - y = 0, \quad x_0 = 1$
4. $y'' + k^2x^2y = 0, \quad x_0 = 0$, k constante
5. $(1-x)y'' + y = 0, \quad x_0 = 0$
6. $(2+x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad x_0 = 0$
7. $y'' + xy' + 2y = 0, \quad x_0 = 0$
8. $xy'' + y' + xy = 0, \quad x_0 = 1$
9. $(1+x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad x_0 = 0$
10. $(4-x^2)y'' + 2y = 0, \quad x_0 = 0$
11. $(3-x^2)y'' - 3xy' - y = 0, \quad x_0 = 0$
12. $(1-x)y'' + xy' - y = 0, \quad x_0 = 0$
13. $2y'' + xy' + 3y = 0, \quad x_0 = 0$
14. $2y'' + (x+1)y' + 3y = 0, \quad x_0 = 2$

Nos problemas de 15 a 18:

(a) Encontre os cinco primeiros termos não-nulos na solução do problema de valor inicial dado.

(b) Faça gráficos das aproximações da solução com quatro e cinco termos no mesmo conjunto de eixos.

(c) Estime, a partir dos gráficos do item (b), o intervalo no qual a aproximação com quatro termos é razoavelmente precisa.

15. $y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$; veja o Problema 2
16. $(2+x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 3$; veja o Problema 6
17. $y'' + xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -1$; veja o Problema 7
18. $(1-x)y'' + xy' - y = 0, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 2$; veja o Problema 12

19. Fazendo a mudança de variável $x - 1 = t$ e supondo que y tem uma série de Taylor em potências em t, encontre duas soluções em séries linearmente independentes de

$$y'' + (x-1)^2y' + (x^2-1)y = 0$$

em potências de $x - 1$. Mostre que você obtém o mesmo resultado diretamente, supondo que y é dado por uma série de Taylor

em potências de $x - 1$ e expressando o coeficiente $x^2 - 1$ em potências de $x - 1$.

20. Mostre diretamente, usando o teste da razão, que as duas soluções em série em torno do ponto $x = 0$ da equação de Airy convergem para todo x; veja a Eq. (17) do texto.

21. **A Equação de Hermite.** A equação

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \qquad -\infty < x < \infty,$$

onde λ é constante, é conhecida como a equação de Hermite.[5] Essa é uma equação importante na física matemática.
(a) Encontre os quatro primeiros termos em cada uma de duas soluções linearmente independentes em torno de $x = 0$.
(b) Note que, se λ for um inteiro par não-negativo, então uma ou outra das soluções em série termina e torna-se um polinômio. Encontre as soluções polinomiais para $\lambda = 0, 2, 4, 6, 8$ e 10. Note que cada polinômio é determinado a menos de uma constante multiplicativa.
(c) O polinômio de Hermite $H_n(x)$ é definido como sendo a solução polinomial da equação de Hermite com $\lambda = 2n$ para a qual o coeficiente de x_n é 2_n. Encontre $H_0(x), \ldots, H_5(x)$.

22. Considere o problema de valor inicial $y' = \sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 0$.
(a) Mostre que $y = \text{sen}\, x$ é a solução desse problema de valor inicial.
(b) Procure uma solução do problema de valor inicial em forma de uma série de potências em torno de $x = 0$. Encontre os coeficientes dessa série até o termo contendo x^3.

Nos problemas de 23 a 28, faça o gráfico de diversas somas parciais da solução em série do problema de valor inicial dado em torno de $x = 0$, obtendo, assim, gráficos análogos aos ilustrados nas Figs. de 5.2.1 até 5.2.4.

23. $y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$
veja o Problema 2

24. $(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$
veja o Problema 6

25. $y'' + xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$
veja o Problema 7

26. $(4 - x^2)y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$
veja o Problema 10

27. $y'' + x^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$
veja o Problema 4

28. $(1 - x)y'' + xy' - 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

5.3 Soluções em Série na Vizinhança de um Ponto Ordinário, Parte II

Consideramos, na seção precedente, o problema de encontrar soluções de

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \tag{1}$$

onde P, Q e R são polinômios, na vizinhança de um ponto ordinário x_0. Supondo que a Eq. (1) tem, de fato, uma solução $y = \phi(x)$ e que ϕ tem uma série de Taylor

$$y = \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{2}$$

que converge para $|x - x_0| < \rho$, onde $\rho > 0$, vimos que a_n pode ser determinado substituindo-se, diretamente, y na Eq. (1) pela série (2).

Vamos considerar, agora, como justificar a afirmação de que, se x_0 é um ponto ordinário da Eq. (1), então existem soluções da forma (2). Vamos considerar também a questão do raio de convergência dessa série. Ao fazer isso, seremos levados a uma generalização da definição de ponto ordinário.

Suponha, então, que exista uma solução da Eq. (1) da forma (2). Derivando a Eq. (2) m vezes e fazendo x igual a x_0, segue que

$$m!a_m = \phi^{(m)}(x_0).$$

Logo, para calcular a_n na série (2), precisamos mostrar que podemos determinar $\phi^{(n)}(x_0)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ a partir da equação diferencial (1).

Suponha que $y = \phi(x)$ é uma solução da Eq. (1) satisfazendo as condições iniciais $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$. Então, $a_0 = y_0$ e $a_1 = y_0'$. Se estivermos interessados apenas em encontrar uma solução da Eq. (1) sem especificar condições iniciais, então a_0 e a_1 permanecem arbitrários. Para determinar $\phi^{(n)}(x_0)$ e os coeficientes correspondentes a_n para $n = 2, 3, \ldots$, voltamos para a Eq. (1). Como ϕ é uma solução da Eq. (1), temos

$$P(x)\phi''(x) + Q(x)\phi'(x) + R(x)\phi(x) = 0.$$

No intervalo em torno de x_0 onde P nunca se anula, podemos escrever essa equação na forma

$$\phi''(x) = -p(x)\phi'(x) - q(x)\phi(x), \tag{3}$$

onde $p(x) = Q(x)/P(x)$ e $q(x) = R(x)/P(x)$. Fazendo x igual a x_0 na Eq. (3), temos

$$\phi''(x_0) = -p(x_0)\phi'(x_0) - q(x_0)\phi(x_0).$$

Portanto, a_2 é dado por

$$2!a_2 = \phi''(x_0) = -p(x_0)a_1 - q(x_0)a_0. \tag{4}$$

Para determinar a_3, derivamos a Eq. (3) e depois fazemos x igual a x_0, obtendo

$$\begin{aligned} 3!a_3 = \phi'''(x_0) &= -[p\phi'' + (p' + q)\phi' + q'\phi]\Big|_{x=x_0} \\ &= -2!p(x_0)a_2 - [p'(x_0) + q(x_0)]a_1 - q'(x_0)a_0. \end{aligned} \tag{5}$$

A substituição de a_2 pela expressão obtida da Eq. (4) fornece a_3 em termos de a_0 e a_1. Como P, Q e R são polinômios e $P(x_0) \neq 0$, todas as derivadas de p e q existem em x_0. Logo, podemos continuar a derivar a Eq. (3) indefinidamente, determinando, após cada diferenciação, os coeficientes sucessivos $a_4, a_5, \ldots$ fazendo x igual a x_0.

Note que a propriedade importante que usamos na determinação de a_n é que podemos calcular uma infinidade de derivadas das funções p e q. Pode ser razoável relaxar nossa hipótese de que as funções p e q são quocientes de polinômios e, simplesmente, supor que sejam infinitamente diferenciáveis em uma vizinhança de x_0. Infelizmente, essa condição é muito fraca para garantir que podemos provar a convergência da expansão em série resultante para $y = \phi(x)$. É necessário supor que as funções p e q são *analíticas* em x_0; isto é, que elas têm expansões em série

[5] Charles Hermite (1822-1901) foi um analista e algebrista francês influente. Introduziu as funções de Hermite em 1864 e mostrou, em 1873, que e é um número transcendental (isto é, e não é raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes racionais). Seu nome também está associado às matrizes hermitianas (veja a Seção 7.3), algumas cujas propriedades ele descobriu.

de Taylor que convergem em algum intervalo em torno do ponto x_0:

$$p(x) = p_0 + p_1(x - x_0) + \cdots + p_n(x - x_0)^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - x_0)^n, \qquad (6)$$
$$q(x) = q_0 + q_1(x - x_0) + \cdots + q_n(x - x_0)^n + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x - x_0)^n. \qquad (7)$$

Com essa idéia em mente, podemos generalizar as definições de ponto ordinário e ponto singular da Eq. (1) da seguinte maneira: se as funções $p = Q/P$ e $q = R/P$ forem analíticas em x_0, então o ponto x_0 é dito um **ponto ordinário** da equação diferencial (1); caso contrário, é um **ponto singular**.

Vamos agora considerar o problema do intervalo de convergência da solução em série. Uma possibilidade é calcular, explicitamente, a solução em série para cada problema e usar um dos testes de convergência de uma série infinita para determinar seu raio de convergência. No entanto, essa questão pode ser respondida imediatamente para uma ampla classe de problemas pelo teorema a seguir.

Teorema 5.3.1

Se x_0 é um ponto ordinário da equação diferencial (1),

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0,$$

isto é, se $p = Q/P$ e $q = R/P$ são analíticas em x_0, então a solução geral da Eq. (1) é

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0y_1(x) + a_1y_2(x), \qquad (8)$$

onde a_0 e a_1 são arbitrários, e y_1 e y_2 são soluções em série linearmente independentes que são analíticas em x_0. Além disso, os raios de convergência das soluções em série y_1 e y_2 são, pelo menos, tão grandes quanto o menor entre os raios de convergência das séries para p e q.

Observe que, pela forma da solução em série, $y_1(x) = 1 + b_2(x - x_0)^2 + \ldots$ e $y_2(x) = (x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots$. Logo, y_1 é a solução satisfazendo as condições iniciais $y_1(x_0) = 1$, $y_1'(x_0) = 0$ e y_2 é a solução satisfazendo as condições iniciais $y_2(x_0) = 0$, $y_2'(x_0) = 1$. Note também que, embora o cálculo dos coeficientes através de diferenciações sucessivas da equação diferencial seja excelente do ponto de vista teórico, não é, em geral, um procedimento computacional prático. Em vez disso, é melhor substituir y na Eq. (1) pela série (2) e determinar os coeficientes de modo que a equação diferencial seja satisfeita, como nos exemplos da seção anterior.

Não demonstraremos esse teorema que, em uma forma ligeiramente mais geral, foi demonstrado por Fuchs.[6] O que importa para nossos propósitos é que existe uma solução em série da forma (2) e que o raio de convergência dessa solução em série não pode ser menor do que o menor entre os raios de convergência das séries para p e q; logo, precisamos apenas determinar esses raios.

Isso pode ser feito de duas maneiras. Novamente, uma possibilidade é calcular as séries de potências para p e q e, depois, determinar seus raios de convergência usando um dos testes de convergência para séries infinitas. No entanto, existe um modo mais fácil quando P, Q e R são polinômios. Na teoria de funções de uma variável complexa mostra-se que a razão de dois polinômios, digamos Q/P, tem uma expansão em série de potências que converge em torno de um ponto x_0 se $P(x_0) \neq 0$. Além disso, supondo que todos os fatores comuns entre Q e P foram cancelados, o raio de convergência da série de potências para Q/P em torno do ponto x_0 é exatamente a distância de x_0 à raiz mais próxima de P. Ao determinar essa distância, precisamos lembrar que $P(x) = 0$ pode ter raízes complexas e que essas também têm de ser levadas em consideração.

Exemplo 1

Qual o raio de convergência da série de Taylor para $(1 + x^2)^{-1}$ em torno de $x = 0$?

Um modo de proceder é encontrar a série de Taylor em questão, a saber,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots.$$

Pode-se verificar, pelo teste da razão, que $\rho = 1$. Uma outra abordagem é notar que os zeros de $1 + x^2$ são $x = \pm i$. Como a distância no plano complexo de 0 a i ou a $-i$ é 1, o raio de convergência da série de potências em torno de $x = 0$ é 1.

Exemplo 2

Qual é o raio de convergência da série de Taylor para $(x^2 - 2x + 2)^{-1}$ em torno de $x = 0$? E em torno de $x = 1$?

Em primeiro lugar, note que

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

tem soluções $x = 1 \pm i$. A distância no plano complexo de $x = 0$ a $x = 1 + i$ ou a $x = 1 - i$ é $\sqrt{2}$, logo, o raio de convergência da expansão em série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ em torno de $x = 0$ é $\sqrt{2}$.

[6] Immanuel Lazarus Fuchs (1833-1902) foi estudante e, mais tarde, professor na Universidade de Berlim. Provou o resultado do Teorema 5.3.1 em 1866. Sua pesquisa mais importante foi sobre pontos singulares de equações diferenciais lineares. Ele reconheceu a importância dos pontos singulares regulares (Seção 5.4), e as equações cujas únicas singularidades, incluindo o ponto no infinito, são pontos singulares regulares conhecidas como equações de Fuchs.

A distância no plano complexo de $x = 1$ a $x = 1 + i$ ou a $x = 1 - i$ é 1, logo o raio de convergência da expansão em série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-1)^n$ em torno de $x = 1$ é 1.

De acordo com o Teorema 5.3.1, as soluções em série da equação de Airy nos Exemplos 2 e 3 da seção precedente convergem para todos os valores de x, já que, em cada um dos problemas, $P(x) = 1$ e, portanto, nunca se anula.

Uma solução em série pode convergir para outros valores de x, além dos indicados no Teorema 5.3.1, de modo que o teorema fornece, de fato, apenas uma cota inferior para o raio de convergência da solução em série. Isso é ilustrado pelos polinômios de Legendre, que satisfazem a equação de Legendre dada no próximo exemplo.

Exemplo 3

Determine uma cota inferior para o raio de convergência das soluções em série em torno de $x = 0$ da equação de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0,$$

onde α é constante.

Note que $P(x) = 1 - x^2$, $Q(x) = -2x$ e $R(x) = \alpha(\alpha + 1)$ são polinômios e que os zeros de P, a saber, $x = \pm 1$, distam 1 de $x = 0$. Logo, uma solução em série da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge, pelo menos, para $|x| < 1$ e, possivelmente, para valores maiores de x. De fato, pode-se mostrar que, se α é um inteiro positivo, uma das soluções em série termina após um número finito de termos e, portanto, converge para todo x e não apenas para $|x| < 1$. Por exemplo, se $\alpha = 1$, a solução polinomial é $y = x$. Veja os problemas de 22 a 29, ao final desta seção, para uma discussão mais completa da equação de Legendre.

Exemplo 4

Determine uma cota inferior para o raio de convergência da solução em série da equação diferencial

$$(1+x^2)y'' + 2xy' + 4x^2y = 0 \qquad (9)$$

em torno do ponto $x = 0$ e em torno do ponto $x = -1/2$.

Novamente, P, Q e R são polinômios e P tem raízes $x = \pm i$. A distância no plano complexo de 0 a $\pm i$ é 1 e a distância de $-1/2$ a $\pm i$ é $\sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{5}/2$. Assim, no primeiro caso, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge, pelo menos, para $|x| < 1$ e, no segundo caso, a série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(x + \frac{1}{2}\right)^n$ converge, pelo menos, para $\left|x + \frac{1}{2}\right| < \sqrt{5}/2$.

Uma observação interessante que podemos fazer sobre a Eq. (9) segue dos Teoremas 3.2.1 e 5.3.1. Suponha que são dadas as condições iniciais $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y_0'$. Como $1 + x^2 \neq 0$ para todo x, sabemos, do Teorema 3.2.1 que o problema de valor inicial tem uma única solução em $-\infty < x < \infty$. Por outro lado, o Teorema 5.3.1 garante apenas uma solução em série da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (com $a_0 = y_0$, $a_1 = y_0'$) para $-1 < x < 1$. A solução única no intervalo $-\infty < x < \infty$ pode não ter expansão em série de potências em torno de $x = 0$ que convirja para todo x.

Exemplo 5

Podemos determinar uma solução em série em torno de $x = 0$ para a equação diferencial

$$y'' + (\operatorname{sen} x)y' + (1+x^2)y = 0,$$

e, se for o caso, qual o raio de convergência?

Para essa equação diferencial, $p(x) = \operatorname{sen} x$ e $q(x) = 1 + x^2$. Lembre-se, do Cálculo, que $\operatorname{sen} x$ tem uma expansão em série de Taylor em torno de $x = 0$ que converge para todo x. Além disso, q também tem uma expansão em série de Taylor em torno de $x = 0$, a saber, $q(x) = 1 + x^2$, que converge para todo x. Assim, a equação tem uma solução em série da forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ com a_0 e a_1 arbitrários, e a série converge para todo x.

Problemas

Nos problemas de 1 a 4, determine $\phi''(x_0)$, $\phi'''(x_0)$ e $\phi^{iv}(x_0)$ para o ponto dado x_0, se $y = \phi(x)$ é uma solução do problema de valor inicial dado.

1. $y'' + xy' + y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
2. $y'' + (\operatorname{sen} x)y' + (\cos x)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
3. $x^2y'' + (1+x)y' + 3(\ln x)y = 0; \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0$
4. $y'' + x^2y' + (\operatorname{sen} x)y = 0; \quad y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1$

Nos problemas de 5 a 8, determine uma cota inferior para o raio de convergência da solução em série da equação diferencial dada em torno de cada ponto x_0 dado.

5. $y'' + 4y' + 6xy = 0; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 4$
6. $(x^2 - 2x - 3)y'' + xy' + 4y = 0; \; x_0 = 4, \; x_0 = -4, \; x_0 = 0$
7. $(1 + x^3)y'' + 4xy' + y = 0; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 2$
8. $xy'' + y = 0; \quad x_0 = 1$
9. Determine uma cota inferior para o raio de convergência da solução em série em torno de x_0 dado para cada uma das equações diferenciais dadas nos problemas de 1 a 14 da Seção 5.2.
10. **A Equação de Chebyshev.** A equação diferencial de Chebyshev[7] é
$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0,$$
onde α é constante.
(a) Determine duas soluções linearmente independentes em séries de potências de x para $|x| < 1$.
(b) Mostre que, se α for um inteiro não-negativo n, então existe uma solução polinomial de grau n. Esses polinômios, quando propriamente normalizados, são chamados de polinômios de Chebyshev. Eles são muito úteis em problemas que necessitam de uma aproximação polinomial para uma função definida em $-1 \le x \le 1$.
(c) Encontre uma solução polinomial para cada um dos casos $\alpha = n = 0, 1, 2, 3$.

Para cada uma das equações diferenciais nos problemas de 11 a 14, encontre os quatro primeiros termos não-nulos em cada uma das duas soluções em série linearmente independentes em torno da origem. Qual o valor que você espera que tenha o raio de convergência de cada solução?

11. $y'' + (\operatorname{sen} x)y = 0$
12. $e^x y'' + xy = 0$
13. $(\cos x)y'' + xy' - 2y = 0$
14. $e^{-x}y'' + \ln(1+x)y' - xy = 0$
15. Suponha que lhe dizem que x e x^2 são soluções da equação diferencial $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$. Você pode dizer se o ponto $x = 0$ é um ponto ordinário ou singular? *Sugestão*: Use o Teorema 3.2.1 e observe os valores de x e de x^2 em $x = 0$.

Equações de Primeira Ordem. Os métodos de expansão em série discutidos nesta seção são diretamente aplicáveis à equação diferencial linear de primeira ordem $P(x)y' + Q(x)y = 0$ em um ponto x_0, se a função $p = Q/P$ tiver uma expansão em série de Taylor em torno desse ponto. Esse ponto é chamado de ponto ordinário e, além disso, o raio de convergência da série $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ é, pelo menos, tão grande quanto o raio de convergência da série para Q/P. Nos problemas de 16 a 21, resolva a equação diferencial dada por uma série de potências em x e verifique que a_0 é arbitrário em cada caso. Os Problemas 20 e 21 envolvem equações diferenciais não-homogêneas para as quais os métodos de expansão em série podem ser estendidos facilmente. Sempre que possível, compare a solução em série com a obtida pelos métodos do Cap. 2.

16. $y' - y = 0$
17. $y' - xy = 0$
18. $y' = e^{x^2}y$, apenas três termos
19. $(1 - x)y' = y$
20. $y' - y = x^2$
21. $y' + xy = 1 + x$

A Equação de Legendre. Os problemas de 22 a 29 tratam da equação de Legendre[8]
$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0.$$
Como indicado no Exemplo 3, o ponto $x = 0$ é um ponto ordinário dessa equação e a distância da origem ao zero mais próximo de $P(x) = 1 - x^2$ é 1. Logo, o raio de convergência da solução em série em torno de $x = 0$ é, pelo menos, 1. Note, também, que basta considerar $\alpha > -1$, pois, se $\alpha \le -1$, então a substituição $\alpha = -(1 + \gamma)$, onde $\gamma \ge 0$, leva à equação de Legendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \gamma(\gamma + 1)y = 0$.

22. Mostre que duas soluções linearmente independentes da equação de Legendre para $|x| < 1$ são
$$y_1(x) = 1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4 + \sum_{m=3}^{\infty}(-1)^m \frac{\alpha\cdots(\alpha-2m+2)(\alpha+1)\cdots(\alpha+2m-1)}{(2m)!}x^{2m},$$
$$y_2(x) = x - \frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3 + \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}x^5 + \sum_{m=3}^{\infty}(-1)^m \frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-2m+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+2m)}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$
23. Mostre que, se α for zero ou um inteiro positivo par $2n$, a solução em série y_1 se reduz a um polinômio de grau $2n$ contendo apenas potências pares de x. Encontre os polinômios correspondentes a $\alpha = 0$, 2 e 4. Mostre que, se α for um inteiro positivo ímpar $2n + 1$, então a solução em série y_2 se reduz a um polinômio de grau $2n + 1$ contendo apenas potências ímpares de x. Encontre os polinômios correspondentes a $\alpha = 1$, 3 e 5.
24. O polinômio de Legendre $P_n(x)$ é definido como a solução polinomial da equação de Legendre com $\alpha = n$ que satisfaz $P_n(1) = 1$.
(a) Usando os resultados do Problema 23, encontre os polinômios de Legendre $P_0(x), \ldots, P_5(x)$.
(b) Faça os gráficos de $P_0(x), \ldots, P_5(x)$ para $-1 \le x \le 1$.
(c) Encontre os zeros de $P_0(x), \ldots, P_5(x)$.
25. Pode-se mostrar que a fórmula geral para $P_n(x)$ é
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k},$$
onde $[n/2]$ denota o maior inteiro menor ou igual a $n/2$. Observando a forma de $P_n(x)$ para n par e ímpar, mostre que $P_n(-1) = (-1)n$.
26. Os polinômios de Legendre têm um papel importante em física matemática. Por exemplo, ao se resolver a equação de Laplace (equação do potencial) em coordenadas esféricas, encontramos a equação
$$\frac{d^2F(\varphi)}{d\varphi^2} + \cot\varphi\frac{dF(\varphi)}{d\varphi} + n(n+1)F(\varphi) = 0, \qquad 0 < \varphi < \pi,$$

[7] Pafnuty L. Chebyshev (1821-1894), professor da Universidade de São Petersburgo durante 35 anos e o matemático russo mais influente do século XIX, fundou a "escola de São Petersburgo", que produziu uma longa linhagem de matemáticos importantes. Seus estudos sobre os polinômios de Chebyshev começaram em torno de 1854 como parte de uma investigação de aproximação de funções por polinômios. Chebyshev também é conhecido por seu trabalho em teoria dos números e probabilidade.

[8] Adrien-Marie Legendre (1752-1833) teve várias posições na Academia Francesa de Ciências a partir de 1783. Seus trabalhos principais foram nos campos de funções elípticas e teoria dos números. As funções de Legendre, soluções da equação de Legendre, apareceram pela primeira vez em 1784 em seu estudo sobre a atração de esferóides.

onde n é um inteiro positivo. Mostre que a mudança de variável $x = \cos \varphi$ transforma essa em uma equação de Legendre com $\alpha = n$ para $y = f(x) = F(\arccos x)$.

27. Mostre que, para $n = 0, 1, 2, 3$, o polinômio de Legendre correspondente é dado por

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$

Essa fórmula, conhecida como fórmula de Rodrigues[9], é válida para todos os inteiros positivos n.

28. Mostre que a equação de Legendre também pode ser escrita como

$$[(1 - x^2)y']' = -\alpha(\alpha + 1)y.$$

Segue, então, que

$$[(1 - x^2)P_n'(x)]' = -n(n + 1)P_n(x) \text{ e } [(1 - x^2)P_m'(x)]' = -m(m + 1)P_m(x).$$

Multiplicando a primeira equação por $P_m(x)$, a segunda por $P_n(x)$, integrando por partes e depois subtraindo uma equação da outra, mostre que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\, dx = 0 \quad \text{se} \quad n \neq m.$$

como a propriedade de ortogonalidade. Se $m = n$, pode-se mostrar que o valor da integral anterior é $2/(2n + 1)$.

29. Dado um polinômio f de grau n, é possível expressar f como uma combinação linear de $P_0, P_1, P_2, ..., P_n$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x).$$

Usando o resultado do Problema 28, mostre que

$$a_k = \frac{2k + 1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)\, dx.$$

5.4 Pontos Singulares Regulares

Nesta seção, vamos considerar a equação

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{1}$$

na vizinhança de um ponto singular x_0. Lembre-se de que, se as funções P, Q e R são polinômios sem fatores comuns, os pontos singulares da Eq. (1) são os pontos nos quais $P(x) = 0$.

Exemplo 1

Determine os pontos singulares e os ordinários da equação de Bessel de ordem ν

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0. \tag{2}$$

O ponto $x = 0$ é um ponto singular, já que $P(x) = x^2$ se anula aí. Todos os outros pontos são pontos ordinários da Eq. (2).

Exemplo 2

Determine os pontos singulares e os ordinários da equação de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0, \tag{3}$$

onde α é constante.

Os pontos singulares são os zeros de $P(x) = 1 - x^2$, a saber, os pontos $x = \pm 1$. Todos os outros pontos são pontos ordinários.

Infelizmente, se tentarmos usar os métodos das duas seções precedentes para resolver a Eq. (1) na vizinhança de um ponto singular x_0, descobriremos que esses métodos não funcionam. Isso deve-se ao fato de que, freqüentemente, as soluções da Eq. (1) não são analíticas em x_0 e, portanto, não podem ser representadas por uma série de Taylor em potências de $x - x_0$. Em vez disso, precisamos usar uma expansão em série mais geral.

Como uma equação diferencial tem, em geral, poucos pontos singulares, poderíamos especular se eles não poderiam ser, simplesmente, ignorados, uma vez que já sabemos como construir soluções em torno de pontos regulares. No entanto, isso não é possível porque os pontos singulares determinam as características principais das soluções de forma muito mais profunda do que poderíamos suspeitar à primeira vista. Em uma vizinhança de um ponto singular, a solução torna-se, muitas vezes, muito grande em módulo, ou experimenta mudanças rápidas em seu módulo. Assim, o comportamento de um sistema físico modelado por uma equação diferencial é, com freqüência, mais interessante em uma vizinhança de um ponto singular. Muitas vezes, singularidades geométricas em um problema físico, como bicos ou arestas, geram pontos singulares na equação diferencial correspondente. Então, embora queiramos, inicialmente, evitar os poucos pontos onde uma equação diferencial é singular, é precisamente nesses pontos que é necessário estudar a equação com mais cuidado.

Como alternativa aos métodos analíticos, poderia ser considerada a utilização de métodos numéricos, que serão discutidos no Cap. 8. Entretanto, esses métodos não são adequados para o estudo de soluções na proximidade de um ponto singular. Dessa forma, mesmo adotando uma abordagem numérica, é vantajoso combiná-la com os métodos analíticos deste capítulo para que

[9] Olinde Rodrigues (1794-1851) publicou esse resultado como parte de sua tese de doutorado na Escola Normal de Paris em 1816. Mais tarde ele tornou-se banqueiro e defensor de reformas sociais.

se possa examinar o comportamento das soluções na proximidade de um ponto singular.

Sem qualquer informação adicional sobre o comportamento de Q/P e R/P na vizinhança do ponto singular, é impossível descrever o comportamento das soluções da Eq. (1) perto de x_0. Pode acontecer de existirem duas soluções linearmente independentes da Eq. (1) que permanecem limitadas quando $x \to x_0$, ou uma delas pode permanecer limitada enquanto a outra torna-se ilimitada quando $x \to x_0$, ou ambas podem tornar-se ilimitadas quando $x \to x_0$. Os Exemplos 3, 4 e 5 a seguir ilustram essas possibilidades. Se a Eq. (1) tem soluções que se tornam ilimitadas quando $x \to x_0$, é importante, muitas vezes, determinar o comportamento dessas soluções quando $x \to x_0$. Por exemplo, $y \to \infty$ da mesma forma que $(x - x_0)^{-1}$, ou $(x - x_0)^{-1/2}$, ou de alguma outra forma?

Exemplo 3

A equação diferencial

$$x^2y'' - 2y = 0 \tag{4}$$

tem um ponto singular em $x = 0$. Pode-se verificar facilmente, por substituição direta, que $y_1(x) = x^2$ e $y_2(x) = 1/x$ são soluções linearmente independentes da Eq. (4) para $x > 0$ ou $x < 0$. Logo, em qualquer intervalo que não contenha a origem, a solução geral da Eq. (4) é $y = c_1x^2 + c_2x^{-1}$. A única solução da Eq. (4) que permanece limitada quando $x \to 0$ é $y = c_1x^2$. De fato, essa solução é analítica na origem, apesar do fato de que, se a Eq. (4) for colocada na forma padrão, $y'' - (2/x^2)y = 0$, a função $q(x) = -2/x^2$ não é analítica em $x = 0$ e o Teorema 5.3.1 não se aplica. Por outro lado, note que a solução $y_2(x) = x^{-1}$ não tem expansão em série de Taylor em torno da origem (não é analítica em $x = 0$); portanto, o método da Seção 5.2 falharia nesse caso.

Exemplo 4

A equação diferencial

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0 \tag{5}$$

também tem um ponto singular em $x = 0$. Pode-se verificar que $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x^2$ são soluções linearmente independentes da Eq. (5) e que ambas são analíticas em $x = 0$. Apesar disso, não é apropriado se colocar um problema de valor inicial com condições iniciais em $x = 0$. É impossível satisfazer condições iniciais arbitrárias em $x = 0$, já que qualquer combinação linear de x e x^2 é zero em $x = 0$.

Exemplo 5

A equação diferencial

$$x^2y'' + 5xy' + 3y = 0 \tag{6}$$

também tem um ponto singular em $x = 0$. Você pode verificar que $y_1(x) = 1/x$ e $y_2(x) = 1/x^3$ são soluções linearmente independentes da Eq. (6) e que nenhuma delas é analítica em $x = 0$. De fato, toda solução (não-nula) da Eq. (6) torna-se ilimitada quando $x \to 0$.

Nosso objetivo é estender o método que já desenvolvemos para resolver a Eq. (1) perto de um ponto ordinário de modo que ele também possa ser aplicado em uma vizinhança de um ponto singular x_0. Para fazer isso de maneira simples, precisamos nos restringir a casos onde as singularidades das funções Q/P e R/P não são muito severas, isto é, são do tipo que poderíamos chamar de "singularidades fracas". A essa altura, não é claro o que seria, exatamente, uma singularidade aceitável. No entanto, na medida em que formos desenvolvendo o método de resolução, você verá que as condições apropriadas (veja também a Seção 5.7, Problema 21) que distinguem as "singularidades fracas" são

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{é finito} \tag{7}$$

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)} \quad \text{é finito.} \tag{8}$$

Isso significa que a singularidade de Q/P não pode ser pior do que $(x - x_0)^{-1}$ e que a singularidade de R/P não pode ser pior do que $(x - x_0)^{-2}$. Tal ponto é chamado de **ponto singular regular** da Eq. (1). Para funções mais gerais do que polinômios, x_0 é um ponto singular regular da Eq. (1) se for um ponto singular e se ambas as funções[10]

$$(x - x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} \qquad \text{e} \qquad (x - x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)} \tag{9}$$

têm séries de Taylor convergentes em torno de x_0, isto é, se as funções na Eq. (9) forem analíticas em $x = x_0$. As Eqs. (7) e (8) implicam que esse será o caso quando P, Q e R forem polinômios. Qualquer ponto singular da Eq. (1) que não seja um ponto singular regular é chamado de **ponto singular irregular** da Eq. (1).

Nas seções a seguir, discutiremos como resolver a Eq. (1) na vizinhança de um ponto singular regular. A discussão de soluções de equações diferenciais na vizinhança de pontos singulares irregulares é mais complicada e pode ser encontrada em livros mais avançados.

[10]As funções dadas na Eq. (9) podem não estar definidas em x_0 e, nesse caso, seus valores em x_0 devem ser atribuídos como sendo seus limites quando $x \to x_0$.

Exemplo 6

No Exemplo 2, observamos que os pontos singulares da equação de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

são $x = \pm 1$. Determine se esses pontos singulares são regulares ou irregulares.

Vamos considerar, primeiro, o ponto $x = 1$ e observar, também, que, ao dividir por $(1 - x^2)$, os coeficientes de y' e de y ficam iguais a $-2x/(1 - x^2)$ e $\alpha(\alpha + 1)/(1 - x^2)$, respectivamente. Calculamos, então,

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{-2x}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(-2x)}{(1-x)(1+x)} = \lim_{x\to 1}\frac{2x}{1+x} = 1$$

e

$$\lim_{x\to 1}(x-1)^2\frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2\alpha(\alpha+1)}{(1-x)(1+x)}$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(-\alpha)(\alpha+1)}{1+x} = 0.$$

Como esses limites são finitos, o ponto $x = 1$ é um ponto singular regular. Pode-se mostrar, de maneira semelhante, que $x = -1$ também é um ponto singular regular.

Exemplo 7

Determine os pontos singulares da equação diferencial

$$2x(x-2)^2y'' + 3xy' + (x-2)y = 0$$

e classifique-os como regulares ou irregulares.

Dividindo a equação diferencial por $2x(x - 2)^2$, temos

$$y'' + \frac{3}{2(x-2)^2}y' + \frac{1}{2x(x-2)}y = 0,$$

de modo que $p(x) = Q(x)/P(x) = 3/2(x - 2)^2$ e $q(x) = R(x)/P(x) = 1/2x(x - 2)$. Os pontos singulares são $x = 0$ e $x = 2$. Considere $x = 0$. Temos

$$\lim_{x\to 0} xp(x) = \lim_{x\to 0} x\frac{3}{2(x-2)^2} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0} x^2q(x) = \lim_{x\to 0} x^2\frac{1}{2x(x-2)} = 0.$$

Como esses limites são finitos, $x = 0$ é um ponto singular regular. Para $x = 2$, temos

$$\lim_{x\to 2}(x-2)p(x) = \lim_{x\to 2}(x-2)\frac{3}{2(x-2)^2} = \lim_{x\to 2}\frac{3}{2(x-2)},$$

de modo que o limite não existe; portanto, $x = 2$ é um ponto singular irregular.

Exemplo 8

Determine os pontos singulares de

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 y'' + (\cos x)y' + (\operatorname{sen} x)y = 0$$

e classifique-os como regular ou irregular.

O único ponto singular é $x = \pi/2$. Para estudá-lo, vamos considerar as funções

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)p(x) = \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{\cos x}{x-\pi/2}$$

e

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 q(x) = \left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{R(x)}{P(x)} = \operatorname{sen} x.$$

A partir da série de Taylor para $\cos x$ em torno de $x = \pi/2$, encontramos

$$\frac{\cos x}{x-\pi/2} = -1 + \frac{(x-\pi/2)^2}{3!} - \frac{(x-\pi/2)^4}{5!} + \cdots,$$

que converge para todo x. Analogamente, sen x é analítica em $x = \pi/2$. Portanto, concluímos que $\pi/2$ é um ponto singular regular para essa equação.

Problemas

Nos problemas de 1 a 18, encontre todos os pontos singulares da equação dada e determine se cada um deles é regular ou irregular.

1. $xy'' + (1-x)y' + xy = 0$
2. $x^2(1-x)^2y'' + 2xy' + 4y = 0$
3. $x^2(1-x)y'' + (x-2)y' - 3xy = 0$
4. $x^2(1-x^2)y'' + (2/x)y' + 4y = 0$
5. $(1-x^2)^2y'' + x(1-x)y' + (1+x)y = 0$
6. $x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0$, equação de Bessel
7. $(x+3)y'' - 2xy' + (1-x^2)y = 0$
8. $x(1-x^2)^3y'' + (1-x^2)^2y' + 2(1+x)y = 0$
9. $(x+2)^2(x-1)y'' + 3(x-1)y' - 2(x+2)y = 0$
10. $x(3-x)y'' + (x+1)y' - 2y = 0$
11. $(x^2+x-2)y'' + (x+1)y' + 2y = 0$
12. $xy'' + e^xy' + (3\cos x)y = 0$
13. $y'' + (\ln|x|)y' + 3xy = 0$
14. $x^2y'' + 2(e^x-1)y' + (e^{-x}\cos x)y = 0$

15. $x^2y'' - 3(\text{sen}\,x)y' + (1 + x^2)y = 0$
16. $xy'' + y' + (\cot x)y = 0$
17. $(\text{sen}\,x)y'' + xy' + 4y = 0$
18. $(x\,\text{sen}\,x)y'' + 3y' + xy = 0$

Nos Problemas 19 e 20, mostre que o ponto $x = 0$ é um ponto singular regular. Tente, em cada problema, encontrar soluções da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Mostre que existe apenas uma solução não-nula dessa forma para o Problema 19 e que não existem soluções não-nulas dessa forma para o Problema 20. Assim, em nenhum dos casos a solução geral pode ser encontrada desse modo. Isso é típico de equações com pontos singulares.

19. $2xy'' + 3y' + xy = 0$
20. $2x^2y'' + 3xy' - (1 + x)y = 0$
21. **Singularidades no Infinito.** As definições de ponto ordinário e ponto singular regular dadas nas seções precedentes só se aplicam se o ponto x_0 é finito. Em trabalhos mais avançados de equações diferenciais, é necessário, muitas vezes, discutir o ponto no infinito. Isso é feito através da mudança de variável ξ, estudando-se a equação resultante em $\xi = 0$. Mostre que, para a equação diferencial $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$, o ponto no infinito é um ponto ordinário se

$$\frac{1}{P(1/\xi)}\left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi} - \frac{Q(1/\xi)}{\xi^2}\right] \quad \text{e} \quad \frac{R(1/\xi)}{\xi^4 P(1/\xi)}$$

têm expansões em série de Taylor em torno de $\xi = 0$. Mostre também que o ponto no infinito é um ponto singular regular se pelo menos uma das funções anteriores não tiver expansão em série de Taylor, mas ambas as funções

$$\frac{\xi}{P(1/\xi)}\left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi} - \frac{Q(1/\xi)}{\xi^2}\right] \quad \text{e} \quad \frac{R(1/\xi)}{\xi^2 P(1/\xi)}$$

tiverem tais expansões.

Nos problemas de 22 a 27, use os resultados do Problema 21 para determinar se o ponto no infinito é um ordinário, singular regular ou s ngular irregular da equação diferencial dada.

22. $y'' + y = 0$
23. $x^2y'' + xy' - 4y = 0$
24. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$, equação de Legendre
25. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, equação de Bessel
26. $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$, equação de Hermite
27. $y'' - xy = 0$, equação de Airy

5.5 Equações de Euler

Uma equação diferencial relativamente simples que tem um ponto singular regular é a **equação de Euler**[11]

$$L[y] = x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0, \tag{1}$$

onde α e β são constantes reais. É fácil mostrar que $x = 0$ é um ponto singular regular da Eq. (1). Como a solução da equação de Euler é típica das soluções de todas as equações diferenciais com um ponto singular regular, vale a pena considerar essa equação em detalhe antes de discutir o problema mais geral.

Em qualquer intervalo que não contenha a origem, a Eq. (1) tem uma solução geral da forma $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, onde y_1 e y_2 são linearmente independentes. Por conveniência, vamos considerar primeiro o intervalo $x > 0$, estendendo nossos resultados mais tarde para o intervalo $x < 0$. Primeiro, note que $(x^r)' = rx^{r-1}$ e $(x^r)'' = r(r - 1)x^{r-2}$. Logo, supondo que temos uma solução da forma

$$y = x^r, \tag{2}$$

obtemos

$$\begin{aligned} L[x^r] &= x^2(x^r)'' + \alpha x(x^r)' + \beta x^r \\ &= x^r[r(r-1) + \alpha r + \beta]. \end{aligned} \tag{3}$$

Se r é raiz da equação de segundo grau

$$F(r) = r(r - 1) + \alpha r + \beta = 0, \tag{4}$$

então $L[x^r]$ é zero e $y = x^r$ é uma solução da Eq. (1). As raízes da Eq. (4) são

$$r_1, r_2 = \frac{-(\alpha - 1) \pm \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\beta}}{2}, \tag{5}$$

e $F(r) = (r - r_1)(r - r_2)$. Como para equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, é necessário considerar separadamente os casos nos quais as raízes são reais e diferentes, reais e iguais, e complexas conjugadas. De fato, toda a discussão nesta seção é semelhante ao tratamento de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes no Cap. 3 com e^{rx} substituído por x^r; veja, também, o Problema 23.

Raízes Reais e Distintas. Se $F(r) = 0$ tem raízes reais r_1 e r_2 com $r_1 \neq r_2$, então $y_1(x) = x^{r_1}$ e $y_2(x) = x^{r_2}$ são soluções da Eq. (1). Como $W(x^{r_1}, x^{r_2}) = (r_2 - r_1)x^{r_1+r_2-1}$ não se anula se $r_1 \neq r_2$ e $x > 0$, segue que a solução geral da Eq. (1) é

$$y = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}, \qquad x > 0. \tag{6}$$

Note que, se r não for racional, então x^r é definida por $x^r = e^{r \ln x}$.

Exemplo 1

Resolva

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \qquad x > 0. \tag{7}$$

Substituindo $y = x^r$ na Eq. (7), obtemos

$$\begin{aligned} x^r[2r(r-1) + 3r - 1] &= x^r(2r^2 + r - 1) \\ &= x^r(2r - 1)(r + 1) = 0. \end{aligned}$$

Logo $r_1 = 1/2$ e $r_2 = -1$, de modo que a solução geral da Eq. (7) é

$$y = c_1x^{1/2} + c_2x^{-1}, \qquad x > 0. \tag{8}$$

[11]Algumas vezes essa equação é chamada de equação de Cauchy-Euler ou equação eqüidimensional. Ela foi estudada por Euler em torno de 1740, mas sua solução era conhecida por Johann Bernoulli antes de 1700.

Raízes Iguais. Se as raízes r_1 e r_2 são iguais, obtemos apenas uma solução $y_1(x) = x^{r_1}$ da forma proposta. Pode-se obter uma segunda solução pelo método de redução de ordem, mas vamos considerar, para nossa discussão futura, um outro método. Como $r_1 = r_2$, $F(r) = (r - r_1)^2$. Assim, nesse caso, além de $F(r_1) = 0$, temos, também, $F'(r_1) = 0$. Isso sugere a diferenciação da Eq. (3) em relação a r e, depois, a atribuição r igual a r_1. Derivando a Eq. (3) em relação a r, temos

$$\frac{\partial}{\partial r}L[x^r] = \frac{\partial}{\partial r}[x^r F(r)].$$

Substituindo $F(r)$, trocando as ordens de integração em relação a x e em relação a r, e notando que $\partial(x^r)/\partial r = x^r \ln x$, obtemos

$$L[x^r \ln x] = (r - r_1)^2 x^r \ln x + 2(r - r_1)x^r. \quad (9)$$

A expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (9) é 0 para $r = r_1$; portanto,

$$y_2(x) = x^{r_1} \ln x, \qquad x > 0 \quad (10)$$

é uma segunda solução da Eq. (1). É fácil mostrar que $W(x^{r_1}, x^{r_1} \ln x) = x^{2r_1 - 1}$. Logo, x^{r_1} e $x^{r_1} \ln x$ são linearmente independentes para $x > 0$ e a solução geral da Eq. (1) é

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{r_1}, \qquad x > 0. \quad (11)$$

Exemplo 2

Resolva

$$x^2y'' + 5xy' + 4y = 0, \qquad x > 0. \quad (12)$$

Substituindo $y = x^r$ na Eq. (12), obtemos

$$x^r[r(r-1) + 5r + 4] = x^r(r^2 + 4r + 4) = 0.$$

Portanto, $r_1 = r_2 = -2$ e

$$y = x^{-2}(c_1 + c_2 \ln x), \qquad x > 0. \quad (13)$$

Raízes Complexas. Finalmente, suponha que as raízes r_1 e r_2 são complexas conjugadas, por exemplo, $r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_2 = \lambda - i\mu$, com $\mu \neq 0$. Precisamos explicar agora o significado de x^r quando r é complexo. Lembrando que

$$x^r = e^{r \ln x} \quad (14)$$

quando $x > 0$ e r é real, podemos usar essa equação para *definir* x^r quando r é complexo. Então,

$$x^{\lambda+i\mu} = e^{(\lambda+i\mu)\ln x} = e^{\lambda \ln x}e^{i\mu \ln x} = x^{\lambda}e^{i\mu \ln x}$$
$$= x^{\lambda}[\cos(\mu \ln x) + i \operatorname{sen}(\mu \ln x)], \qquad x > 0. \quad (15)$$

Com essa definição de x^r para valores complexos de r, pode-se verificar que as regras usuais da álgebra e do cálculo diferencial continuam válidas, logo x^{r_1} e x^{r_2} são, de fato, soluções da Eq. (1). A solução geral da Eq. (1) é

$$y = c_1 x^{\lambda+i\mu} + c_2 x^{\lambda-i\mu}. \quad (16)$$

A desvantagem dessa expressão é que as funções $x^{\lambda+i\mu}$ e $x^{\lambda-i\mu}$ tomam valores complexos. Lembre-se que tivemos uma situação semelhante no estudo de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes quando as raízes eram complexas. Da mesma forma que fizemos anteriormente, podemos observar que as partes real e imaginária de $x^{\lambda+i\mu}$, a saber,

$$x^{\lambda}\cos(\mu \ln x) \qquad \text{e} \qquad x^{\lambda}\operatorname{sen}(\mu \ln x), \quad (17)$$

também são soluções da Eq. (1). Um cálculo direto mostra que

$$W[x^{\lambda}\cos(\mu \ln x), x^{\lambda}\operatorname{sen}(\mu \ln x)] = \mu x^{2\lambda-1}.$$

Portanto, essas soluções são linearmente independentes para $x > 0$, e a solução geral da Eq. (1) é

$$y = c_1 x^{\lambda}\cos(\mu \ln x) + c_2 x^{\lambda}\operatorname{sen}(\mu \ln x), \; x > 0. \quad (18)$$

Exemplo 3

Resolva

$$x^2y'' + xy' + y = 0. \quad (19)$$

Substituindo $y = x^r$ na Eq. (19), obtemos

$$x^r[r(r-1) + r + 1] = x^r(r^2 + 1) = 0.$$

Logo, $r = \pm i$ e a solução geral é

$$y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\ln x), \; x > 0. \quad (20)$$

Vamos considerar, agora, o comportamento qualitativo das soluções da Eq. (1) perto do ponto singular regular $x = 0$. Isso depende inteiramente da natureza dos expoentes r_1 e r_2. Em primeiro lugar, se r é real e positivo, $x^r \to 0$ quando x tende a zero assumindo apenas valores positivos. Por outro lado, se r é real e negativo, então x^r torna-se ilimitado. Finalmente, se $r = 0$, então $x^r = 1$. Essas possibilidades estão ilustradas na Fig. 5.5.1 para diversos valores de r. Se r for complexo, então uma solução típica é $x^{\lambda}\cos(\mu \ln x)$. Essa função torna-se ilimitada ou tende a zero se λ for, respectivamente, negativo ou positivo, e, também,

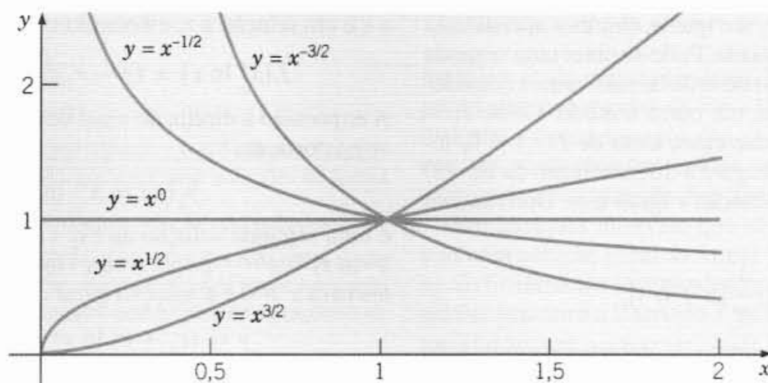


FIG. 5.5.1 Soluções de uma equação de Euler; raízes reais.

oscila cada vez mais rapidamente quando $x \to 0$. Esses comportamentos estão ilustrados nas Figs. 5.5.2 e 5.5.3 para valores selecionados de λ e de μ. Se $\lambda = 0$, a oscilação tem amplitude constante. Finalmente, se as raízes são repetidas, então uma das soluções tem a forma $x^r \ln x$, que tende a zero se $r > 0$ e é ilimitada se $r \leq 0$. Um exemplo de cada caso aparece na Fig. 5.5.4.

A extensão das soluções da Eq. (1) para o intervalo $x < 0$ pode ser feita de modo relativamente direto. A dificuldade está em compreender o significado de x^r quando r é negativo e não é inteiro; analogamente, $\ln x$ não está definido para $x < 0$. Pode-se mostrar que as soluções da equação de Euler que encontramos para $x > 0$ são válidas para $x < 0$, mas são, em geral, complexas. Assim, no Exemplo 1, a solução $x^{1/2}$ é imaginária para $x < 0$.

Sempre é possível obter soluções reais da equação de Euler (1) no intervalo $x < 0$ fazendo a mudança de variável a seguir. Seja $x = -\xi$, onde $\xi > 0$, e seja $y = u(\xi)$. Temos, então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = -\frac{du}{d\xi},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\xi}\left(-\frac{du}{d\xi}\right)\frac{d\xi}{dx} = \frac{d^2u}{d\xi^2}. \tag{21}$$

Assim, a Eq. (1), para $x < 0$, fica com a forma

$$\xi^2\frac{d^2u}{d\xi^2} + \alpha\xi\frac{du}{d\xi} + \beta u = 0, \qquad \xi > 0. \tag{22}$$

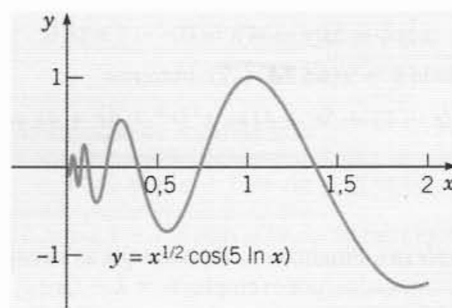


FIG. 5.5.3 Solução de uma equação de Euler; raízes complexas com parte real positiva.

Mas esse é exatamente o problema que acabamos de resolver; das Eqs. (6), (11) e (18), temos

$$u(\xi) = \begin{cases} c_1\xi^{r_1} + c_2\xi^{r_2} \\ (c_1 + c_2\ln\xi)\xi^{r_1} \\ c_1\xi^{\lambda}\cos(\mu\ln\xi) + c_2\xi^{\lambda}\operatorname{sen}(\mu\ln\xi), \end{cases} \tag{23}$$

dependendo de os zeros de $F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta$ serem reais e diferentes, reais e iguais ou complexos conjugados. Para obter u em função de x, substituímos ξ por $-x$ nas Eqs. (23).

Podemos combinar os resultados para $x > 0$ e $x < 0$ lembrando que $|x| = x$ quando $x > 0$ e $|x| = -x$ quando $x < 0$. Logo, precisamos apenas substituir x por $|x|$ nas Eqs. (6), (11) e (18)

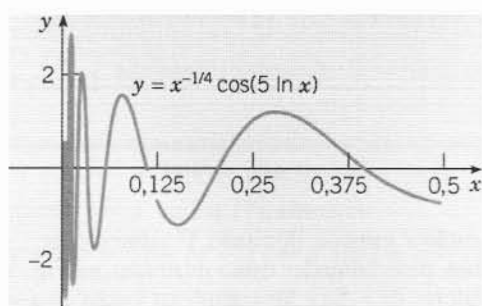


FIG. 5.5.2 Solução de uma equação de Euler; raízes complexas com parte real negativa.

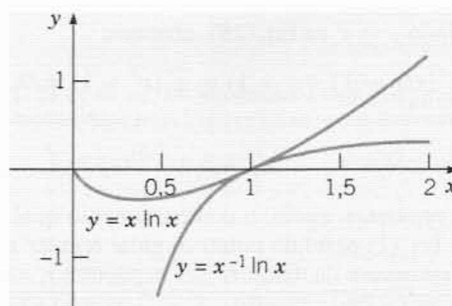


FIG. 5.5.4 Soluções de uma equação de Euler; raízes repetidas.

para obter soluções reais válidas em qualquer intervalo que não contenha a origem (veja, também, os Problemas 30 e 31). Esses resultados estão resumidos no teorema a seguir.

Teorema 5.5.1

A solução geral da equação de Euler (1),

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0,$$

em qualquer intervalo que não contenha a origem é determinada pelas raízes r_1 e r_2 da equação

$$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = 0.$$

Se as raízes forem reais e diferentes, então

$$y = c_1|x|^{r_1} + c_2|x|^{r_2}. \quad (24)$$

Se as raízes forem iguais, então

$$y = (c_1 + c_2 \ln|x|)|x|^{r_1}. \quad (25)$$

Se as raízes forem complexas conjugadas, então

$$y = |x|^{\lambda}[c_1 \cos(\mu \ln|x|) + c_2 \,\text{sen}(\mu \ln|x|)], \quad (26)$$

onde $r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$.

As soluções de uma equação de Euler da forma

$$(x-x_0)^2y'' + \alpha(x-x_0)y' + \beta y = 0 \quad (27)$$

são semelhantes às dadas no Teorema 5.5.1. Se procurarmos soluções da forma $y = (x-x_0)^r$, então a solução geral é dada por uma das Eqs. (24), (25) ou (26) com $(x - x_0)$ no lugar de x. De outro modo, podemos reduzir a Eq. (27) à forma da Eq. (1) fazendo uma mudança da variável independente $t = x - x_0$.

A situação para uma equação diferencial de segunda ordem com um ponto singular regular é análoga à de uma equação de Euler. Vamos considerar esse problema na próxima seção.

Problemas

Nos problemas de 1 a 12, determine a solução geral da equação diferencial dada, válida em qualquer intervalo que não inclui o ponto singular.

1. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$
2. $(x+1)^2y'' + 3(x+1)y' + 0{,}75y = 0$
3. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$
4. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$
5. $x^2y'' - xy' + y = 0$
6. $(x-1)^2y'' + 8(x-1)y' + 12y = 0$
7. $x^2y'' + 6xy' - y = 0$
8. $2x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$
9. $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$
10. $(x-2)^2y'' + 5(x-2)y' + 8y = 0$
11. $x^2y'' + 2xy' + 4y = 0$
12. $x^2y'' - 4xy' + 4y = 0$

Nos problemas de 13 a 16, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Faça o gráfico da solução e descreva como ela se comporta quando $x \to 0$.

13. $2x^2y'' + xy' - 3y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 4$
14. $4x^2y'' + 8xy' + 17y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -3$
15. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 3$
16. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1$
17. Encontre todos os valores de α para os quais todas as soluções de $x^2y'' + \alpha xy' + (5/2)y = 0$ tendem a zero quando $x \to 0$.
18. Encontre todos os valores de β para os quais todas as soluções de $x^2y'' + \beta y = 0$ tendem a zero quando $x \to 0$.
19. Encontre γ de modo que a solução do problema de valor inicial $x^2y'' - 2y = 0, y(1) = 1, y'(1) = \gamma$ permaneça limitada quando $x \to 0$.
20. Encontre todos os valores de α para os quais todas as soluções de $x^2y'' + \alpha xy' + (5/2)y = 0$ tendem a zero quando $x \to \infty$.
21. Considere a equação de Euler $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$. Encontre condições sobre α e β para que:
(a) Todas as soluções tendam a zero quando $x \to 0$.
(b) Todas as soluções permaneçam limitadas quando $x \to 0$.
(c) Todas as soluções tendam a zero quando $x \to \infty$.
(d) Todas as soluções permaneçam limitadas quando $x \to \infty$.
(e) Todas as soluções permaneçam limitadas quando $x \to 0$ e quando $x \to \infty$.
22. Usando o método de redução de ordem, mostre que, se r_1 é uma raiz repetida de $r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$, então x^{r_1} e $x^{r_1}\ln x$ são soluções de $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ para $x > 0$.
23. **Transformação para uma Equação com Coeficientes Constantes.** A equação de Euler $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ pode ser reduzida a uma equação com coeficientes constantes através de uma mudança na variável independente. Seja $x = e^z$, ou $z = \ln x$, e considere apenas o intervalo $x > 0$.
(a) Mostre que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz} \quad \text{e} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}.$$

(b) Mostre que a equação de Euler se transforma em

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (\alpha - 1)\frac{dy}{dz} + \beta y = 0.$$

Denotando por r_1 e r_2 as raízes de $r^2 + (\alpha-1)r + \beta = 0$, mostre que:
(c) Se r_1 e r_2 são reais e distintos, então

$$y = c_1e^{r_1z} + c_2e^{r_2z} = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}.$$

(d) Se r_1 e r_2 são reais e iguais, então

$$y = (c_1 + c_2z)e^{r_1z} = (c_1 + c_2\ln x)x^{r_1}.$$

(e) Se r_1 e r_2 são complexos conjugados, $r_1 = \lambda + i\mu$, então

$$y = e^{\lambda z}[c_1\cos(\mu z) + c_2\,\text{sen}(\mu z)] = x^{\lambda}[c_1\cos(\mu\ln x) + c_2\,\text{sen}(\mu\ln x)].$$

Nos problemas de 24 a 29, use o método do Problema 23 para resolver a equação dada para $x > 0$.

24. $x^2y'' - 2y = 0$
25. $x^2y'' - 3xy' + 4y = \ln x$
26. $x^2y'' + 7xy' + 5y = x$
27. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 3x^2 + 2\ln x$
28. $x^2y'' + xy' + 4y = \text{sen}(\ln x)$
29. $3x^2y'' + 12xy' + 9y = 0$
30. Mostre que, se $L[y] = x^2y'' + \alpha xy' + \beta y$, então

$$L[(-x)^r] = (-x)^rF(r)$$

para todo $x < 0$, onde $F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta$. Conclua que, se $r_1 \neq r_2$ são raízes de $F(r)$, então as soluções linearmente independentes de $L[y] = 0$ para $x < 0$ são $(-x)^{r_1}$ e $(-x)^{r_2}$.

31. Suponha que $(-x)^{r_1}$ e $(-x)^{r_2}$ são soluções de uma equação de Euler para $x > 0$, onde $r_1 \neq r_2$ e r_1 é inteiro. De acordo com a Eq. (24), a solução geral em qualquer intervalo não contendo a origem é $y = c_1 |x|^{r_1} + c_2 |x|^{r_2}$. Mostre que a solução geral também pode ser escrita como $y = k_1 |x|^{r_1} + k_2 |x|^{r_2}$.
Sugestão: Através de uma escolha apropriada de constantes, mostre que as duas expressões são idênticas para $x > 0$ e que, por uma escolha diferente de constantes, elas são idênticas para $x < 0$.

5.6 Soluções em Série na Vizinhança de um Ponto Singular Regular, Parte I

Vamos considerar, agora, o problema de resolver a equação linear de segunda ordem geral

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{1}$$

em uma vizinhança de um ponto singular regular $x = x_0$. Vamos supor, por conveniência, que $x_0 = 0$. Se $x_0 \neq 0$, podemos transformar a equação em uma equação para a qual o ponto singular regular está na origem fazendo-se $x - x_0$ igual a t.

O fato de que $x = 0$ é um ponto singular regular da Eq. (1) significa que $xQ(x)/P(x) = xp(x)$ e $x^2R(x)/P(x) = x^2q(x)$ têm limites finitos quando $x \to 0$ e são analíticas em $x = 0$. Logo, têm expansão em séries de potências convergentes da forma

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \tag{2}$$

em algum intervalo $|x| < \rho$ em torno da origem, onde $\rho > 0$. Para fazer com que as funções $xp(x)$ e $x^2q(x)$ apareçam na Eq. (1), é conveniente dividi-la por $P(x)$ e depois multiplicá-la por x^2, obtendo-se

$$x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0, \tag{3}$$

ou

$$x^2y'' + x(p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n + \cdots)y' + (q_0 + q_1x + \cdots + q_nx^n + \cdots)y = 0. \tag{4}$$

Se todos os coeficientes p_n e q_n são nulos, com a possível exceção de

$$p_0 = \lim_{x\to 0} \frac{xQ(x)}{P(x)} \quad \text{e} \quad q_0 = \lim_{x\to 0} \frac{x^2R(x)}{P(x)}, \tag{5}$$

então a Eq. (4) se reduz à equação de Euler

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0, \tag{6}$$

que foi discutida na seção precedente. É claro que, em geral, alguns dos p_n e q_n, $n \geq 1$, não são nulos. Entretanto, o caráter essencial das soluções da Eq. (4) é idêntico ao das soluções da equação de Euler (6). A presença dos termos $p_1x + \ldots + p_nx^n + \ldots$ e $q_1x + \ldots + q_nx^n + \ldots$ só complica os cálculos.

Vamos restringir nossa discussão principalmente ao intervalo $x > 0$. O intervalo $x < 0$ pode ser tratado, como para a equação de Euler, pela mudança de variável $x = -\xi$ e posterior resolução da equação resultante para $\xi > 0$.

Como os coeficientes da Eq. (4) são "coeficientes de Euler" vezes série de potências, é natural procurar soluções da forma "soluções de Euler" vezes série de potências. Supomos, então, que

$$y = x^r(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots) = x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{r+n}, \tag{7}$$

onde $a_0 \neq 0$. Em outras palavras, r é o expoente do primeiro termo da série e a_0 é seu coeficiente. Como parte da solução, temos que determinar:

1. Os valores de r para os quais a Eq. (1) tem uma solução da forma (7).
2. A relação de recorrência para os coeficientes a_n.
3. O raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$.

A teoria geral foi construída por Frobenius[12] e é razoavelmente complicada. Em vez de tentar apresentar essa teoria, vamos supor, simplesmente, nesta e nas duas próximas seções, que existe uma solução da forma especificada. Em particular, vamos supor que qualquer série de potências em uma expressão para a solução tenha raio de convergência não-nulo e vamos nos concentrar em mostrar como determinar os coeficientes nessa série. Para ilustrar o método de Frobenius, vamos considerar primeiro um exemplo.

Exemplo 1

Resolva a equação diferencial

$$2x^2y'' - xy' + (1 + x)y = 0. \tag{8}$$

É fácil mostrar que $x = 0$ é um ponto singular regular da Eq. (8). Além disso, $xp(x) = -1/2$ e $x^2q(x) = (1 + x)/2$. Assim, $p_0 = -1/2$, $q_0 = 1/2$, $q_1 = 1/2$ e todos os outros p's e q's são nulos. Então, da Eq. (6), a equação de Euler correspondente à Eq. (8) é

$$2x^2y'' - xy' + y = 0. \tag{9}$$

Para resolver a Eq. (8), vamos supor que existe uma solução da forma (7). Logo, y' e y'' são dados por

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r + n)x^{r+n-1} \tag{10}$$

e

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r + n)(r + n - 1)x^{r+n-2}. \tag{11}$$

Substituindo as expressões para y, y' e y'' na Eq. (8), obtemos

$$2x^2y'' - xy' + (1 + x)y = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(r + n)(r + n - 1)x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r + n)x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{r+n+1}. \tag{12}$$

[12]Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) foi (como Fuchs) estudante e depois professor na Universidade de Berlim. Mostrou como construir soluções em série em torno de pontos singulares regulares em 1874. Seu trabalho mais importante, no entanto, foi em álgebra, tornando-se um dos expoentes entre os primeiros a desenvolver a teoria dos grupos.

O último termo na Eq. (12) pode ser escrito como $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{r+n}$, de modo que, combinando os termos na Eq. (12), obtemos

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = a_0[2r(r-1) - r + 1]x^r$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\{[2(r+n)(r+n-1) - (r+n) + 1]a_n$$
$$+ a_{n-1}\}x^{r+n} = 0. \qquad (13)$$

Como a Eq. (13) tem de ser satisfeita para todos os valores de x, o coeficiente de cada potência de x tem de ser zero. Do coeficiente de x^r, como $a_0 \neq 0$, temos

$$2r(r-1) - r + 1 = 2r^2 - 3r + 1 = (r-1)(2r-1) = 0. \qquad (14)$$

A Eq. (14) é chamada de **equação indicial** para a Eq. (8). Note que ela é exatamente a equação polinomial que obteríamos para a equação de Euler (9) associada à Eq. (8). As raízes da equação indicial são

$$r_1 = 1, \qquad r_2 = 1/2. \qquad (15)$$

Esses valores de r são chamados de **expoentes na singularidade** para o ponto singular regular $x = 0$. Eles determinam o comportamento qualitativo da solução (7) na vizinhança do ponto singular.

Vamos voltar, agora, para a Eq. (13) e igualar o coeficiente de x^{r+n} a zero. Isso nos fornece a relação

$$[2(r+n)(r+n-1) - (r+n) + 1]a_n + a_{n-1} = 0 \qquad (16)$$

ou

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2(r+n)^2 - 3(r+n) + 1}$$
$$= -\frac{a_{n-1}}{[(r+n)-1][2(r+n)-1]}, \qquad n \geq 1. \qquad (17)$$

Para cada raiz r_1 e r_2 da equação indicial, usamos a relação de recorrência (17) para determinar um conjunto de coeficientes a_1, a_2, ... Para $r = r_1 = 1$, a Eq. (17) fica

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(2n+1)n}, \qquad n \geq 1.$$

Logo,

$$a_1 = -\frac{a_0}{3 \cdot 1},$$
$$a_2 = -\frac{a_1}{5 \cdot 2} = \frac{a_0}{(3 \cdot 5)(1 \cdot 2)},$$

e

$$a_3 = -\frac{a_2}{7 \cdot 3} = -\frac{a_0}{(3 \cdot 5 \cdot 7)(1 \cdot 2 \cdot 3)}.$$

Em geral, temos

$$a_n = \frac{(-1)^n}{[3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)]n!}a_0, \qquad n \geq 1. \qquad (18)$$

Multiplicando o numerador e o denominador da fração à direita do sinal de igualdade na Eq. (18) por $2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n = 2^n n!$, podemos reescrever a_n na forma

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!}a_0, \qquad n \geqslant 1.$$

Portanto, se omitirmos a constante multiplicadora a_0, uma solução da Eq. (8) é

$$y_1(x) = x\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!}x^n\right], \qquad x > 0. \qquad (19)$$

Para determinar o raio de convergência da série na Eq. (19), usamos o teste da razão:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2|x|}{(2n+2)(2n+3)} = 0$$

para todo x. Logo, a série converge para todo x.

Vamos proceder de modo análogo para a segunda raiz $r = r_2 = \frac{1}{2}$. Da Eq. (17), temos

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2n(n-\frac{1}{2})} = -\frac{a_{n-1}}{n(2n-1)}, \qquad n \geq 1.$$

Portanto,

$$a_1 = -\frac{a_0}{1 \cdot 1},$$
$$a_2 = -\frac{a_1}{2 \cdot 3} = \frac{a_0}{(1 \cdot 2)(1 \cdot 3)},$$
$$a_3 = -\frac{a_2}{3 \cdot 5} = -\frac{a_0}{(1 \cdot 2 \cdot 3)(1 \cdot 3 \cdot 5)},$$

e, em geral,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n![1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)]}a_0, \qquad n \geq 4. \qquad (20)$$

Como no caso da primeira raiz r_1, multiplicamos o numerador e o denominador por $2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n = 2^n n!$. Temos, então,

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!}a_0, \qquad n \geqslant 1.$$

Omitindo novamente o multiplicador constante a_0, obtemos a segunda solução

$$y_2(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!}x^n\right], \qquad x > 0. \qquad (21)$$

Como anteriormente, podemos mostrar que a série na Eq. (21) converge para todo x. Como os termos iniciais nas soluções em série y_1 e y_2 são x e $x^{1/2}$, respectivamente, segue que as soluções são linearmente independentes. Logo, a solução geral da Eq. (8) é

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \qquad x > 0.$$

O exemplo precedente ilustra o fato de que, se $x = 0$ é um ponto singular regular, então, algumas vezes, existem duas soluções linearmente independentes da forma (7) em uma vizinhança desse ponto. Analogamente, se existir um ponto singular regular em $x = x_0$, podem existir duas soluções linearmente independentes da forma

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{22}$$

que são válidas perto de $x = x_0$. No entanto, assim como uma equação de Euler pode não ter duas soluções da forma $y = x^r$, uma equação mais geral com um ponto singular regular pode não ter duas soluções da forma (7) ou (22). Em particular, vamos mostrar na próxima seção que, se as raízes r_1 e r_2 da equação indicial são iguais ou diferem por um inteiro, então a segunda solução, normalmente, tem uma estrutura mais complicada. Em todos os casos, no entanto, é possível encontrar pelo menos uma solução da forma (7) ou (22); se r_1 e r_2 diferem por um inteiro, essa solução corresponde ao maior valor de r. Se existir apenas uma dessas soluções, então a segunda solução envolve um termo logarítmico, como no caso da equação de Euler quando as raízes da equação característica são iguais. O método de redução de ordem, ou algum outro procedimento, pode ser usado para se determinar a segunda solução nesse caso. Isso será discutido nas Seções 5.7 e 5.8.

Se as raízes da equação indicial forem complexas, então elas não podem ser iguais nem diferirem por um inteiro, de modo que sempre existem duas soluções linearmente independentes da forma (7) ou (22). É claro que essas soluções são complexas. No entanto, como para a equação de Euler, é possível obter soluções reais tomando-se as partes real e imaginária das soluções complexas.

Finalmente, vamos mencionar uma questão prática. Se P, Q e R são polinômios, é bem melhor, muitas vezes, trabalhar diretamente com a Eq. (1) do que com a Eq. (3). Isso evita a necessidade de expandir $xQ(x)/P(x)$ e $x^2R(x)/P(x)$ em séries de potências. Por exemplo, é mais conveniente considerar a equação

$$x(1 + x)y'' + 2y' + xy = 0$$

do que escrevê-la na forma

$$x^2y'' + \frac{2x}{1+x}y' + \frac{x^2}{1+x}y = 0,$$

o que implicaria ter de expandir $2x/(1 + x)$ e $x^2/(1 + x)$ em séries de potências.

Problemas

Nos problemas de 1 a 10, mostre que a equação diferencial dada tem um ponto singular regular em $x = 0$. Determine a equação indicial, a relação de recorrência e as raízes da equação indicial. Encontre a solução em série ($x > 0$) correspondente à maior raiz. Se as raízes forem diferentes e não diferirem por um inteiro, encontre também a solução em série correspondente à menor raiz.

1. $2xy'' + y' + xy = 0$
2. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{9})y = 0$
3. $xy'' + y = 0$
4. $xy'' + y' - y = 0$
5. $3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0$
6. $x^2y'' + xy' + (x - 2)y = 0$
7. $xy'' + (1 - x)y' - y = 0$
8. $2x^2y'' + 3xy' + (2x^2 - 1)y = 0$
9. $x^2y'' - x(x + 3)y' + (x + 3)y = 0$
10. $x^2y'' + (x^2 + \frac{1}{4})y = 0$
11. A equação de Legendre de ordem α é
$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0.$$
A solução dessa equação perto do ponto ordinário $x = 0$ foi discutida nos Problemas 22 e 23 da Seção 5.3. No Exemplo 6 da Seção 5.4, mostramos que $x = \pm 1$ são pontos singulares regulares. Determine a equação indicial e suas raízes para o ponto $x = 1$. Encontre uma solução em série de potências de $x - 1$ para $x - 1 > 0$. *Sugestão*: Escreva $1 + x = 2 + (x - 1)$ e $x = 1 + (x - 1)$. Uma outra maneira é fazer a mudança de variável $x - 1 = t$ e determinar uma solução em série de potências de t.
12. A equação de Chebyshev é
$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0,$$
onde α é constante; veja o Problema 10 da Seção 5.3.
(a) Mostre que $x = 1$ e $x = -1$ são pontos singulares regulares e encontre os expoentes em cada uma dessas singularidades.
(b) Encontre duas soluções linearmente independentes em torno de $x = 1$.
13. A equação diferencial de Laguerre[13] é
$$xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0.$$
Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular. Determine a equação indicial, suas raízes, a relação de recorrência e uma solução ($x > 0$). Mostre que, se $\lambda = m$ é um inteiro positivo, essa solução se reduz a um polinômio. Quando normalizado apropriadamente, esse polinômio é conhecido como polinômio de Laguerre $L_m(x)$.
14. A equação de Bessel de ordem zero é
$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0.$$
Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular; que as raízes da equação indicial são $r_1 = r_2 = 0$; e que uma solução para $x > 0$ é
$$J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$
Mostre que a série converge para todo x. A função J_0 é conhecida como a função de Bessel de primeira espécie de ordem zero.
15. Com referência ao Problema 14, use o método de redução de ordem para mostrar que a segunda solução da equação de Bessel de ordem zero contém um termo logarítmico. *Sugestão*: Se $y_2(x) = J_0(x)v(x)$, então
$$y_2(x) = J_0(x)\int \frac{dx}{x[J_0(x)]^2}.$$
Encontre o primeiro termo na expansão em série de $1/x[J_0(x)]^2$.
16. A equação de Bessel de ordem 1 é
$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0.$$
(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular; que as raízes da equação indicial são $r_1 = 1$ e $r_2 = -1$; e que uma solução para $x > 0$ é
$$J_1(x) = \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n+1)!\,n!\,2^{2n}}.$$
Mostre que a série converge para todo x. A função J_1 é conhecida como a função de Bessel de primeira espécie de ordem um.
(b) Mostre que é impossível determinar uma segunda solução da forma
$$x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad x > 0.$$

[13] Edmond Nicolas Laguerre (1834-1886), um geômetra e analista francês, estudou os polinômios que levam seu nome em torno de 1879.

5.7 Soluções em Série na Vizinhança de um Ponto Singular Regular, Parte II

Vamos considerar, agora, o problema geral de determinar uma solução da equação

$$L[y] = x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0, \quad (1)$$

onde

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad (2)$$

e ambas as séries convergem em um intervalo $|x| < \rho$ para algum $\rho > 0$. O ponto $x = 0$ é um ponto singular regular e a equação de Euler correspondente é

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0. \quad (3)$$

Procuramos uma solução da Eq. (1) para $x > 0$ e supomos que ela tem a forma

$$y = \phi(r, x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \quad (4)$$

onde $a_0 \neq 0$ e escrevemos $y = \phi(r, x)$ para enfatizar que ϕ depende tanto de r quanto de x. Segue que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_n x^{r+n-1},$$
$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n-2}. \quad (5)$$

Então, substituindo as Eqs. (2), (4) e (5) na Eq. (1), obtemos

$$\begin{aligned} a_0r(r-1)x^r &+ a_1(r+1)rx^{r+1} + \cdots + a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} + \cdots \\ &+ (p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n + \cdots) \\ &\times [a_0rx^r + a_1(r+1)x^{r+1} + \cdots + a_n(r+n)x^{r+n} + \cdots] \\ &+ (q_0 + q_1x + \cdots + q_nx^n + \cdots) \\ &\times (a_0x^r + a_1x^{r+1} + \cdots + a_nx^{r+n} + \cdots) = 0. \end{aligned}$$

Multiplicando as séries infinitas e depois juntando os termos semelhantes, temos

$$\begin{aligned} a_0F(r)x^r &+ [a_1F(r+1) + a_0(p_1r + q_1)]x^{r+1} \\ &+ \{a_2F(r+2) + a_0(p_2r + q_2) + a_1[p_1(r+1) + q_1]\}x^{r+2} \\ &+ \cdots + \{a_nF(r+n) + a_0(p_nr + q_n) + a_1[p_{n-1}(r+1) + q_{n-1}] \\ &+ \cdots + a_{n-1}[p_1(r+n-1) + q_1]\}x^{r+n} + \cdots = 0, \end{aligned}$$

ou, em forma mais compacta,

$$\begin{aligned} L[\phi](r, x) &= a_0F(r)x^r \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}] \right\} x^{r+n} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

onde

$$F(r) = r(r-1) + p_0r + q_0. \quad (7)$$

Para que a Eq. (6) seja satisfeita identicamente, o coeficiente de cada potência de x tem de ser igual a zero.

Como $a_0 \neq 0$, o termo envolvendo x^r leva à equação $F(r) = 0$. Essa equação é chamada de **equação indicial**; note que é exatamente a equação que obteríamos procurando por soluções da forma $y = x^r$ da equação de Euler (3). Vamos denotar as raízes da equação indicial por r_1 e r_2, com $r_1 \geq r_2$ se as raízes forem reais. Se as raízes forem complexas, não importa sua designação. Só podemos esperar encontrar soluções da Eq. (1) da forma (4) para esses valores de r. As raízes r_1 e r_2 são chamadas de **expoentes na singularidade**; elas determinam a natureza qualitativa das soluções em uma vizinhança do ponto singular.

Igualando a zero o coeficiente de x^{r+n} na Eq. (6), obtemos a **relação de recorrência**

$$F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}] = 0, \quad n \geq 1. \quad (8)$$

A Eq. (8) mostra que, em geral, a_n depende do valor de r e de todos os coeficientes anteriores $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Mostra, também, que podemos calcular sucessivamente os valores de $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ em função de a_0 e dos coeficientes das séries para $xp(x)$ e para $x^2q(x)$, desde que $F(r+1), F(r+2), \ldots, F(r+n), \ldots$ não sejam nulos. Os únicos valores de r para os quais $F(r) = 0$ são $r = r_1$ e $r = r_2$; como $r_1 \geq r_2$, segue que $r_1 + n$ não é igual a r_1 nem a r_2 se $n \geq 1$. Em conseqüência, $F(r_1 + n) \neq 0$ para $n \geq 1$. Logo, sempre podemos determinar uma solução da Eq. (1) da forma (4), a saber,

$$y_1(x) = x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right], \qquad x > 0. \quad (9)$$

Introduzimos a notação $a_n(r_1)$ para indicar que a_n foi determinado da Eq. (8) com $r = r_1$. Para especificar a constante arbitrária na solução, escolhemos a_0 como sendo 1.

Se r_2 não for igual a r_1 e se $r_1 - r_2$ não for um inteiro positivo, então $r_2 + n$ é diferente de r_1 para todo $n \geq 1$; portanto, $F(r_2 + n) \neq 0$ e sempre podemos obter uma segunda solução

$$y_2(x) = x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\right], \qquad x > 0. \quad (10)$$

Da mesma forma que para as soluções em série em torno de um ponto ordinário discutidas na Seção 5.3, as séries nas Eqs. (9) e (10) convergem pelo menos no intervalo $|x| < \rho$ onde ambas as séries para $xp(x)$ e $x^2q(x)$ convergem. Dentro de seus raios de convergência, as séries de potências $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n$ e $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n$ definem funções analíticas em $x = 0$. Assim, o comportamento singular, se existir, das funções y_1 e y_2 é devido aos fatores x^{r_1} e x^{r_2} que multiplicam essas duas funções analíticas. A seguir, para obter soluções reais para $x < 0$, podemos fazer a substituição $x = -\xi$ com $\xi > 0$. Como poderíamos esperar da nossa discussão sobre a equação de Euler, basta substituir x^{r_1} na Eq. (9) e x^{r_2} na Eq. (10) por $|x|^{r_1}$ e $|x|^{r_2}$, respectivamente. Finalmente, note que, se r_1 e r_2 são números complexos, então são, necessariamente, complexos conjugados e $r_2 \neq r_1 + n$. Assim, nesse caso, sempre podemos encontrar duas soluções em série linearmente independentes da forma (4); no entanto, elas são funções complexas de x. Soluções reais podem ser obtidas tomando-se as partes real e imaginária das soluções complexas. Os casos excepcionais em que $r_1 = r_2$ ou $r_1 - r_2 = n$, onde n é um inteiro positivo, necessitam de uma discussão maior e serão considerados adiante nesta seção.

É importante compreender que r_1 e r_2, os expoentes no ponto singular, são fáceis de encontrar e que determinam o comportamento qualitativo das soluções. Para calcular r_1 e r_2, basta resolver a equação indicial, que é de segundo grau,

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0, \quad (11)$$

cujos coeficientes são dados por

$$p_0 = \lim_{x \to 0} xp(x), \qquad q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 q(x). \quad (12)$$

Note que esses são exatamente os limites que precisam ser calculados para se classificar o ponto singular como ponto singular regular; assim, em geral, eles já foram determinados em um estágio anterior da investigação.

Além disso, se $x = 0$ é um ponto singular regular da equação

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \quad (13)$$

onde as funções P, Q e R são polinomiais, então $xp(x) = xQ(x)/P(x)$ e $x^2q(x) = x^2R(x)/P(x)$. Então,

$$p_0 = \lim_{x \to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)}, \qquad q_0 = \lim_{x \to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)}. \quad (14)$$

Finalmente, os raios de convergência das séries nas Eqs. (9) e (10) são, pelo menos, iguais à distância da origem ao zero mais próximo de $P(x)$, fora o próprio $x = 0$.

Exemplo 1

Discuta a natureza das soluções da equação

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$$

perto dos pontos singulares.

Essa equação é da forma (13) com $P(x) = 2x(1+x)$, $Q(x) = 3 + x$ e $R(x) = -x$. Os pontos $x = 0$ e $x = -1$ são os únicos pontos singulares. O ponto $x = 0$ é um ponto singular regular, já que

$$\lim_{x \to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \to 0} x\frac{3+x}{2x(1+x)} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{x \to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \to 0} x^2\frac{-x}{2x(1+x)} = 0.$$

Além disso, da Eq. (14), $p_0 = 3/2$ e $q_0 = 0$. Logo, a equação indicial é $r(r-1) + (3/2)r = 0$ e as raízes são $r_1 = 0$, $r_2 = -1/2$. Como essas raízes não são iguais nem diferem por um inteiro, existem duas soluções linearmente independentes da forma

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)x^n \quad \text{e} \quad y_2(x) = |x|^{-1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(-\tfrac{1}{2})x^n\right]$$

para $0 < |x| < \rho$. Uma cota inferior para o raio de convergência de cada série é 1, a distância de $x = 0$ a $x = -1$, o outro zero de $P(x)$. Note que a solução $y_1(x)$ permanece limitada quando $x \to 0$, é, de fato, analítica aí, e que a segunda solução y_2 torna-se ilimitada quando $x \to 0$.

O ponto $x = -1$ também é um ponto singular regular, pois

$$\lim_{x \to -1} (x+1)\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(3+x)}{2x(1+x)} = -1,$$

$$\lim_{x \to -1} (x+1)^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)^2(-x)}{2x(1+x)} = 0.$$

Nesse caso, $p_0 = -1$, $q_0 = 0$, de modo que a equação indicial é $r(r-1) - r = 0$. As raízes da equação indicial são $r_1 = 2$ e $r_2 = 0$. Correspondendo à maior raiz, temos uma solução da forma

$$y_1(x) = (x+1)^2\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(2)(x+1)^n\right].$$

A série converge pelo menos para $|x+1| < 1$ e y_1 é uma função analítica aí. Como as duas raízes diferem por um inteiro positivo, pode existir ou não uma segunda solução da forma

$$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)(x+1)^n.$$

Não podemos dizer mais nada sem uma análise mais profunda.

Note que não foram necessários cálculos complicados para se descobrir informações sobre as soluções apresentadas neste exemplo. Só precisamos calcular alguns limites e resolver duas equações de segundo grau.

Vamos considerar agora os casos nos quais a equação indicial tem raízes iguais ou que diferem por um inteiro positivo, $r_1 - r_2 = N$. Como mostramos anteriormente, sempre existe uma solução da forma (9) correspondente à maior raiz r_1 da equação indicial. Por analogia com a equação de Euler, poderíamos esperar que, se $r_1 = r_2$, então a segunda solução contém um termo logarítmico. Isso também pode ser verdade se as raízes diferirem por um inteiro positivo.

Raízes Iguais. O método de encontrar a segunda solução é, essencialmente, o mesmo que usamos para encontrar a segunda solução da equação de Euler (veja a Seção 5.5) quando as raízes da equação indicial eram iguais. Vamos considerar r como uma variável contínua e determinar a_n em função de r resolvendo a relação de recorrência (8). Para essa escolha de $a_n(r)$ para $n \geq 1$, a Eq. (6) se reduz a

$$L[\phi](r, x) = a_0 F(r)x^r = a_0(r - r_1)^2 x^r, \quad (15)$$

já que r_1 é uma raiz repetida de $F(r)$. Fazendo $r = r_1$ na Eq. (15), encontramos que $L[\phi](r_1, x) = 0$; logo, como já sabíamos, $y_1(x)$ dado pela Eq. (9) é uma solução da Eq. (1). Mas, mais importante, da mesma forma que para a equação de Euler, segue, também, da Eq. (15) que

$$L\left[\frac{\partial \phi}{\partial r}\right](r_1, x) = a_0 \frac{\partial}{\partial r}[x^r(r - r_1)^2]\Big|_{r=r_1}$$
$$= a_0[(r - r_1)^2 x^r \ln x$$
$$+ 2(r - r_1)x^r]\Big|_{r=r_1} = 0. \quad (16)$$

Portanto, uma segunda solução da Eq. (1) é

$$y_2(x) = \frac{\partial \phi(r,x)}{\partial r}\bigg|_{r=r_1} = \frac{\partial}{\partial r}\left\{x^r\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)x^n\right]\right\}\bigg|_{r=r_1}$$

$$= (x^{r_1}\ln x)\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right] + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)x^n$$

$$= y_1(x)\ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)x^n, \qquad x > 0, \qquad (17)$$

onde $a_n'(r_1)$ denota da_n/dr calculado em $r = r_1$.

Pode acontecer de ser difícil determinar $a_n(r)$ como função de r a partir da relação de recorrência (8) e depois diferenciar a expressão resultante em relação a r. Um outro modo é, simplesmente, supor que y tem a *forma* da Eq. (17), isto é, supor que

$$y = y_1(x)\ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, \qquad x > 0, \qquad (18)$$

onde $y_1(x)$ já foi encontrado. Os coeficientes b_n são calculados, como de hábito, substituindo na equação diferencial, juntando os termos correspondentes e igualando os coeficientes de cada potência de x a zero. Uma terceira possibilidade é usar o método de redução de ordem para encontrar $y_2(x)$ uma vez conhecido $y_1(x)$.

Raízes Diferindo por um Inteiro. Nesse caso, a dedução da segunda solução é bem mais complicada e não será dada aqui. A forma dessa solução é dada pela Eq. (24) no próximo teorema. Os coeficientes $c_n(r_2)$ na Eq. (24) são dados por

$$c_n(r_2) = \frac{d}{dr}[(r - r_2)a_n(r)]\bigg|_{r=r_2}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad (19)$$

onde $a_n(r)$ é determinada da relação de recorrência (8) com $a_0 = 1$. Além disso, o coeficiente de a na Eq. (24) é

$$a = \lim_{r \to r_2}(r - r_2)a_N(r). \qquad (20)$$

Se $a_N(r_2)$ for finito, então $a = 0$ e y_2 não tem termo logarítmico. Uma dedução completa das fórmulas (19) e (20) pode ser encontrada no livro de Coddington (Cap. 4).

Na prática, a melhor maneira de determinar se $a = 0$ na segunda solução é tentar, simplesmente, calcular os a_n correspondentes à raiz r_2 e ver se é possível determinar $a_N(r_2)$. Se for, não há problema. Se não, precisamos usar a forma (24) com $a \neq 0$.

Quando $r_1 - r_2 = N$, existem, novamente, três maneiras de se encontrar uma segunda solução. Primeiro, calculamos a e $c_n(r_2)$ diretamente, substituindo y pela expressão (24) na Eq. (1). Segundo, calculamos $c_n(r_2)$ e a da Eq. (24) usando as fórmulas (19) e (20). Se esse for o procedimento planejado, ao calcular a solução correspondente a $r = r_1$, não esqueça de obter a fórmula geral para $a_n(r)$, em vez de encontrar apenas $a_n(r_1)$. A terceira maneira é usar o método de redução de ordem.

Teorema 5.7.1

Considere a equação diferencial (1),

$$x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0,$$

onde $x = 0$ é um ponto singular regular. Então, $xp(x)$ e $x^2q(x)$ são analíticas em $x = 0$ com expansão em séries de potências convergentes

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

para $|x| < \rho$, onde $\rho > 0$ é o mínimo entre os raios de convergência das séries de potências para $xp(x)$ e $x^2q(x)$. Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação indicial

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0,$$

com $r_1 \geq r_2$, se r_1 e r_2 forem reais. Então, no intervalo $-\rho < x < 0$ ou no intervalo $0 < x < \rho$, existe uma solução da forma

$$y_1(x) = |x|^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right], \qquad (21)$$

onde os $a_n(r_1)$ são dados pela relação de recorrência (8) com $a_0 = 1$ e $r = r_1$.

Se $r_1 - r_2$ não é zero nem um inteiro positivo, então, no intervalo $-\rho < x < 0$ ou no intervalo $0 < x < \rho$, existe uma segunda solução linearmente independente da forma

$$y_2(x) = |x|^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\right]. \qquad (22)$$

Os $a_n(r_2)$ também são determinados pela relação de recorrência (8), com $a_0 = 1$ e $r = r_2$. As séries de potências nas Eqs. (21) e (22) convergem, pelo menos, para $|x| < \rho$.

Se $r_1 = r_2$, então a segunda solução é

$$y_2(x) = y_1(x)\ln|x| + |x|^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1)x^n. \qquad (23)$$

Se $r_1 - r_2 = N$, um inteiro positivo, então

$$y_2(x) = ay_1(x)\ln|x| + |x|^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2)x^n\right]. \qquad (24)$$

Os coeficientes $a_n(r_1)$, $b_n(r_1)$, $c_n(r_2)$ e a constante a podem ser determinados substituindo-se a forma da solução em série y na Eq. (1). A constante a pode ser nula, caso em que a solução (24) não tem termo logarítmico. Cada uma das séries nas Eqs. (23) e (24) converge, pelo menos, para $|x| < \rho$ e define uma função analítica em alguma vizinhança de $x = 0$.

Problemas

Nos problemas de 1 a 12, encontre todos os pontos singulares regulares da equação diferencial dada. Determine a equação indicial e os expoentes na singularidade para cada ponto singular regular.

1. $xy'' + 2xy' + 6e^x y = 0$
2. $x^2y'' - x(2 + x)y' + (2 + x^2)y = 0$
3. $x(x-1)y'' + 6x^2y' + 3y = 0$
4. $y'' + 4xy' + 6y = 0$
5. $x^2y'' + 3(\operatorname{sen} x)y' - 2y = 0$
6. $2x(x+2)y'' + y' - xy = 0$
7. $x^2y'' + \frac{1}{2}(x + \operatorname{sen} x)y' + y = 0$
8. $(x+1)^2y'' + 3(x^2 - 1)y' + 3y = 0$

9. $x^2(1-x)y'' - (1+x)y' + 2xy = 0$
10. $(x-2)^2(x+2)y'' + 2xy' + 3(x-2)y = 0$
11. $(4-x^2)y'' + 2xy' + 3y = 0$
12. $x(x+3)^2y'' - 2(x+3)y' - xy = 0$

Nos problemas de 13 a 17:
(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular da equação diferencial dada.
(b) Encontre os expoentes no ponto singular $x = 0$.
(c) Encontre os três primeiros termos não-nulos em cada uma das duas soluções linearmente independentes em torno de $x = 0$.

13. $xy'' + y' - y = 0$
14. $xy'' + 2xy' + 6e^xy = 0$; veja o Problema 1
15. $x(x-1)y'' + 6x^2y' + 3y = 0$; veja o Problema 3
16. $xy'' + y = 0$
17. $x^2y'' + (\operatorname{sen} x)y' - (\cos x)y = 0$
18. Mostre que
$$(\ln x)y'' + \tfrac{1}{2}y' + y = 0$$
tem um ponto singular regular em $x = 1$. Determine as raízes da equação indicial em $x = 1$. Determine os três primeiros termos não-nulos na série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{r+n}$ correspondente à raiz maior. Tome $x - 1 > 0$. Qual o valor que você esperaria para o raio de convergência da série?
19. Em diversos problemas em física matemática é necessário estudar a equação diferencial
$$x(1-x)y'' + [\gamma - (1+\alpha+\beta)x]y' - \alpha\beta y = 0, \qquad \text{(i)}$$
onde α, β e γ são constantes. Essa equação é conhecida como **equação hipergeométrica**.
(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular e que as raízes da equação indicial são 0 e $1-\gamma$.
(b) Mostre que $x = 1$ é um ponto singular regular e que as raízes da equação indicial são 0 e $\gamma - \alpha - \beta$.
(c) Supondo que $1 - \gamma$ não é um inteiro positivo, mostre que uma solução de (i) em uma vizinhança de $x = 0$ é
$$y_1(x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma \cdot 1!}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2!}x^2 + \cdots.$$
Qual o valor que você esperaria para o raio de convergência dessa série?
(d) Supondo que $1 - \gamma$ não é inteiro, mostre que uma segunda solução para $0 < x < 1$ é
$$y_2(x) = x^{1-\gamma}\left[1 + \frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{(2-\gamma)1!}x + \frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)}{(2-\gamma)(3-\gamma)2!}x^2 + \cdots\right].$$
(e) Mostre que o ponto no infinito é um ponto singular regular e que as raízes da equação indicial são α e β. Veja o Problema 21 da Seção 5.4.
20. Considere a equação diferencial
$$x^3y'' + \alpha xy' + \beta y = 0,$$
onde α e β são constantes reais e $\alpha \neq 0$.
(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular irregular.
(b) Ao tentar encontrar uma solução da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$, mostre que a equação indicial para r é linear e que, portanto, existe apenas uma solução formal dessa forma.
(c) Mostre que, se $\beta/\alpha = -1, 0, 1, 2, \ldots$, então a solução formal em série termina e é, portanto, uma solução de fato. Para os outros valores de β/α, mostre que a solução formal em série tem raio de convergência nulo, logo não representa uma solução de fato em nenhum intervalo.
21. Considere a equação diferencial
$$y'' + \frac{\alpha}{x^s}y' + \frac{\beta}{x^t}y = 0, \qquad \text{(i)}$$
onde $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$ são números reais, e s e t são inteiros positivos arbitrários no momento.
(a) Mostre que, se $s > 1$ ou $t > 2$, então o ponto $x = 0$ é um ponto singular irregular.
(b) Tente encontrar uma solução da Eq. (i) da forma
$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \qquad x > 0. \qquad \text{(ii)}$$
Mostre que, se $s = 1$ e $t = 2$, então existe apenas um valor possível para r para o qual existe uma solução formal da Eq. (i) da forma (ii).
(c) Mostre que, se $s = 1$ e $t = 3$, então não existem soluções da Eq. (i) da forma (ii).
(d) Mostre que os valores máximos de s e de t para os quais a equação indicial é de segundo grau em r [e, portanto, podemos esperar encontrar duas soluções da forma (ii)] são $s = 1$ e $t = 2$. Essas são precisamente as condições que distinguem uma "singularidade fraca", ou um ponto singular regular, de um ponto singular irregular, como definimos na Seção 5.4.

Como aviso, observamos que, embora seja possível, algumas vezes, obter uma solução formal em série da forma (ii) em um ponto singular irregular, a série pode não ter raio de convergência positivo. Veja o Problema 20 para exemplo.

5.8 Equação de Bessel

Nesta seção vamos considerar três casos especiais da equação de Bessel,[14]
$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \qquad (1)$$
onde ν é uma constante, que ilustra a teoria discutida na Seção 5.7. É fácil mostrar que $x = 0$ é um ponto singular regular. Por simplicidade, vamos considerar apenas o caso $x > 0$.

Equação de Bessel de Ordem Zero. Esse exemplo ilustra a situação na qual as raízes da equação indicial são iguais. Fazendo $\nu = 0$ na Eq. (1), obtemos
$$L[y] = x^2y'' + xy' + x^2y = 0. \qquad (2)$$
Substituindo
$$y = \phi(r, x) = a_0x^r + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{r+n}, \qquad (3)$$
obtemos
$$\begin{aligned} L[\phi](r,x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n[(r+n)(r+n-1) + (r+n)]x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} \\ &= a_0[r(r-1) + r]x^r + a_1[(r+1)r + (r+1)]x^{r+1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty}\{a_n[(r+n)(r+n-1) + (r+n)] + a_{n-2}\}x^{r+n} = 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

[14]Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) começou uma carreira em negócios quando jovem, mas interessou-se logo por astronomia e matemática. Foi designado diretor do observatório em Königsberg em 1810 e manteve essa posição até sua morte. Seu estudo de perturbações planetárias levou-o, em 1824, a fazer a primeira análise sistemática das soluções, conhecidas como funções de Bessel, da Eq. (1). É famoso, também, por fazer o primeiro cálculo preciso (1838) da distância da Terra a uma estrela.

As raízes da equação indicial $F(r) = r(r-1) + r = 0$ são $r_1 = 0$ e $r_2 = 0$, logo temos o caso de raízes iguais. A relação de recorrência é

$$a_n(r) = -\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)(r+n-1)+(r+n)}$$
$$= -\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)^2}, \quad n \geq 2. \tag{5}$$

Para determinar $y_1(x)$, fazemos r igual a 0. Então, da Eq. (4) segue que, para que o coeficiente de x^{r+1} seja zero, temos que escolher $a_1 = 0$. Portanto, da Eq. (5), $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = 0$. Além disso,

$$a_n(0) = -a_{n-2}(0)/n^2, \qquad n = 2, 4, 6, 8, \ldots,$$

ou, fazendo $n = 2m$,

$$a_{2m}(0) = -a_{2m-2}(0)/(2m)^2, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Assim,

$$a_2(0) = -\frac{a_0}{2^2}, \quad a_4(0) = \frac{a_0}{2^4 2^2}, \quad a_6(0) = -\frac{a_0}{2^6(3\cdot 2)^2},$$

e, em geral,

$$a_{2m}(0) = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots. \tag{6}$$

Portanto,

$$y_1(x) = a_0\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right], \qquad x > 0. \tag{7}$$

A função entre colchetes é conhecida como função de Bessel de primeira espécie e é denotada por $J_0(x)$. Segue do Teorema 5.7.1 que a série converge para todo x e que J_0 é analítica em $x = 0$. Algumas das propriedades importantes de J_0 são discutidas nos problemas. A Fig. 5.8.1 mostra o gráfico de $y = J_0(x)$ e algumas das somas parciais da série (7).

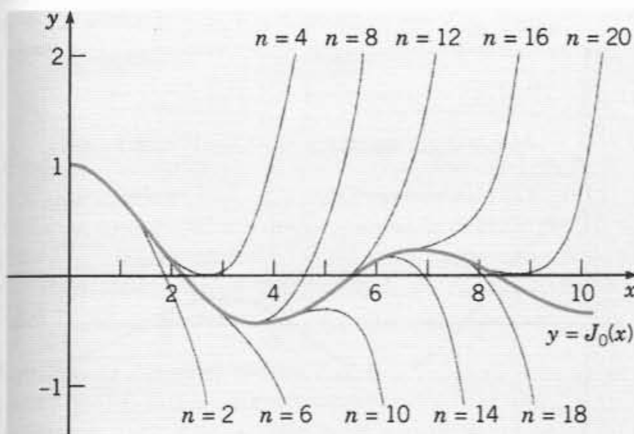


FIG. 5.8.1 Aproximações polinomiais de $J_0(x)$. O valor de n é o grau do polinômio que aproxima a função.

Para determinar $y_2(x)$, vamos calcular $a_n'(0)$.[15] Primeiro, note que, devido ao coeficiente de x^{r+1} na Eq. (4), $(r+1)^2 a_1(r) = 0$. Segue que, não só $a_1(0) = 0$, mas também $a_1'(0) = 0$. É fácil deduzir da relação de recorrência (5) que $a_3'(0) = a_5'(0) = \ldots = a_{2n+1}'(0) = 0$; logo, precisamos apenas calcular $a_{2m}'(0)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Da Eq. (5), temos

$$a_{2m}(r) = -a_{2m-2}(r)/(r+2m)^2, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Resolvendo essa relação de recorrência, obtemos

$$a_2(r) = -\frac{a_0}{(r+2)^2}, \qquad a_4(r) = \frac{a_0}{(r+2)^2(r+4)^2},$$

e, em geral,

$$a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m a_0}{(r+2)^2\cdots(r+2m)^2}, \qquad m \geq 3. \tag{8}$$

Podemos efetuar os cálculos de $a_{2m}'(r)$ de maneira mais conveniente notando que, se

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}(x-\alpha_3)^{\beta_3}\cdots(x-\alpha_n)^{\beta_n}$$

e se x é diferente de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, então

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\beta_1}{x-\alpha_1} + \frac{\beta_2}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{\beta_n}{x-\alpha_n}.$$

Aplicando esse resultado a $a_{2m}(r)$ na Eq. (8), vemos que

$$\frac{a_{2m}'(r)}{a_{2m}(r)} = -2\left(\frac{1}{r+2} + \frac{1}{r+4} + \cdots + \frac{1}{r+2m}\right),$$

e, fazendo r igual a 0, obtemos

$$a_{2m}'(0) = -2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m}\right] a_{2m}(0).$$

Substituindo $a_{2m}(0)$ dado pela Eq. (6) e fazendo

$$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}, \tag{9}$$

obtemos, finalmente,

$$a_{2m}'(0) = -H_m \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

A segunda solução da equação de Bessel de ordem zero pode ser encontrada fazendo-se $a_0 = 1$ e substituindo-se, na Eq. (23) da Seção 5.7, $y_1(x)$ e $b_{2m}(0) = a_{2m}'(0)$. Obtemos

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}, \quad x > 0. \tag{10}$$

Em vez de y_2, a segunda solução considerada, em geral, é uma determinada combinação linear de J_0 e y_2. Ela é conhecida como função de Bessel de segunda espécie e é denotada por Y_0. Seguindo Copson (Cap. 12), definimos[16]

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}[y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_0(x)]. \tag{11}$$

Aqui, γ é uma constante, conhecida como constante de Euler-Máscheroni[17]; ela é definida pela equação

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) \cong 0{,}5772. \tag{12}$$

[15] O problema 10 indica um procedimento alternativo no qual substituímos, simplesmente, a expressão (23) da Seção 5.7 na Eq. (2) e depois determinamos os b_n.

[16] Outros autores usam outras definições de Y_0. Essa escolha também é conhecida como função de Weber, em honra a Heinrich Weber (1842-1913), que ensinou em diversas universidades alemãs.

[17] Lorenzo Máscheroni (1750-1800) foi um padre italiano e professor na Universidade de Pávia. Ele calculou corretamente as 19 primeiras casas decimais de γ em 1790.

Substituindo $y_2(x)$ na Eq. (11), obtemos

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right)J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}H_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}\right],$$

$$x > 0. \tag{13}$$

A solução geral da equação de Bessel de ordem zero para $x > 0$ é

$$y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x).$$

Note que $J_0(x) \to 1$ quando $x \to 0$ e que $Y_0(x)$ tem uma singularidade logarítmica em $x = 0$, isto é, $Y_0(x)$ se comporta como $(2/\pi)\ln x$ quando $x \to 0$ por valores positivos. Então, se estivermos interessados em soluções da equação de Bessel de ordem zero que sejam finitas na origem, o que é o caso, muitas vezes, temos que descartar Y_0. Os gráficos das funções $J_0(x)$ e $Y_0(x)$ estão ilustrados na Fig. 5.8.2.

É interessante observar na Fig. 5.8.2 que, para x grande, ambas as funções $J_0(x)$ e $Y_0(x)$ oscilam. Poderíamos ter antecipado um tal comportamento a partir da equação original; de fato, isto é verdade para as soluções da equação de Bessel de ordem ν. Dividindo a Eq. (1) por x^2, obtemos

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Para x muito grande, é razoável suspeitar que os termos $(1/x)y'$ e $(\nu^2/x^2)y$ são pequenos e, portanto, podem ser desprezados. Se isso for verdade, então a equação de Bessel de ordem ν pode ser aproximada por

$$y'' + y = 0.$$

As soluções dessa equação são sen x e cos x; poderíamos, então, antecipar que as soluções da equação de Bessel para valores grandes de x são semelhantes a combinações lineares de sen x e cos x. Isso está correto no sentido em que as funções de Bessel são oscilatórias; no entanto, está apenas parcialmente correto. Para x grande, as funções J_0 e Y_0 também decaem; assim, a equação $y'' + y = 0$ não fornece uma aproximação adequada para a equação de Bessel para valores grandes de x e é necessário uma análise mais delicada. De fato, é possível mostrar que

$$J_0(x) \cong \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{quando} \quad x \to \infty, \tag{14}$$

e que

$$Y_0(x) \cong \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{quando} \quad x \to \infty. \tag{15}$$

Essas aproximações assintóticas, quando $x \to \infty$, são, de fato, muito boas. Por exemplo, a Fig. 5.8.3 mostra que a aproximação assintótica (14) para $J_0(x)$ é razoavelmente precisa para $x \geq 1$. Assim, para aproximar $J_0(x)$ em todo o intervalo de zero a infinito, podemos usar dois ou três termos da série (7) para $x \leq 1$ e a aproximação assintótica (14) para $x \geq 1$.

Equação de Bessel de Ordem Meio. Este exemplo ilustra a situação na qual as raízes da equação indicial diferem por um inteiro positivo, mas a segunda solução não tem termo logarítmico. Fazendo $\nu = 1/2$ na Eq. (1), obtemos

$$L[y] = x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \tfrac{1}{4}\right)y = 0. \tag{16}$$

Substituindo $y = \phi(r, x)$ pela série (3), obtemos

$$\begin{aligned} L[\phi](r,x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(r+n)(r+n-1) + (r+n) - \tfrac{1}{4}\right]a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{r+n+2} \\ &= (r^2 - \tfrac{1}{4})a_0x^r + \left[(r+1)^2 - \tfrac{1}{4}\right]a_1x^{r+1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(r+n)^2 - \tfrac{1}{4}\right]a_n + a_{n-2}\right\}x^{r+n} = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

As raízes da equação indicial são $r_1 = 1/2$ e $r_2 = -1/2$, logo diferem por um inteiro. A relação de recorrência é

$$\left[(r+n)^2 - \tfrac{1}{4}\right]a_n = -a_{n-2}, \quad n \geq 2. \tag{18}$$

Correspondendo à raiz maior $r_1 = 1/2$, pelo coeficiente de x^{r+1} na Eq. (17), vemos que $a_1 = 0$. Logo, da Eq. (18), $a_3 = a_5 = \ldots = a_{2n+1} = \ldots = 0$. Além disso, para $r = 1/2$,

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)}, \qquad n = 2, 4, 6\ldots,$$

ou, fazendo $n = 2m$,

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{2m(2m+1)}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Resolvendo a relação de recorrência, encontramos

$$a_2 = -\frac{a_0}{3!}, \qquad a_4 = \frac{a_0}{5!}, \ldots$$

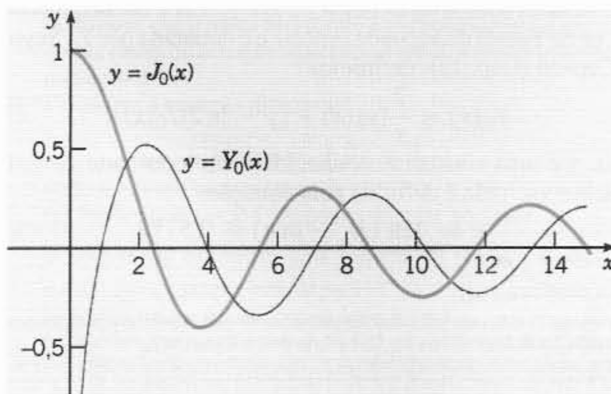


FIG. 5.8.2 As funções de Bessel J_0 e Y_0.

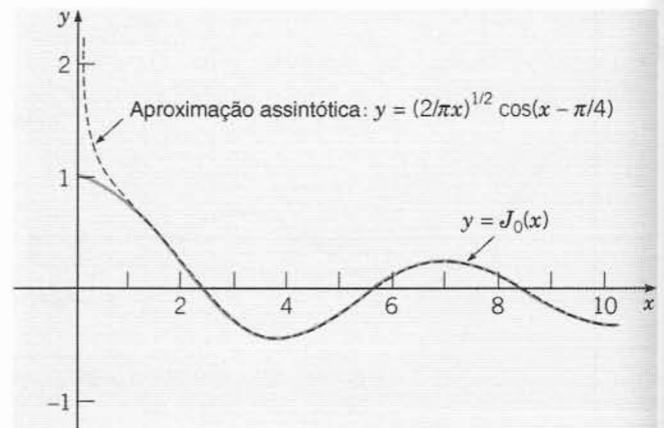


FIG. 5.8.3 Aproximação assintótica de $J_0(x)$.

e, em geral,

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{(2m+1)!}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Portanto, fazendo $a_0 = 1$, obtemos

$$y_1(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!}\right] = x^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

$$x > 0. \tag{19}$$

A série de potências na Eq. (19) é precisamente a série de Taylor para sen x; logo, uma solução para a equação de Bessel de ordem meio é $x^{-1/2}$ sen x. A função de Bessel de primeira espécie de ordem meio, $J_{1/2}$, é definida como $(2/\pi)^{1/2} y_1$. Assim,

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \operatorname{sen} x, \qquad x > 0. \tag{20}$$

Correspondendo à raiz $r = -1/2$, é possível que encontremos dificuldade em calcular a_1, já que $N = r_1 - r_2 = 1$. No entanto, da Eq. (17) para $r = -1/2$, os coeficientes de x^r e de x^{r+1} são ambos nulos, independente da escolha de a_0 e a_1. Portanto, a_0 e a_1 podem ser escolhidos arbitrariamente. Da relação de recorrência (18), obtemos um conjunto de coeficientes com índices pares correspondendo a a_0 e um conjunto de coeficientes com índices ímpares correspondendo a a_1. Assim, não é necessário um termo logarítmico para se obter uma segunda solução nesse caso. Deixamos como exercício mostrar que, para $r = -1/2$,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}, \qquad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Portanto,

$$y_2(x) = x^{-1/2}\left[a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

$$= a_0 \frac{\cos x}{x^{1/2}} + a_1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^{1/2}}, \qquad x > 0. \tag{21}$$

A constante a_1 simplesmente introduz um múltiplo de $y_1(x)$. A segunda solução linearmente independente da equação de Bessel de ordem meio é escolhida, em geral, como a solução para a qual $a_0 = (2/\pi)^{1/2}$ e $a_1 = 0$. Ela é denotada por $J_{-1/2}$. Então

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x, \qquad x > 0. \tag{22}$$

A solução geral da Eq. (16) é $y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$.

Comparando as Eqs. (20) e (22) com as Eqs. (14) e (15), vemos que, exceto por um deslocamento de fase de $\pi/4$, as funções $J_{-1/2}$ e $J_{1/2}$ se parecem com J_0 e Y_0, respectivamente, para valores grandes de x. Os gráficos de $J_{1/2}$ e $J_{-1/2}$ aparecem na Fig. 5.8.4.

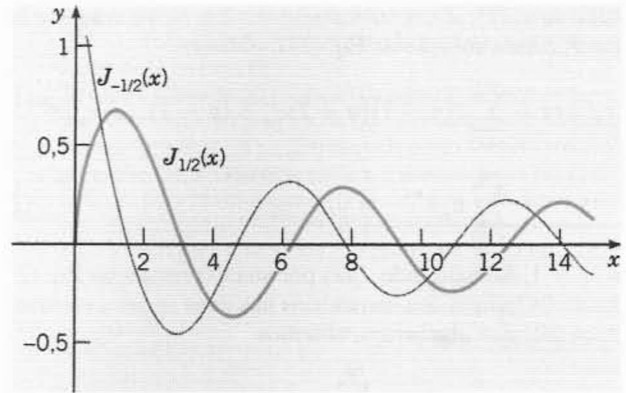


FIG. 5.8.4 As funções de Bessel $J_{1/2}$ e $J_{-1/2}$.

Equação de Bessel de Ordem Um. Este exemplo ilustra a situação na qual as raízes da equação indicial diferem por um inteiro positivo e a segunda solução envolve um termo logarítmico. Fazendo $\nu = 1$ na Eq. (1), temos

$$L[y] = x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0. \tag{23}$$

Substituindo $y = \phi(r, x)$ pela série em (3) e juntando os termos como nos casos precedentes, obtemos

$$L[\phi](r, x) = a_0(r^2 - 1)x^r + a_1[(r+1)^2 - 1]x^{r+1}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \{[(r+n)^2 - 1]a_n + a_{n-2}\}x^{r+n} = 0. \tag{24}$$

As raízes da equação indicial são $r_1 = 1$ e $r_2 = -1$. A relação de recorrência é

$$[(r+n)^2 - 1]a_n(r) = -a_{n-2}(r), \quad n \geq 2. \tag{25}$$

Correspondendo à raiz maior, a relação de recorrência fica

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+2)n}, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Pelo coeficiente de x^{r+1} na Eq. (24), vemos que $a_1 = 0$, logo, pela relação de recorrência, $a_3 = a_5 = \ldots = 0$. Para valores pares de n, fazendo $n = 2m$, temos

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m+2)(2m)} = -\frac{a_{2m-2}}{2^2(m+1)m}, \; m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Resolvendo essa relação de recorrência, obtemos

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m+1)!m!}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots. \tag{26}$$

A função de Bessel de primeira espécie de ordem um, denotada por J_1, é obtida escolhendo-se $a_0 = 1/2$. Então,

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m+1)!m!}. \tag{27}$$

A série converge absolutamente para todo x, de modo que J_1 é analítica em toda a parte.

Ao determinar uma segunda solução da equação de Bessel de ordem um, vamos ilustrar o método de substituição direta. O cálculo do termo geral na Eq. (28) a seguir é bastante complicado, mas os primeiros poucos coeficientes podem ser encontrados facilmente. De acordo com o Teorema 5.7.1, vamos supor que

$$y_2(x) = aJ_1(x) \ln x + x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right], \quad x > 0. \tag{28}$$

Calculando $y_2'(x)$, $y_2''(x)$, substituindo na Eq. (23) e usando o fato de que J_1 é uma solução da Eq. (23), obtemos

$$2axJ_1'(x) + \sum_{n=0}^{\infty}[(n-1)(n-2)c_n + (n-1)c_n - c_n]x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0, \qquad (29)$$

onde $c_0 = 1$. Substituindo $J_1(x)$ por sua expressão na Eq. (27), mudando os índices dos somatórios nas duas séries e efetuando diversos cálculos algébricos, obtemos

$$-c_1 + [0 \cdot c_2 + c_0]x + \sum_{n=2}^{\infty}[(n^2-1)c_{n+1} + c_{n-1}]x^n = -a\left[x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m+1)x^{2m+1}}{2^{2m}(m+1)!\,m!}\right]. \qquad (30)$$

Da Eq. (30), notamos, primeiro, que $c_1 = 0$ e $a = -c_0 = -1$. Além disso, como a expressão à direita do sinal de igualdade contém apenas potências pares de x, o coeficiente de cada potência ímpar de x na expressão à esquerda do sinal de igualdade tem de ser nulo. Então, como $c_1 = 0$, temos $c_3 = c_5 = \ldots = 0$. Correspondendo às potências ímpares de x, obtemos a relação de recorrência [faça $n = 2m + 1$ na série à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (30)]

$$[(2m+1)^2 - 1]c_{2m+2} + c_{2m} = \frac{(-1)^m(2m+1)}{2^{2m}(m+1)!\,m!}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (31)$$

Fazendo $m = 1$ na Eq. (31), obtemos

$$(3^2 - 1)c_4 + c_2 = (-1)3/(2^2 \cdot 2!).$$

Note que c_2 pode ser escolhido *arbitrariamente* e essa equação, então, determina c_4. Note também que, na equação para o coeficiente de x, c_2 aparece multiplicado por 0 e essa equação foi usada para determinar a. Não é surpreendente que c_2 seja arbitrário, já que c_2 é o coeficiente de x na expressão $x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right]$. Em conseqüência, c_2 gera, simplesmente, um múltiplo de J_1 e y_2 só está determinado a menos de múltiplos de J_1. De acordo com a prática usual, escolhemos $c_2 = 1/2^2$. Obtemos, então,

$$c_4 = \frac{-1}{2^4 \cdot 2}\left[\frac{3}{2} + 1\right] = \frac{-1}{2^4 2!}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 1\right] = \frac{(-1)}{2^4 \cdot 2!}(H_2 + H_1).$$

É possível mostrar que a solução da relação de recorrência (31) é

$$c_{2m} = \frac{(-1)^{m+1}(H_m + H_{m-1})}{2^{2m}m!(m-1)!}, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

com a convenção de que $H_0 = 0$. Assim,

$$y_2(x) = -J_1(x)\ln x + \frac{1}{x}\left[1 - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(H_m + H_{m-1})}{2^{2m}m!(m-1)!}x^{2m}\right], \quad x > 0. \qquad (32)$$

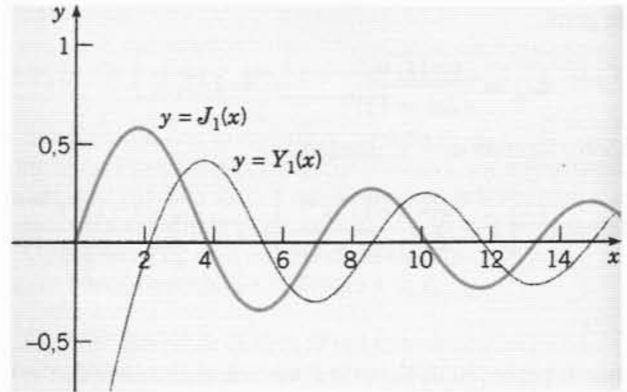


FIG. 5.8.5 As funções de Bessel J_1 e Y_1.

O cálculo de $y_2(x)$ usando um outro procedimento [veja as Eqs. (19) e (20) da Seção 5.7] no qual determinamos $c_n(r_2)$ é um pouco mais fácil. Em particular, esse procedimento fornece uma fórmula geral para c_{2m} sem a necessidade de se resolver uma relação de recorrência da forma (31) (Problema 11). Nesse aspecto, o leitor pode querer comparar os cálculos da segunda solução da equação de Bessel de ordem zero no texto e o Problema 10.

A segunda solução da Eq. (23), a função de Bessel de segunda espécie de ordem um, Y_1, é escolhida, em geral, como uma determinada combinação linear de J_1 e y_2. Seguindo Copson (Cap. 12), Y_1 é definida por

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi}[-y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_1(x)], \qquad (33)$$

onde γ é definido pela Eq. (12). A solução geral da Eq. (23) para $x > 0$ é

$$y = c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x).$$

Note que, embora J_1 seja analítica em $x = 0$, a segunda solução Y_1 torna-se ilimitada do mesmo modo que $1/x$ quando $x \to 0$. A Fig. 5.8.5 mostra os gráficos de J_1 e Y_1.

Problemas

Nos problemas de 1 a 4, mostre que a equação diferencial dada tem um ponto singular regular em $x = 0$ e determine duas soluções linearmente independentes para $x > 0$.

1. $x^2y'' + 2xy' + xy = 0$
2. $x^2y'' + 3xy' + (1 + x)y = 0$
3. $x^2y'' + xy' + 2xy = 0$
4. $x^2y'' + 4xy' + (2 + x)y = 0$
5. Encontre duas soluções linearmente independentes para a equação de Bessel de ordem 3/2,
$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{9}{4})y = 0, \qquad x > 0.$$
6. Mostre que a equação de Bessel de ordem meio
$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{1}{4})y = 0, \qquad x > 0,$$
pode ser reduzida à equação
$$v'' + v = 0$$
pela mudança da variável dependente $y = x^{-1/2}v(x)$. Conclua disso que $y_1(x) = x^{-1/2}\cos x$ e $y_2(x) = x^{-1/2}\,\text{sen}\,x$ são soluções da equação de Bessel de ordem meio.

7. Mostre diretamente que a série para $J_0(x)$, Eq. (7), converge absolutamente para todo x.
8. Mostre diretamente que a série para $J_1(x)$, Eq. (27), converge absolutamente para todo x e que $J_0'(x) = -J_1(x)$.
9. Considere a equação de Bessel de ordem ν,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) = 0, \qquad x > 0,$$

onde ν é real e positivo.
(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular e que as raízes da equação indicial são ν e $-\nu$.
(b) Correspondendo à raiz maior ν, mostre que uma solução é

$$y_1(x) = x^\nu \left[1 - \frac{1}{1!(1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(1+\nu)(2+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(1+\nu)\cdots(m+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right].$$

(c) Se 2ν não é inteiro, mostre que uma segunda solução é

$$y_2(x) = x^{-\nu} \left[1 - \frac{1}{1!(1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(1-\nu)(2-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(1-\nu)\cdots(m-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right].$$

Note que $y_1(x) \to 0$ quando $x \to 0$ e que $y_2(x)$ torna-se ilimitado quando $x \to 0$.
(d) Verifique, por métodos diretos, que as séries de potências nas expressões para $y_1(x)$ e $y_2(x)$ convergem absolutamente para todo x. Verifique também que y_2 é uma solução, bastando apenas que ν não seja inteiro.
10. Mostramos, nesta seção, que uma solução da equação de Bessel de ordem zero,

$$L[y] = x^2y'' + xy' + x^2y = 0,$$

é J_0, onde $J_0(x)$ é dada pela Eq. (7) com $a_0 = 1$. De acordo com o Teorema 5.7.1, uma segunda solução tem a forma $(x > 0)$

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n.$$

(a) Mostre que

$$L[y_2](x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} nb_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2} + 2xJ_0'(x). \quad \text{(i)}$$

(b) Substituindo a representação em série de $J_0(x)$ na Eq. (i), mostre que

$$b_1x + 2^2b_2x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(n^2b_n + b_{n-2})x^n = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2nx^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}. \quad \text{(ii)}$$

(c) Note que aparecem apenas potências pares de x na expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (ii). Mostre que $b_1 = b_3 = b_5 = \ldots = 0$, $b_2 = 1/2^2(1!)^2$, e que

$$(2n)^2b_{2n} + b_{2n-2} = -2(-1)^n(2n)/2^{2n}(n!)^2, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Deduza que

$$b_4 = -\frac{1}{2^24^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \qquad \text{e} \qquad b_6 = \frac{1}{2^24^26^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right).$$

A solução geral da relação de recorrência é $b_{2n} = (-1)^{n+1}H_n/2^{2n}(n!)^2$. Substituindo b_n na expressão para $y_2(x)$, obtemos a solução dada na Eq. (10).
11. Encontre uma segunda solução da equação de Bessel de ordem um calculando os $c_n(r_2)$ e a da Eq. (24) da Seção 5.7 de acordo com as fórmulas (19) e (20) daquela seção. Algumas diretrizes para esse cálculo são as seguintes. Primeiro, use a Eq. (24) desta seção para mostrar que $a_1(-1)$ e $a_1'(-1)$são iguais a 0. Depois mostre que $c_1(-1) = 0$ e, da relação de recorrência, que $c_n(-1) = 0$ para $n = 3, 5, \ldots$. Finalmente, use a Eq. (25) para mostrar que

$$a_2(r) = -\frac{a_0}{(r+1)(r+3)}, \qquad a_4(r) = \frac{a_0}{(r+1)(r+3)(r+3)(r+5)},$$

e que

$$a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m a_0}{(r+1)\cdots(r+2m-1)(r+3)\cdots(r+2m+1)}, \qquad m \geq 3.$$

Depois mostre que

$$c_{2m}(-1) = (-1)^{m+1}(H_m + H_{m-1})/2^{2m}m!(m-1)!, \qquad m \geq 1.$$

12. Através de uma mudança adequada de variável, é possível, algumas vezes, transformar uma outra equação diferencial em uma equação de Bessel. Por exemplo, mostre que uma solução de

$$x^2y'' + (\alpha^2\beta^2x^{2\beta} + \tfrac{1}{4} - \nu^2\beta^2)y = 0, \qquad x > 0$$

é dada por $y = x^{1/2}f(\alpha x^\beta)$, onde $f(\xi)$ é uma solução da equação de Bessel de ordem ν.
13. Usando o resultado do Problema 12, mostre que a solução geral da equação de Airy

$$y'' - xy = 0, \qquad x > 0$$

é $y = x^{1/2}\left[c_1f_1\left(\frac{2}{3}ix^{3/2}\right) + c_2f_2\left(\frac{2}{3}ix^{3/2}\right)\right]$, onde $f_1(\xi)$ e $f_2(\xi)$ são soluções linearmente independentes da equação de Bessel de ordem um terço.
14. Pode-se mostrar que J_0 tem uma infinidade de zeros para $x > 0$. Em particular, os três primeiros zeros são aproximadamente iguais a 2,405; 5,520 e 8,653 (veja a Fig. 5.8.1). Vamos denotar por λ_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$ os zeros de J_0; segue que

$$J_0(\lambda_j x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Verifique que $y = J_0(\lambda_j x)$ satisfaz a equação diferencial

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \lambda_j^2 y = 0, \qquad x > 0.$$

Mostre que, portanto,

$$\int_0^1 xJ_0(\lambda_i x)J_0(\lambda_j x)\,dx = 0 \qquad \text{se} \qquad \lambda_i \neq \lambda_j.$$

Essa propriedade importante de $J_0(\lambda_i x)$, conhecida como a propriedade de ortogonalidade, é útil na resolução de problemas de valores de contorno. *Sugestão:* Escreva a equação diferencial para $J_0(\lambda_i x)$. Multiplique-a por $xJ_0(\lambda_j x)$ e subtraia de $xJ_0(\lambda_i x)$ vezes a equação diferencial para $J_0(\lambda_j x)$. Depois integre de 0 a 1.

REFERÊNCIAS

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1961; New York: Dover, 1989).

Copson, E. T., *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable* (Oxford: Oxford University, 1935).

Demonstrações dos Teoremas 5.3.1 e 5.7.1 podem ser encontradas em livros intermediários ou avançados; veja, por exemplo, os Caps. 3 e 4 de Coddington, ou os Caps. 3 e 4 de:

Rainville, E. D., *Intermediate Differential Equations* (2nd ed.) (New York: Macmillan, 1964).

Veja também esses textos para uma discussão do ponto no infinito, mencionado no Problema 21 da Seção 5.4. O comportamento de soluções perto de um ponto singular irregular é um tópico ainda mais avançado; uma discussão sucinta pode ser encontrada no Cap. 5 de:

Coddington, E. A., and Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations* (New York: McGraw-Hill, 1955).

Discussões mais completas da equação de Bessel, da equação de Legendre e de muitas outras equações que levam o nome de pessoas podem ser encontradas em livros avançados de equações diferenciais, de métodos de matemática aplicada e de funções especiais. Um livro que trata de funções especiais, como os polinômios de Legendre e as funções de Bessel, é:

Hochstadt, H., *Special Functions of Mathematical Physics* (New York: Holt, 1961).

Uma compilação excelente de fórmulas, gráficos e tabelas de funções de Bessel, funções de Legendre e outras funções especiais da física matemática pode ser encontrada em:

Abramowitz, M., and Stegun, I. A. (eds.), *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover, 1965); originally published by the National Bureau of Standards, Washington, DC, 1964.

CAPÍTULO 6

A Transformada de Laplace

Muitos problemas práticos de engenharia envolvem sistemas mecânicos ou elétricos sob a ação de forças descontínuas ou de impulsos. Os métodos descritos no Cap. 3 são, muitas vezes, complicados de se usar em tais problemas. Um outro método que é particularmente adequado para esses problemas, embora possa ser usado mais geralmente, baseia-se na transformada de Laplace. Vamos descrever, neste capítulo, como esse importante método funciona, enfatizando problemas típicos que aparecem nas aplicações de engenharia.

6.1 Definição da Transformada de Laplace

Integrais Impróprias. Como a transformada de Laplace envolve uma integral de zero a infinito, é preciso conhecer esse tipo de integrais impróprias para apreciar o desenvolvimento subseqüente das propriedades da transformada.

Vamos fornecer aqui uma revisão rápida de tais integrais impróprias. Se você já estiver familiarizado com integrais impróprias, você pode pular essa revisão. Por outro lado, se integrais impróprias é um assunto novo para você, então você, provavelmente, deve consultar um livro de cálculo, onde podem ser encontrados muitos mais detalhes e exemplos.

Uma integral imprópria em um intervalo ilimitado é definida como um limite de integrais com intervalos finitos; assim,

$$\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{A\to\infty}\int_a^A f(t)\,dt, \tag{1}$$

onde A é um número real positivo. Se a integral de a até A existir para todo $A > a$ e se o limite quando $A \to \infty$ existir, então dizemos que a integral imprópria **converge** para aquele valor limite. Caso contrário, a integral **diverge** ou não existe. Os exemplos a seguir ilustram ambas as possibilidades.

Exemplo 1

Seja $f(t) = e^{ct}$, $t \geq 0$, onde c é uma constante real não nula. Então

$$\int_0^\infty e^{ct}\,dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{ct}\,dt = \lim_{A\to\infty}\left.\frac{e^{ct}}{c}\right|_0^A$$
$$= \lim_{A\to\infty}\frac{1}{c}(e^{cA}-1).$$

Logo, a integral imprópria converge para o valor $-1/c$ se $c < 0$ e diverge se $c > 0$. Se $c = 0$, o integrando $f(t)$ é a função constante 1 e a integral diverge.

Exemplo 2

Seja $f(t) = 1/t$, $t \geq 1$. Então

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} = \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{dt}{t} = \lim_{A\to\infty} \ln A.$$

Como $\lim_{A\to\infty} \ln A = \infty$, a integral imprópria diverge.

Exemplo 3

Seja $f(t) = t^{-p}$, $t \geq 1$, onde p é uma constante real e $p \neq 1$; o caso $p = 1$ foi considerado no Exemplo 2. Então,

$$\int_1^\infty t^{-p}\,dt = \lim_{A\to\infty} \int_1^A t^{-p}\,dt = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{1-p}(A^{1-p} - 1).$$

Quando $A \to \infty$, $A^{1-p} \to 0$ se $p > 1$, mas $A^{1-p} \to \infty$ se $p < 1$. Portanto, $\int_1^\infty t^{-p}\,dt$ converge para o valor $1/(p-1)$ para $p > 1$, mas (incorporando o resultado do Exemplo 2) diverge para $p \leq 1$. Esses resultados são análogos aos da série infinita $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$.

Antes de discutir a existência de $\int_a^\infty f(t)\,dt$, é conveniente definir alguns termos. Uma função f é dita **seccionalmente contínua** em um intervalo $\alpha \leq t \leq \beta$ se o intervalo puder ser particionado em um número finito de pontos $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$, de modo que

1. f é contínua em cada subintervalo aberto $t_{i-1} < t < t_i$.
2. f tende a um limite finito quando t tende, de dentro de um desses subintervalos, a um dos extremos.

Em outras palavras, f é seccionalmente contínua em $\alpha \leq t \leq \beta$ se é contínua nesse intervalo exceto por um número finito de saltos. Se f for seccionalmente contínua em $\alpha \leq t \leq \beta$ para todo β, então dizemos que f é seccionalmente contínua em $t \geq \alpha$. A Fig. 6.1.1 mostra um exemplo de uma função seccionalmente contínua.

Se f for seccionalmente contínua no intervalo $a \leq t \leq A$, pode-se mostrar que $\int_a^A f(t)\,dt$ existe. Logo, se f for seccionalmente contínua em $t \geq a$, então $\int_a^A f(t)\,dt$ existe para todo $A > a$. No entanto, ser seccionalmente contínua não é suficiente para garantir a convergência da integral imprópria $\int_a^\infty f(t)\,dt$, como mostram os exemplos precedentes.

Se f não puder ser integrada facilmente usando-se funções elementares, a definição da convergência de $\int_a^\infty f(t)\,dt$ pode ser difícil de aplicar. Freqüentemente, o modo mais conveniente de verificar a convergência ou divergência de uma integral imprópria é através do teorema de comparação a seguir, que é análogo ao teorema semelhante para séries infinitas.

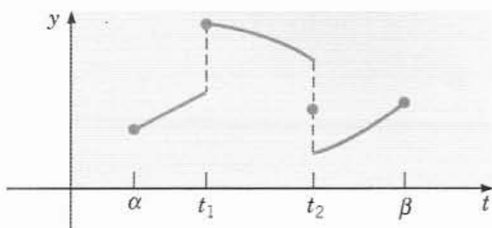


FIG. 6.1.1 Uma função seccionalmente contínua.

Teorema 6.1.1

Se f é seccionalmente contínua em $t \geq a$, se $|f(t)| \leq g(t)$ quando $t \geq M$ para alguma constante positiva M e se $\int_M^\infty g(t)\,dt$ converge, então $\int_a^\infty f(t)\,dt$ também converge. Por outro lado, se $f(t) \geq g(t) \geq 0$ para $t \geq M$ e se $\int_M^\infty g(t)\,dt$ diverge, então $\int_a^\infty f(t)\,dt$ também diverge.

A demonstração desse resultado do cálculo não será feita aqui. Ela se torna plausível, no entanto, através da comparação entre as áreas representadas por $\int_M^\infty g(t)\,dt$ e $\int_M^\infty f(t)\,dt$. As funções mais úteis para comparação são e^{ct} e t^{-p}, que consideramos nos Exemplos 1, 2 e 3.

A Transformada de Laplace. Entre as ferramentas muito úteis para a resolução de equações diferenciais estão as **transformadas integrais**. Uma transformada integral é uma relação da forma

$$F(s) = \int_\alpha^\beta K(s,t) f(t)\,dt, \qquad (2)$$

onde $K(s, t)$ é uma função dada, chamada de **núcleo** da transformada, e os limites de integração α e β também são dados. É possível que $\alpha = -\infty$, $\beta = \infty$ ou ambos. A relação (2) transforma a função f em outra função F, que é dita transformada de f. A idéia geral ao se usar uma transformada integral para se resolver uma equação diferencial é a seguinte: use a relação (2) para transformar o problema para uma função desconhecida f em um problema mais simples para F, depois resolva esse problema mais simples para encontrar F e, finalmente, recupere a função desejada f de sua transformada F. Essa última etapa é conhecida como "inverter a transformada".

Existem diversas transformadas integrais úteis em matemática aplicada, mas vamos considerar, neste capítulo, apenas a transformada de Laplace.[1] Essa transformada é definida a seguir. Suponha que $f(t)$ é uma função definida para $t \geq 0$ e que f satisfaz certas condições que serão especificadas mais adiante. Então a transformada de Laplace de f, que denotaremos por $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ou por $F(s)$, é definida pela equação

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt, \qquad (3)$$

sempre que essa integral imprópria convergir. A transformada de Laplace usa o núcleo $K(s, t) = e^{-st}$. Como as soluções das equações diferenciais lineares com coeficientes constantes são baseadas na função exponencial, a transformada de Laplace é particularmente útil para essas equações.

Em geral, o parâmetro s pode ser complexo e todo o poder da transformada de Laplace torna-se disponível só quando podemos considerar $F(s)$ como uma função de uma variável complexa. No entanto, para os problemas discutidos aqui, basta considerar apenas valores reais de s. A transformada de Laplace F de uma função f existe se f satisfaz determinadas condições, tais como as enunciadas no próximo teorema.

Teorema 6.1.2

Suponha que

1. f seja seccionalmente contínua no intervalo $0 \leq t \leq A$ para qualquer A positivo;
2. $|f(t)| \leq Ke^{at}$ quando $t \geq M$, onde K, a e M são constantes reais com K e M necessariamente positivas.

Então, a transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, definida pela Eq. (3), existe para $s > a$.

Para estabelecer esse teorema, precisamos mostrar que a integral na Eq. (3) converge para $s > a$. Separando a integral imprópria em duas partes, temos

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^M e^{-st} f(t)\, dt + \int_M^\infty e^{-st} f(t)\, dt. \qquad (4)$$

A primeira integral à direita do sinal de igualdade da Eq. (4) existe pela hipótese (1) do teorema; logo, a existência de $F(s)$ depende da convergência da segunda integral. Pela hipótese (2), temos, para $t \geq M$,

$$|e^{-st} f(t)| \leq K e^{-st} e^{at} = K e^{(a-s)t},$$

e assim, pelo Teorema 6.1.1, $F(s)$ existe se $\int_M^\infty e^{(a-s)t}\, dt$ convergir. Pelo Exemplo 1, com $a - s$ no lugar de c, vemos que essa última integral converge quando $a - s < 0$, o que estabelece o Teorema 6.1.2.

Neste capítulo (exceto na Seção 6.5) trabalhamos quase que exclusivamente com funções que satisfazem as condições do Teorema 6.1.2. Tais funções são descritas como sendo seccionalmente contínuas e de **ordem exponencial** quando $t \to \infty$. As transformadas de Laplace de algumas funções elementares importantes são dadas nos exemplos a seguir.

Exemplo 4

Seja $f(t) = 1$, $t \geq 0$. Então, como no Exemplo 1,

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = -\lim_{A \to \infty} \frac{e^{-st}}{s}\Bigg|_0^A = \frac{1}{s}, \qquad s > 0.$$

Exemplo 5

Seja $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$. Então, referindo-nos novamente ao Exemplo 1,

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt$$
$$= \frac{1}{s-a}, \qquad s > a.$$

[1] A transformada de Laplace tem esse nome em homenagem ao eminente matemático francês P. S. Laplace, que estudou a relação (3) em 1782. No entanto, as técnicas descritas neste capítulo só foram desenvolvidas em torno de um século depois. Elas se devem, principalmente, a Oliver Heaviside (1850-1925), um engenheiro elétrico inglês inovador, mas pouco convencional, que fez contribuições importantes para o desenvolvimento e aplicação da teoria eletromagnética.

Exemplo 6

Seja $f(t) = \text{sen } at$, $t \geq 0$. Então

$$\mathcal{L}\{\text{sen } at\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \text{sen } at\, dt, \qquad s > 0.$$

Como

$$F(s) = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st} \text{sen } at\, dt,$$

integrando por partes, obtemos

$$F(s) = \lim_{A\to\infty} \left[-\frac{e^{-st}\cos at}{a}\bigg|_0^A - \frac{s}{a}\int_0^A e^{-st}\cos at\, dt \right]$$
$$= \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\cos at\, dt.$$

Uma segunda integração por partes fornece

$$F(s) = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-st}\text{sen } at\, dt$$
$$= \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}F(s).$$

Portanto, resolvendo para $F(s)$, temos

$$F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \qquad s > 0.$$

Vamos supor que f_1 e f_2 sejam duas funções cujas transformadas de Laplace existem para $s > a_1$ e $s > a_2$, respectivamente. Então, para s maior do que o máximo de a_1 e a_2,

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)]\, dt$$
$$= c_1\int_0^\infty e^{-st} f_1(t)\, dt + c_2\int_0^\infty e^{-st} f_2(t)\, dt;$$

logo

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1\mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{f_2(t)\}. \quad (5)$$

A Eq. (5) é uma afirmação sobre o fato de que a transformada de Laplace é um **operador linear**. Essa propriedade é muito importante e será usada freqüentemente mais tarde. A soma na Eq. (5) pode ser facilmente estendida para um número arbitrário de parcelas.

Exemplo 7

Encontre a transformada de Laplace de $f(t) = 5e^{-2t} - 3\,\text{sen } 4t$, $t \geqslant 0$.

Usando a Eq. (5), escrevemos

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 3\mathcal{L}\{\text{sen } 4t\}.$$

Logo, dos Exemplos 5 e 6, obtemos

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{5}{s+2} - \frac{12}{s^2+16}, \qquad s > 0.$$

Problemas

Nos problemas de 1 a 4, esboce o gráfico da função dada. Em cada caso, determine se f é contínua, seccionalmente contínua ou nenhuma das duas, no intervalo $0 \leq t \leq 3$.

1. $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2+t, & 1 < t \leq 2 \\ 6-t, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$

2. $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ (t-1)^{-1}, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 < t \leq 2 \\ 3-t, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$

4. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 3-t, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$

5. Encontre a transformada de Laplace de cada uma das funções a seguir:
   (a) t
   (b) t^2
   (c) t^n, onde n é um inteiro positivo.
6. Encontre a transformada de Laplace de $f(t) = \cos at$, onde a é uma constante real.

Lembre-se que $\cosh bt = (e^{bt} + e^{-bt})/2$ e que $\text{senh } bt = (e^{bt} - e^{-bt})/2$. Nos problemas de 7 a 10, encontre a transformada de Laplace da função dada; a e b são constantes reais.

7. $\cosh bt$
8. $\text{senh } bt$
9. $e^{at}\cosh bt$
10. $e^{at}\,\text{senh } bt$

Nos problemas de 11 a 14, lembre-se que $\cos bt = (e^{ibt} + e^{-ibt})/2$ e $\text{sen } bt = (e^{ibt} - e^{-ibt})/2i$. Supondo que as fórmulas de integra-

ção elementares possam ser estendidas para esse caso, encontre a transformada de Laplace da função dada; a e b são constantes reais.

11. $\operatorname{sen} bt$
12. $\cos bt$
13. $e^{at} \operatorname{sen} bt$
14. $e^{at} \cos bt$

Nos problemas de 15 a 20, use integração por partes para encontrar a transformada de Laplace da função dada; n é um inteiro positivo e a é uma constante real.

15. te^{at}
16. $t \operatorname{sen} at$
17. $t \cosh at$
18. $t^n e^{at}$
19. $t^2 \operatorname{sen} at$
20. $t^2 \operatorname{senh} at$

Nos problemas de 21 a 24, determine se a integral dada converge ou diverge.

21. $\int_0^\infty (t^2+1)^{-1}\, dt$
22. $\int_0^\infty te^{-t}\, dt$
23. $\int_1^\infty t^{-2}e^t\, dt$
24. $\int_0^\infty e^{-t} \cos t\, dt$
25. Suponha que f e f' são contínuas em $t \geq 0$ e de ordem exponencial quando $t \to \infty$. Integrando por partes, mostre que, se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, então $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$. O resultado continua válido sob condições menos restritivas, como as do Teorema 6.1.2.
26. **A Função Gama.** A função gama é denotada por $\Gamma(p)$ e definida pela integral

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x}x^p\, dx. \tag{i}$$

A integral converge quando $x \to \infty$ para todo p. Para $p < 0$, é uma integral imprópria também em 0, já que o integrando torna-se ilimitado quando $x \to 0$. No entanto, pode-se mostrar que a integral converge em $x = 0$ para $p > -1$.

(a) Mostre que, para $p > 0$,

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

(b) Mostre que $\Gamma(1) = 1$.

(c) Se p é um inteiro positivo, mostre que

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Como $\Gamma(p)$ também está definida quando p não é inteiro, essa função fornece uma extensão da função fatorial para valores não-inteiros da variável independente. Note que também é consistente definir $0! = 1$.

(d) Mostre que, para $p > 0$,

$$p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1) = \Gamma(p+n)/\Gamma(p).$$

Assim, $\Gamma(p)$ pode ser determinado para todos os valores positivos de p se $\Gamma(p)$ for conhecido em um único intervalo de comprimento um, por exemplo, em $0 < p \leq 1$. É possível mostrar que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Encontre $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ e $\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)$.

27. Considere a transformada de Laplace de t^p, onde $p > -1$.

(a) Usando o Problema 26, mostre que

$$\mathcal{L}\{t^p\} = \int_0^\infty e^{-st}t^p\, dt = \frac{1}{s^{p+1}}\int_0^\infty e^{-x}x^p\, dx$$
$$= \Gamma(p+1)/s^{p+1}, \qquad s > 0.$$

(b) Seja p igual a um inteiro positivo n em (a); mostre que

$$\mathcal{L}\{t^n\} = n!/s^{n+1}, \qquad s > 0.$$

(c) Mostre que

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \frac{2}{\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx, \qquad s > 0.$$

É possível mostrar que

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

portanto,

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\pi/s}, \qquad s > 0.$$

(d) Mostre que

$$\mathcal{L}\{t^{1/2}\} = \sqrt{\pi}/2s^{3/2}, \qquad s > 0.$$

6.2 Solução de Problemas de Valores Iniciais

Nesta seção, vamos mostrar como a transformada de Laplace pode ser usada para se resolver problemas de valor inicial para equações diferenciais lineares com coeficientes constantes. A utilidade da transformada de Laplace nesse contexto reside no fato de que a transformada de f' está relacionada de maneira simples à transformada de f. Essa relação está explicitada no teorema a seguir.

Teorema 6.2.1

Suponha que f seja contínua e que f' seja seccionalmente contínua em qualquer intervalo $0 \leq t \leq A$. Suponha, além disso, que existam constantes K, a e M tais que $|f(t)| \leq Ke^{at}$ para $t \geq M$. Então $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ existe para $s > a$ e, além disso,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0). \tag{1}$$

Para provar esse teorema, vamos considerar a integral

$$\int_0^A e^{-st}f'(t)\, dt.$$

Se f' tem pontos de descontinuidade no intervalo $0 \leq t \leq A$, vamos denotá-los por $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Podemos, então, escrever essa integral como

$$\int_0^A e^{-st}f'(t)\, dt = \int_0^{t_1} e^{-st}f'(t)\, dt$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} e^{-st}f'(t)\, dt + \cdots + \int_{t_n}^A e^{-st}f'(t)\, dt.$$

Integrando cada parcela à direita do sinal de igualdade, obtemos

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)dt = e^{-st} f(t)\Big|_0^{t_1} + e^{-st} f(t)\Big|_{t_1}^{t_2} + \cdots + e^{-st} f(t)\Big|_{t_n}^{A}$$
$$+ s\left[\int_0^{t_1} e^{-st} f(t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t)\, dt + \cdots + \int_{t_n}^{A} e^{-st} f(t)\, dt\right].$$

Como f é contínua, as contribuições nos extremos $t_1, t_2, \ldots, t_n$ se cancelam. Combinando as integrais, obtemos

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)\, dt = e^{-sA} f(A) - f(0) + s\int_0^A e^{-st} f(t)\, dt.$$

Quando $A \to \infty$, $e^{-sA}f(A) \to 0$ sempre que $s > a$. Logo, para $s > a$,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0),$$

o que prova o teorema.

Se f' e f'' satisfazem as mesmas condições impostas em f e f', respectivamente, no Teorema 6.2.1, então a transformada de Laplace de f'' também existe para $s > a$ e é dada por

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0). \qquad (2)$$

De fato, desde que a função f e suas derivadas satisfaçam condições adequadas, pode-se obter uma expressão para a n-ésima derivada $f^{(n)}$ através de aplicações sucessivas desse teorema. O resultado é dado no corolário a seguir.

Corolário 6.2.2

Suponha que as funções $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ sejam contínuas e que $f^{(n)}$ seja seccionalmente contínua em qualquer intervalo $0 \le t \le A$. Suponha, além disso, que existam constantes K, a e M tais que $|f(t)| \le Ke^{at}$, $|f'(t)| \le Ke^{at}$, ..., $|f^{(n-1)}(t)| \le Ke^{at}$ para $t \ge M$. Então, $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ existe para $s > a$ e é dado por

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \qquad (3)$$

Vamos mostrar, agora, como a transformada de Laplace pode ser usada para resolver problemas de valor inicial. Sua utilidade maior é em problemas envolvendo equações diferenciais não-homogêneas, como mostraremos em seções mais adiante neste capítulo. Entretanto, vamos começar olhando algumas equações homogêneas, que são um pouco mais simples. Por exemplo, vamos considerar a equação diferencial

$$y'' - y' - 2y = 0 \qquad (4)$$

com condições iniciais

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0. \qquad (5)$$

Esse problema pode ser resolvido facilmente pelos métodos da Seção 3.1. A equação característica é

$$r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) = 0, \qquad (6)$$

e, em conseqüência, a solução geral da Eq. (4) é

$$y = c_1e^{-t} + c_2e^{2t}. \qquad (7)$$

Para satisfazer as condições iniciais (5), precisamos ter $c_1 + c_2 = 1$ e $-c_1 + 2c_2 = 0$; logo, $c_1 = 2/3$ e $c_2 = 1/3$, de modo que a solução do problema de valor inicial (4) e (5) é

$$y = \phi(t) = \tfrac{2}{3}e^{-t} + \tfrac{1}{3}e^{2t}. \qquad (8)$$

Vamos agora resolver o mesmo problema usando a transformada de Laplace. Para fazer isso, precisamos supor que o problema tem uma solução $y = \phi(t)$ tal que as duas primeiras derivadas satisfazem as condições do Corolário 6.2.2. Então, calculando a transformada de Laplace da equação diferencial (4), obtemos

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0, \qquad (9)$$

onde usamos a linearidade da transformada para escrever a transformada de uma soma como a soma das transformadas separadas. Usando o corolário para expressar $\mathcal{L}\{y''\}$ e $\mathcal{L}\{y'\}$ em função de $\mathcal{L}\{y\}$, a Eq. (9) fica

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - [s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 2\mathcal{L}\{y\} = 0,$$

ou

$$(s^2 - s - 2)Y(s) + (1 - s)y(0) - y'(0) = 0, \qquad (10)$$

onde $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$. Substituindo os valores de $y(0)$ e $y'(0)$ dados pelas condições iniciais (5) na Eq. (10) e depois resolvendo para $Y(s)$, obtemos

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 2} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)}. \qquad (11)$$

Obtivemos, assim, uma expressão para a transformada de Laplace $Y(s)$ da solução $y = \phi(t)$ do problema de valor inicial dado. Para determinar a função ϕ, precisamos encontrar a função cuja transformada de Laplace é $Y(s)$ dada pela Eq. (11).

Isso pode ser feito mais facilmente expandindo-se a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (11) em frações parciais. Escrevemos, então,

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{a}{s-2} + \frac{b}{s+1} = \frac{a(s+1) + b(s-2)}{(s-2)(s+1)}, \qquad (12)$$

onde os coeficientes a e b têm de ser determinados. Igualando os numeradores da segunda com a quarta expressão na Eq. (12), obtemos

$$s - 1 = a(s+1) + b(s-2),$$

uma equação que tem de ser satisfeita para todos os valores de s. Em particular, fazendo $s = 2$, temos que $a = 1/3$. Analogamente, se $s = -1$, então $b = 2/3$. Substituindo esses valores para a e b, respectivamente, temos

$$Y(s) = \frac{1/3}{s-2} + \frac{2/3}{s+1}. \qquad (13)$$

Finalmente, usando o resultado do Exemplo 5 da Seção 6.1, temos que $(1/3)e^{2t}$ tem transformada $(1/3)(s-2)^{-1}$; analogamen-

te, a transformada de $(2/3)e^{-t}$ é $(2/3)(s + 1)^{-1}$. Portanto, pela linearidade da transformada de Laplace,

$$y = \phi(t) = \tfrac{1}{3}e^{2t} + \tfrac{2}{3}e^{-t}$$

tem transformada (13) e é, portanto, solução do problema de valor inicial (4), (5). Observe que ela satisfaz as condições do Corolário 6.2.2, como supusemos inicialmente. É claro que essa é a mesma solução que obtivemos antes.

O mesmo procedimento pode ser aplicado a equações lineares gerais de segunda ordem com coeficientes constantes, como

$$ay'' + by' + cy = f(t). \qquad (14)$$

Supondo que a solução $y = \phi(t)$ satisfaça as condições do Corolário 6.2.2 para $n = 2$, podemos calcular a transformada da Eq. (14) obtendo, assim,

$$a[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + b[sY(s) - y(0)] + cY(s) = F(s), \qquad (15)$$

onde $F(s)$ é a transformada de $f(t)$. Resolvendo a Eq. (15) para $Y(s)$, encontramos

$$Y(s) = \frac{(as+b)y(0)+ay'(0)}{as^2+bs+c} + \frac{F(s)}{as^2+bs+c}. \qquad (16)$$

O problema, então, está resolvido, desde que possamos encontrar a função $y = \phi(t)$ cuja transformada é $Y(s)$.

Mesmo nesse estágio inicial de nossa discussão, podemos apontar algumas das características essenciais do método da transformada. Em primeiro lugar, a transformada $Y(s)$ da função desconhecida $y = \phi(t)$ é encontrada resolvendo-se uma *equação algébrica* em vez de uma *equação diferencial*, a Eq. (10) em vez da Eq. (4), ou, em geral, a Eq. (15) em vez da Eq. (14). Essa é a chave da utilidade da transformada de Laplace para resolver equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes — o problema é reduzido de uma equação diferencial para uma equação algébrica. A seguir, a solução satisfazendo as condições iniciais dadas é encontrada automaticamente, de modo que a tarefa de determinar os valores apropriados para as constantes arbitrárias na solução geral não aparece. Além disso, como indicado na Eq. (15), as equações não-homogêneas são tratadas exatamente da mesma forma que as homogêneas; não é necessário resolver primeiro a equação homogênea correspondente. Finalmente, o método pode ser aplicado da mesma forma para equações de ordem maior, desde que suponhamos que a solução satisfaça as condições do corolário para o valor apropriado de n.

Observe que o polinômio $as^2 + bs + c$ no denominador da fração à direita do sinal de igualdade na Eq. (16) é precisamente o polinômio característico associado à Eq. (14). Como a expansão de $Y(s)$ em frações parciais para determinar $\phi(t)$ necessita da fatoração desse polinômio, a utilização da transformada de Laplace não evita a necessidade de se encontrar as raízes da equação característica. Para equações de ordem maior do que dois, isso pode ser um problema algébrico difícil, especialmente se as raízes forem irracionais ou complexas.

A dificuldade maior que ocorre ao se resolver um problema de valor inicial pela técnica da transformada está na determinação da função $y = \phi(t)$ correspondente à transformada $Y(s)$. Esse problema é conhecido como o problema da inversão da transformada de Laplace; $\phi(t)$ é dita a transformada inversa correspondente a $Y(s)$ e o processo de encontrar $\phi(t)$ a partir de $Y(s)$ é conhecido como inverter a transformada. Usamos, também, a notação $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ para denotar a transformada inversa de $Y(s)$. Existe uma fórmula geral para a transformada de Laplace inversa, mas necessita de conhecimentos sobre a teoria de funções de uma variável complexa e não vamos considerá-la neste livro. No entanto, ainda é possível desenvolver muitas propriedades importantes da transformada de Laplace e resolver muitos problemas interessantes sem usar variáveis complexas.

Ao resolver o problema de valor inicial (4), (5), não consideramos o problema de poder existir outras funções, além da dada pela Eq. (8), que também tenham a transformada (13). De fato, pode-se mostrar que, se f é uma função contínua cuja transformada de Laplace é F, então não existe outra função contínua tendo a mesma transformada. Em outras palavras, existe, essencialmente, uma bijeção entre as funções e suas transformadas de Laplace. Esse fato sugere a compilação de uma tabela, como a Tabela 6.2.1, que fornece as transformadas das funções encontradas com mais freqüência e vice-versa. As funções na segunda coluna da Tabela 6.2.1 são as transformadas das funções na primeira coluna. Talvez mais importante, as funções na primeira coluna são as transformadas inversas das funções na segunda coluna. Assim, por exemplo, se a transformada da solução de uma equação diferencial é conhecida, a solução pode ser encontrada, muitas vezes, olhando-se, simplesmente, na tabela. Algumas das funções na Tabela 6.2.1 foram usadas como exemplos, outras aparecem como problemas na Seção 6.1, enquanto outras serão encontradas mais adiante neste capítulo. A terceira coluna da tabela indica onde pode ser encontrada a dedução da transformada dada. Embora a Tabela 6.2.1 seja suficiente para os exemplos e problemas dados neste livro, estão disponíveis tabelas muito mais completas (veja a lista de referências no final deste capítulo). Transformadas e transformadas inversas também podem ser encontradas através da utilização de sistemas algébricos computacionais.

Com freqüência, uma transformada de Laplace $F(s)$ pode ser expressa como uma soma de diversas parcelas,

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_n(s). \qquad (17)$$

Suponha que $f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}, \ldots, f_n(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\}$. Então, a função

$$f(t) = f_1(t) + \cdots + f_n(t)$$

tem transformada de Laplace $F(s)$. Pela unicidade enunciada anteriormente, nenhuma outra função contínua f tem a mesma transformada. Assim,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \cdots + \mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\}; \qquad (18)$$

isto é, a transformada de Laplace inversa também é um operador linear.

É conveniente, em muitos problemas, usar essa propriedade decompondo uma transformada dada em uma soma de funções cujas transformadas inversas já são conhecidas ou podem ser encontradas em uma tabela. Expansões em frações parciais são particularmente úteis nesse contexto e um resultado geral cobrindo muitos casos é dado no Problema 38. Outras propriedades úteis da transformada de Laplace serão deduzidas mais tarde neste capítulo.

Os exemplos a seguir fornecem ilustrações adicionais da técnica de resolução de problemas de valor inicial usando transformada de Laplace e expansão em frações parciais.

TABELA 6.2.1 Transformadas de Laplace Elementares

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Notas
1. 1	$\dfrac{1}{s}, \quad s > 0$	Seção 6.1; Ex. 4
2. e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$	Seção 6.1; Ex. 5
3. t^n; $n =$ inteiro positivo	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$	Seção 6.1; Prob. 27
4. t^p, $p > -1$	$\dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$	Seção 6.1; Prob. 27
5. sen at	$\dfrac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	Seção 6.1; Ex. 6
6. cos at	$\dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$	Seção 6.1; Prob. 6
7. senh at	$\dfrac{a}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$	Seção 6.1; Prob. 8
8. cosh at	$\dfrac{s}{s^2-a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$	Seção 6.1; Prob. 7
9. e^{at} sen bt	$\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$	Seção 6.1; Prob. 13
10. e^{at} cos bt	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$	Seção 6.1; Prob. 14
11. $t^n e^{at}$, $n =$ inteiro positivo	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$	Seção 6.1; Prob. 18
12. $u_c(t)$	$\dfrac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$	Seção 6.3
13. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	Seção 6.3
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	Seção 6.3
15. $f(ct)$	$\dfrac{1}{c}F\left(\dfrac{s}{c}\right), \quad c > 0$	Seção 6.3; Prob. 19
16. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$	$F(s)G(s)$	Seção 6.6
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}	Seção 6.5
18. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$	Seção 6.2
19. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$	Seção 6.2; Prob. 28

Exemplo 1

Encontre a solução da equação diferencial

$$y'' + y = \text{sen}\, 2t, \tag{19}$$

satisfazendo as condições iniciais

$$y(0) = 2, \qquad y'(0) = 1. \tag{20}$$

Vamos supor que esse problema de valor inicial tenha uma solução $y = \phi(t)$ com as duas primeiras derivadas satisfazendo as condições do Corolário 6.2.2. Então, calculando a transformada de Laplace da equação diferencial, temos

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = 2/(s^2 + 4),$$

onde a transformada de sen $2t$ foi obtida da linha 5 na Tabela 6.2.1. Substituindo $y(0)$ e $y'(0)$ pelos valores dados nas condições iniciais e resolvendo para $Y(s)$, obtemos

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}. \tag{21}$$

Usando frações parciais, podemos escrever $Y(s)$ na forma

$$Y(s) = \frac{as + b}{s^2 + 1} + \frac{cs + d}{s^2 + 4}$$

$$= \frac{(as + b)(s^2 + 4) + (cs + d)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}. \tag{22}$$

Expandindo o numerador da fração à direita do segundo sinal de igualdade na Eq. (22) e igualando-o ao numerador na Eq. (21), encontramos

$$2s^3 + s^2 + 8s + 6 = (a + c)s^3$$
$$+ (b + d)s^2 + (4a + c)s + (4b + d)$$

para todo s. Então, comparando os coeficientes de mesma potência de s, temos

$$a + c = 2, \qquad b + d = 1,$$
$$4a + c = 8, \qquad 4b + d = 6.$$

Em conseqüência, $a = 2$, $c = 0$, $b = 5/3$ e $d = -2/3$, donde

$$Y(s) = \frac{2s}{s^2 + 1} + \frac{5/3}{s^2 + 1} - \frac{2/3}{s^2 + 4}. \tag{23}$$

Das linhas 5 e 6 da Tabela 6.2.1, a solução do problema de valor inicial dado é

$$y = \phi(t) = 2\cos t + \tfrac{5}{3}\,\text{sen}\, t - \tfrac{1}{3}\,\text{sen}\, 2t. \tag{24}$$

Exemplo 2

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y^{(4)} - y = 0, \tag{25}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0. \tag{26}$$

Neste problema, precisamos supor que a solução $y = \phi(t)$ satisfaça as condições do Corolário 6.2.2 para $n = 4$. A transformada de Laplace da equação diferencial (25) é

$$s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0) - Y(s) = 0.$$

Então, usando as condições iniciais (26) e resolvendo para $Y(s)$, temos

$$Y(s) = \frac{s^2}{s^4 - 1}. \tag{27}$$

Uma expansão em frações parciais para $Y(s)$ é

$$Y(s) = \frac{as + b}{s^2 - 1} + \frac{cs + d}{s^2 + 1},$$

e segue que

$$(as + b)(s^2 + 1) + (cs + d)(s^2 - 1) = s^2 \tag{28}$$

para todo s. Fazendo $s = 1$ e $s = -1$, respectivamente, na Eq. (28), obtemos o par de equações

$$2(a + b) = 1, \qquad 2(-a + b) = 1,$$

e, portanto, $a = 0$ e $b = 1/2$. Se fizermos $s = 0$ na Eq. (28), então $b - d = 0$, de modo que $d = 1/2$. Finalmente, igualando as parcelas contendo as potências cúbicas nos dois lados da Eq. (28), encontramos que $a + c = 0$, logo $c = 0$. Assim,

$$Y(s) = \frac{1/2}{s^2 - 1} + \frac{1/2}{s^2 + 1}, \tag{29}$$

e, das linhas 7 e 5 da Tabela 6.2.1, a solução do problema de valor inicial (25), (26) é

$$y = \phi(t) = \frac{\text{senh}\, t + \text{sen}\, t}{2}. \tag{30}$$

As aplicações elementares mais importantes da transformada de Laplace estão no estudo de vibrações mecânicas e na análise de circuitos elétricos; as equações que governam esses fenômenos foram deduzidas na Seção 3.8. Um sistema massa-mola em vibração tem equação de movimento

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + \gamma\frac{du}{dt} + ku = F(t), \qquad (31)$$

onde m é a massa, γ é o coeficiente de amortecimento, k é a constante da mola e $F(t)$ é a força externa que está sendo aplicada. A equação que descreve um circuito elétrico com indutância L, resistência R e capacitância C (um circuito *LRC*) é

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t), \qquad (32)$$

onde $Q(t)$ é a carga no capacitor e $E(t)$ é a voltagem aplicada. Em termos da corrente $I(t) = dQ(t)/dt$, podemos diferenciar a Eq. (32) e escrever

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}(t). \qquad (33)$$

Também têm de ser dadas condições iniciais adequadas para u, Q ou I.

Observamos anteriormente, na Seção 3.8, que a Eq. (31) para o sistema massa-mola e a Eq. (32) ou (33) para o circuito elétrico são matematicamente idênticas, diferindo, apenas, pela interpretação das constantes e das variáveis que aparecem na equação. Existem outros problemas físicos que levam à mesma equação diferencial. Assim, uma vez resolvido o problema matemático, sua solução pode ser interpretada para o problema físico correspondente de interesse imediato.

Nas listas de problemas ao final desta e de outras seções deste capítulo, são dados muitos problemas de valor inicial para equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes. Muitos podem ser interpretados como modelos de sistemas físicos particulares, mas, em geral, não explicitamos isso.

Problemas

Nos problemas de 1 a 10, encontre a transformada de Laplace inversa da função dada.

1. $\dfrac{3}{s^2+4}$
2. $\dfrac{4}{(s-1)^3}$
3. $\dfrac{2}{s^2+3s-4}$
4. $\dfrac{3s}{s^2-s-6}$
5. $\dfrac{2s+2}{s^2+2s+5}$
6. $\dfrac{2s-3}{s^2-4}$
7. $\dfrac{2s+1}{s^2-2s+2}$
8. $\dfrac{8s^2-4s+12}{s(s^2+4)}$
9. $\dfrac{1-2s}{s^2+4s+5}$
10. $\dfrac{2s-3}{s^2+2s+10}$

Nos problemas de 11 a 23, use a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial dado.

11. $y'' - y' - 6y = 0;\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = -1$
12. $y'' + 3y' + 2y = 0;\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$
13. $y'' - 2y' + 2y = 0;\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1$
14. $y'' - 4y' + 4y = 0;\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 1$
15. $y'' - 2y' + 4y = 0;\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = 0$
16. $y'' + 2y' + 5y = 0;\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = -1$
17. $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0;$
$y(0) = 0,\quad y'(0) = 1,\quad y''(0) = 0,\quad y'''(0) = 1$
18. $y^{(4)} - y = 0;\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0,\quad y''(0) = 1,\quad y'''(0) = 0$
19. $y^{(4)} - 4y = 0;\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0,\quad y''(0) = -2,\quad y'''(0) = 0$
20. $y'' + \omega^2 y = \cos 2t,\quad \omega^2 \neq 4;\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$
21. $y'' - 2y' + 2y = \cos t;\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$
22. $y'' - 2y' + 2y = e^{-t};\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1$
23. $y'' + 2y' + y = 4e^{-t};\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = -1$

Nos problemas de 24 a 26, encontre a transformada de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$ da solução do problema de valor inicial dado. Um método para determinar a transformada inversa é desenvolvido na Seção 6.3.

24. $y'' + 4y = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi, \\ 0, & \pi \le t < \infty; \end{cases}\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0$
25. $y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t < \infty; \end{cases}\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 0$
26. $y'' + 4y = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ 1, & 1 \le t < \infty; \end{cases}\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 0$

27. As transformadas de Laplace de certas funções podem ser encontradas de modo conveniente pelas suas expansões em séries de Taylor.
(a) Use a série de Taylor para sen t,
$$\operatorname{sen} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
e, supondo que a transformada de Laplace dessa série possa ser calculada termo a termo, verifique que
$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{s^2+1}, \qquad s > 1.$$
(b) Seja
$$f(t) = \begin{cases} (\operatorname{sen} t)/t, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$
Encontre a série de Taylor de f em torno de $t = 0$. Supondo que a transformada de Laplace dessa função possa ser calculada termo a termo, verifique que
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \operatorname{arctg}(1/s), \qquad s > 1.$$

(c) A função de Bessel de primeira espécie de ordem zero J_0 tem série de Taylor (veja a Seção 5.8)

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Supondo que as transformadas de Laplace a seguir possam ser calculadas termo a termo, verifique que

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = (s^2+1)^{-1/2}, \qquad s > 1,$$

e

$$\mathcal{L}\{J_0(\sqrt{t})\} = s^{-1}e^{-1/4s}, \qquad s > 0.$$

Os problemas 28 a 36 dizem respeito à diferenciação da transformada de Laplace.

28. Seja

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

É possível mostrar que, desde que f satisfaça as condições do Teorema 6.1.2, é legítimo diferenciar sob o sinal de integral em relação ao parâmetro s quando $s > a$.
(a) Mostre que $F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}$.
(b) Mostre que $F^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}$; portanto, diferenciar a transformada de Laplace corresponde a multiplicar a função original por $-t$.

Nos problemas de 29 a 34, use o resultado do Problema 28 para encontrar a transformada de Laplace da função dada; a e b são números reais e n é um inteiro positivo.

29. te^{at}
30. $t^2 \operatorname{sen} bt$
31. t^n
32. $t^n e^{at}$
33. $te^{at} \operatorname{sen} bt$
34. $te^{at} \cos bt$
35. Considere a equação de Bessel de ordem zero

$$ty'' + y' + ty = 0.$$

Lembre-se, da Seção 5.4, que $t = 0$ é um ponto singular regular para essa equação e, portanto, as soluções podem se tornar ilimitadas quando $t \to 0$. No entanto, vamos tentar determinar se existem soluções que permaneçam limitadas em $t = 0$ e que tenham derivadas finitas aí. Supondo que existe tal solução $y = \phi(t)$, seja $Y(s) = \mathcal{L}\{\phi(t)\}$.
(a) Mostre que $Y(s)$ satisfaz

$$(1+s^2)Y'(s) + sY(s) = 0.$$

(b) Mostre que $Y(s) = c(1 + s^2)^{-1/2}$, onde c é uma constante arbitrária.
(c) Escrevendo $(1 + s^2)^{-1/2} = s^{-1}(1 + s^{-2})^{-1/2}$, expandindo em uma série binomial válida para $s > 1$ e supondo que é permitido inverter a transformada termo a termo, mostre que

$$y = c\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = cJ_0(t),$$

onde J_0 é a função de Bessel de primeira espécie de ordem zero. Note que $J_0(0) = 1$ e que J_0 tem derivada finita de todas as ordens em $t = 0$. Foi mostrado na Seção 5.8 que a segunda solução dessa equação torna-se ilimitada quando $t \to 0$.

36. Nos problemas de valor inicial a seguir, use os resultados do Problema 28 para encontrar a equação diferencial satisfeita por $Y(s) = \mathcal{L}\{\phi(t)\}$, onde $y = \phi(t)$ é a solução do problema de valor inicial dado.
(a) $y'' - ty = 0$;
$y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ (equação de Airy)
(b) $(1 - t^2)y'' - 2ty' + \alpha(\alpha+1)y = 0$;
$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ (equação de Legendre)

Note que a equação diferencial para $Y(s)$ é de primeira ordem no item (a), mas é de segunda ordem no item (b). Isso é devido ao fato de t aparecer com potência no máximo um na equação do item (a) e com potência dois na equação do item (b). Isso ilustra o fato de que a transformada de Laplace nem sempre é útil para se resolver equações diferenciais com coeficientes variáveis, a menos que todos os coeficientes sejam, no máximo, funções lineares da variável independente.

37. Suponha que

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau.$$

Se $G(s)$ e $F(s)$ são as transformadas de Laplace de g e f, respectivamente, mostre que

$$G(s) = F(s)/s.$$

38. Vamos mostrar, neste problema, como se pode usar uma expansão geral em frações parciais para se calcular muitas transformadas de Laplace inversas. Suponha que

$$F(s) = P(s)/Q(s),$$

onde $Q(s)$ é um polinômio de grau n com raízes distintas $r_1, \ldots, r_n$, e $P(s)$ é um polinômio de grau menor do que n. Nesse caso, é possível mostrar que $P(s)/Q(s)$ tem uma expansão em frações parciais da forma

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s-r_1} + \cdots + \frac{A_n}{s-r_n}, \qquad \text{(i)}$$

onde os coeficientes $A_1, \ldots, A_n$ precisam ser determinados.
(a) Mostre que

$$A_k = P(r_k)/Q'(r_k), \qquad k = 1, \ldots, n. \qquad \text{(ii)}$$

Sugestão: Um modo de fazer isso é multiplicar a Eq. (i) por $s - r_k$ e depois tomar o limite quando $s \to r_k$.
(b) Mostre que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(r_k)}{Q'(r_k)} e^{r_k t}. \qquad \text{(iii)}$$

6.3 Funções Degrau

Na Seção 6.2, esboçamos o procedimento geral usado ao se resolver um problema de valor inicial através da transformada de Laplace. Algumas das aplicações mais elementares do método da transformada ocorrem na solução de equações diferenciais lineares sob a ação de funções descontínuas ou de impulso. Equações desse tipo aparecem com freqüência na análise do fluxo de corrente em circuitos elétricos ou nas vibrações de sistemas mecânicos. Nesta seção e nas seguintes, vamos desenvolver algumas propriedades adicionais da transformada de Laplace úteis na solução de tais problemas. A menos que se diga explicitamente

o contrário, supomos que todas as funções a seguir sejam seccionalmente contínuas e de ordem exponencial, de modo que suas transformadas de Laplace existam, pelo menos para s suficientemente grande.

Para tratar de maneira efetiva funções com saltos, é útil definir uma função conhecida como **função degrau unitário**, ou **função de Heaviside**. Essa função será denotada por u_c e é definida por

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ 1, & t \geq c, \end{cases} \qquad c \geq 0. \tag{1}$$

A Fig. 6.3.1 mostra o gráfico de $y = u_c(t)$. O degrau também pode ser negativo. Por exemplo, a Fig. 6.3.2 mostra o gráfico de $y = 1 - u_c(t)$.

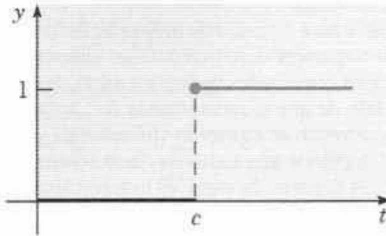


FIG. 6.3.1 Gráfico de $y = u_c(t)$.

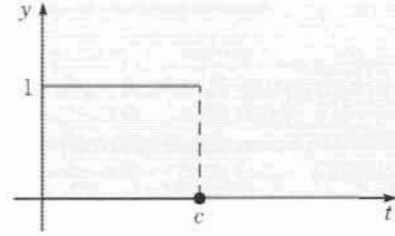


FIG. 6.3.2 Gráfico de $y = 1 - u_c(t)$.

Exemplo 1

Esboce o gráfico de $y = h(t)$, onde

$$h(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t), \qquad t \geq 0.$$

Da definição de $u_c(t)$ na Eq. (1), temos

$$h(t) = \begin{cases} 0 - 0 = 0, & 0 \leq t < \pi, \\ 1 - 0 = 1, & \pi \leq t < 2\pi, \\ 1 - 1 = 0, & 2\pi \leq t < \infty. \end{cases}$$

Logo, a equação $y = h(t)$ tem o gráfico ilustrado na Fig. 6.3.3. Pode-se pensar nessa função como um pulso retangular.

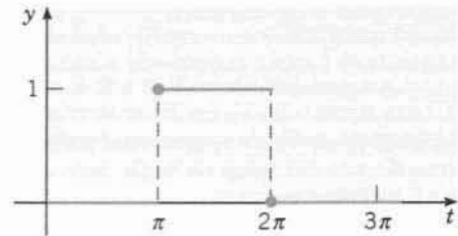


FIG. 6.3.3 Gráfico de $y = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$.

A transformada de Laplace de u_c é determinada facilmente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u_c(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} u_c(t)\, dt = \int_c^\infty e^{-st}\, dt \\ &= \frac{e^{-cs}}{s}, \qquad s > 0. \end{aligned} \tag{2}$$

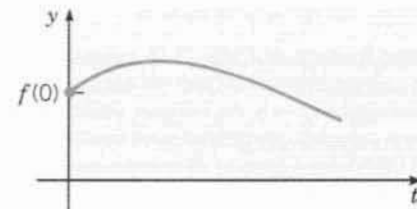
Para uma função f dada, definida para $t \geq 0$, vamos considerar, muitas vezes, a função relacionada g definida por

$$y = g(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ f(t - c), & t \geq c, \end{cases}$$

que representa uma translação de f por uma distância c no sentido dos t positivos; veja a Fig. 6.3.4. Em termos da função degrau unitário, podemos escrever $g(t)$ na forma conveniente

$$g(t) = u_c(t) f(t - c).$$

A função degrau unitário é particularmente importante no uso da transformada devido à relação dada a seguir entre a transformada de $f(t)$ e a de sua translação $u_c(t)f(t - c)$.



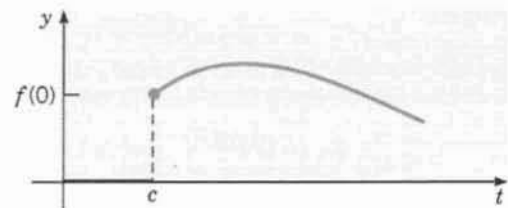


FIG. 6.3.4 Uma translação da função dada. (a) $y = f(t)$; (b) $y = u_c(t)f(t - c)$.

Teorema 6.3.1

Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a \geq 0$ e se c é uma constante positiva, então

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-cs}F(s), \quad s > a. \quad (3)$$

Reciprocamente, se $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, então

$$u_c(t)f(t-c) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\}. \quad (4)$$

O Teorema 6.3.1 diz, simplesmente, que a translação de $f(t)$ por uma distância c no sentido dos t positivos corresponde à multiplicação de $F(s)$ por e^{-cs}. Para provar o Teorema 6.3.1, basta calcular a transformada de $u_c(t)f(t-c)$:

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = \int_0^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)\,dt$$

$$= \int_c^\infty e^{-st}f(t-c)\,dt.$$

Fazendo uma mudança na variável de integração $\xi = t - c$, temos

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = \int_0^\infty e^{-(\xi+c)s}f(\xi)\,d\xi$$
$$= e^{-cs}\int_0^\infty e^{-s\xi}f(\xi)\,d\xi = e^{-cs}F(s).$$

Logo, estabelecemos a Eq. (3); a Eq. (4) segue calculando-se a transformada inversa na Eq. (3).

Um caso simples desse teorema é quando $f(t) = 1$. Lembrando que $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$, temos, imediatamente, da Eq. (3), que $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = e^{-cs}/s$. Esse resultado está de acordo com o da Eq. (2). Os Exemplos 2 e 3 ilustram ainda mais como o Teorema 6.3.1 pode ser usado no cálculo de transformadas e transformadas inversas.

Exemplo 2

Se a função f é definida por

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \leq t < \pi/4, \\ \operatorname{sen} t + \cos(t - \pi/4), & t \geq \pi/4, \end{cases}$$

encontre $\mathcal{L}\{f(t)\}$. O gráfico de $y = f(t)$ está ilustrado na Fig. 6.3.5.

Note que $f(t) = \operatorname{sen} t + g(t)$, onde

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi/4, \\ \cos(t - \pi/4), & t \geq \pi/4. \end{cases}$$

Logo,

$$g(t) = u_{\pi/4}(t)\cos(t - \pi/4),$$

e

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} + \mathcal{L}\{u_{\pi/4}(t)\cos(t - \pi/4)\}$$
$$= \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} + e^{-\pi s/4}\mathcal{L}\{\cos t\}.$$

Introduzindo as transformadas de sen t e cos t, obtemos

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s/4}\frac{s}{s^2+1} = \frac{1 + se^{-\pi s/4}}{s^2+1}.$$

Você deve comparar esse método com o cálculo de $\mathcal{L}\{f(t)\}$ diretamente da definição.

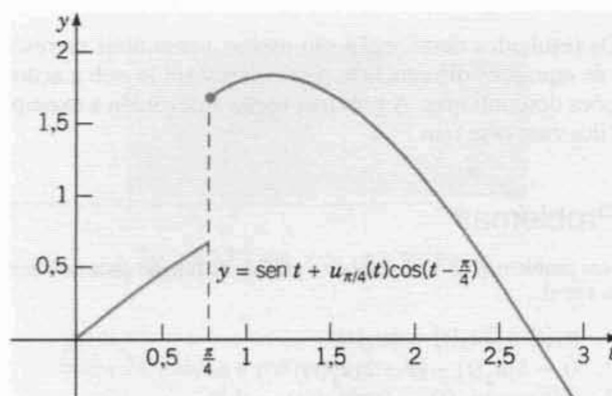


FIG. 6.3.5 Gráfico da função no Exemplo 2.

Exemplo 3

Encontre a transformada inversa de

$$F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2}.$$

Da linearidade da transformada inversa, temos

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\}$$
$$= t - u_2(t)(t-2).$$

A função f também pode ser escrita como

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2, \\ 2, & t \geq 2. \end{cases}$$

O teorema a seguir contém outra propriedade bastante útil das transformadas de Laplace que são semelhantes às dadas no Teorema 6.3.1.

Teorema 6.3.2

Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a \geq 0$ e se c é uma constante, então

$$\mathcal{L}\{e^{ct} f(t)\} = F(s - c), \qquad s > a + c. \tag{5}$$

Reciprocamente, se $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, então

$$e^{ct} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s - c)\}. \tag{6}$$

De acordo com o Teorema 6.3.2, a multiplicação de $f(t)$ por e^{ct} resulta na translação da transformada $F(s)$ a uma distância c no sentido dos s positivos e reciprocamente. A demonstração desse teorema necessita do cálculo de $\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\}$. Então,

$$\mathcal{L}\{e^{ct} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{ct} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-c)t} f(t)\, dt$$
$$= F(s - c),$$

que é a Eq. (5). A restrição $s > a + c$ segue da observação de que, de acordo com a hipótese (ii) do Teorema 6.1.2, $|f(t)| \leq Ke^{at}$; portanto, $|e^{ct}f(t)| \leq Ke^{(a+c)t}$. A Eq. (6) segue calculando-se a transformada inversa da Eq. (5) e a demonstração está completa.

A aplicação principal do Teorema 6.3.2 está no cálculo de determinadas transformadas inversas, como ilustrado no Exemplo 4.

Exemplo 4

Encontre a transformada inversa de

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 5}.$$

Completando o quadrado no denominador, podemos escrever

$$G(s) = \frac{1}{(s-2)^2 + 1} = F(s - 2),$$

onde $F(s) = (s^2 + 1)^{-1}$. Como $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \text{sen}\, t$, segue do Teorema 6.3.2 que

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = e^{2t}\, \text{sen}\, t.$$

Os resultados desta seção são muitas vezes úteis na resolução de equações diferenciais, particularmente as sob a ação de funções descontínuas. A próxima seção é devotada a exemplos que ilustram esse fato.

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, esboce o gráfico da função dada no intervalo $t \geq 0$.

1. $u_1(t) + 2u_3(t) - 6u_4(t)$
2. $(t - 3)u_2(t) - (t - 2)u_3(t)$
3. $f(t - \pi)u_\pi(t)$, onde $f(t) = t^2$
4. $f(t - 3)u_3(t)$, onde $f(t) = \text{sen}\, t$
5. $f(t - 1)u_2(t)$, onde $f(t) = 2t$
6. $(t - 1)u_1(t) - 2(t - 2)u_2(t) + (t - 3)u_3(t)$

Nos problemas de 7 a 12, encontre a transformada de Laplace da função dada.

7. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ (t-2)^2, & t \geq 2 \end{cases}$
8. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t^2 - 2t + 2, & t \geq 1 \end{cases}$
9. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ t - \pi, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi \end{cases}$
10. $f(t) = u_1(t) + 2u_3(t) - 6u_4(t)$
11. $f(t) = (t - 3)u_2(t) - (t - 2)u_3(t)$
12. $f(t) = t - u_1(t)(t - 1), \quad t \geq 0$

Nos problemas de 13 a 18, encontre a transformada de Laplace inversa da função dada.

13. $F(s) = \dfrac{3!}{(s-2)^4}$
14. $F(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s^2 + s - 2}$
15. $F(s) = \dfrac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2 - 2s + 2}$
16. $F(s) = \dfrac{2e^{-2s}}{s^2 - 4}$
17. $F(s) = \dfrac{(s-2)e^{-s}}{s^2 - 4s + 3}$
18. $F(s) = \dfrac{e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} - e^{-4s}}{s}$
19. Suponha que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a \geq 0$.
(a) Mostre que, se c é uma constante positiva, então
$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right), \qquad s > ca.$$
(b) Mostre que, se k é uma constante positiva, então
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right).$$
(c) Mostre que, se a e b são constantes com $a > 0$, então
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(as + b)\} = \frac{1}{a} e^{-bt/a} f\left(\frac{t}{a}\right).$$

Nos problemas de 20 a 23, use os resultados do Problema 19 para encontrar a transformada de Laplace inversa da função dada.

20. $F(s) = \dfrac{2^{n+1}n!}{s^{n+1}}$

21. $F(s) = \dfrac{2s + 1}{4s^2 + 4s + 5}$

22. $F(s) = \dfrac{1}{9s^2 - 12s + 3}$

23. $F(s) = \dfrac{e^2 e^{-4s}}{2s - 1}$

Nos problemas de 24 a 27, encontre a transformada de Laplace da função dada. No Problema 27, suponha que seja permitido integrar a série infinita termo a termo.

24. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & t \ge 1 \end{cases}$

25. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0, & 1 \le t < 2 \\ 1, & 2 \le t < 3 \\ 0, & t \ge 3 \end{cases}$

26. $f(t) = 1 - u_1(t) + \cdots + u_{2n}(t) - u_{2n+1}(t)$
$= 1 + \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k u_k(t)$

27. $f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k u_k(t)$. Veja a Fig. 6.3.6.

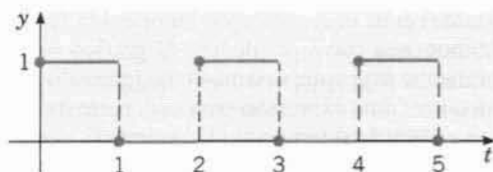


FIG. 6.3.6 Uma onda quadrada.

28. Suponha que f satisfaça $f(t + T) = f(t)$ para todo $t \ge 0$ e para algum número positivo fixo T; f é dita periódica com período T em $0 \le t < \infty$. Mostre que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)\, dt}{1 - e^{-sT}}.$$

Nos problemas de 29 a 32, use o resultado do Problema 28 para encontrar a transformada de Laplace da função dada.

29. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & 1 \le t < 2; \end{cases}$
$f(t + 2) = f(t)$.
Compare com o Problema 27.

30. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ -1, & 1 \le t < 2; \end{cases}$
$f(t + 2) = f(t)$.
Veja a Fig. 6.3.7.

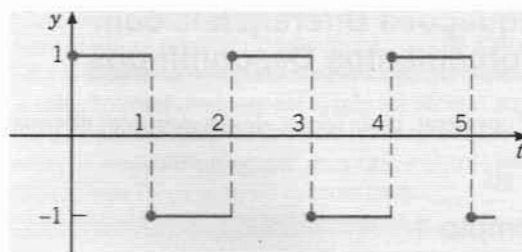


FIG. 6.3.7 Uma onda quadrada.

31. $f(t) = t, \quad 0 \le t < 1;$
$f(t + 1) = f(t)$.
Veja a Fig. 6.3.8.

32. $f(t) = \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t < \pi;$
$f(t + \pi) = f(t)$.
Veja a Fig. 6.3.9.

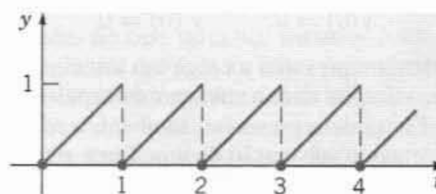


FIG. 6.3.8 Uma onda dente de serra.

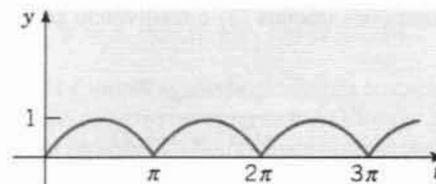


FIG. 6.3.9 Uma onda seno retificada.

33. (a) Se $f(t) = 1 - u_1(t)$, encontre $\mathcal{L}\{f(t)\}$; compare com o Problema 24. Esboce o gráfico de $y = f(t)$.
(b) Seja $g(t) = \int_0^t f(\xi)\, d\xi$, onde a função f está definida em (a). Esboce o gráfico de $y = g(t)$ e encontre $\mathcal{L}\{g(t)\}$.
(c) Seja $h(t) = g(t) - u_1(t)g(t - 1)$, onde g está definida em (b). Esboce o gráfico de $y = h(t)$ e encontre $\mathcal{L}\{h(t)\}$.

34. Considere a função p definida por

$$p(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ 2 - t, & 1 \le t < 2; \end{cases} \qquad p(t + 2) = p(t).$$

(a) Esboce o gráfico de $y = p(t)$.
(b) Encontre $\mathcal{L}\{p(t)\}$ notando que p é a extensão periódica da função h no Problema 33(c) e usando, depois, o resultado do Problema 28.
(c) Encontre $\mathcal{L}\{p(t)\}$ observando que

$$p(t) = \int_0^t f(t)\, dt,$$

onde f é a função no Problema 30, e usando, depois, o Teorema 6.2.1.

6.4 Equações Diferenciais com Forçamentos Descontínuos

Vamos considerar, nesta seção, alguns exemplos nos quais o termo não-homogêneo, ou forçamento, é descontínuo.

Exemplo 1

Encontre a solução da equação diferencial

$$2y'' + y' + 2y = g(t), \tag{1}$$

onde

$$g(t) = u_5(t) - u_{20}(t) = \begin{cases} 1, & 5 \le t < 20, \\ 0, & 0 \le t < 5 \quad \text{e} \quad t \ge 20. \end{cases} \tag{2}$$

Suponha que as condições iniciais são

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0. \tag{3}$$

Esse problema representa a carga em um capacitor em um circuito elétrico simples onde a voltagem é um pulso unitário para $5 \le t < 20$. Ele pode representar, também, a resposta de um oscilador amortecido sob a ação de uma força $g(t)$.

A transformada de Laplace da Eq. (1) é

$$2s^2Y(s) - 2sy(0) - 2y'(0) + sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \mathcal{L}\{u_5(t)\} - \mathcal{L}\{u_{20}(t)\} = (e^{-5s} - e^{-20s})/s.$$

Usando as condições iniciais (3) e resolvendo para $Y(s)$, obtemos

$$Y(s) = \frac{e^{-5s} - e^{-20s}}{s(2s^2 + s + 2)}. \tag{4}$$

Para encontrar $y = \phi(t)$, é conveniente escrever $Y(s)$ como

$$Y(s) = (e^{-5s} - e^{-20s})H(s), \tag{5}$$

onde

$$H(s) = 1/s(2s^2 + s + 2). \tag{6}$$

Então, se $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$, temos

$$y = \phi(t) = u_5(t)h(t - 5) - u_{20}(t)h(t - 20). \tag{7}$$

Observe que usamos o Teorema 6.3.1 para escrever a transformada inversa de $e^{-5s}H(s)$ e $e^{-20s}H(s)$, respectivamente. Finalmente, para determinar $h(t)$, usamos a expansão em frações parciais de $H(s)$:

$$H(s) = \frac{a}{s} + \frac{bs + c}{2s^2 + s + 2}. \tag{8}$$

Determinando os coeficientes, encontramos $a = 1/2$, $b = -1$ e $c = -1/2$. Logo,

$$H(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{s + \frac{1}{2}}{2s^2 + s + 2} = \frac{1/2}{s} - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{(s + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4}}{(s + \frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}}, \tag{9}$$

de modo que, pelas linhas 9 e 10 da Tabela 6.2.1, obtemos

$$h(t) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}[e^{-t/4}\cos(\sqrt{15}\,t/4) + (\sqrt{15}/15)e^{-t/4}\,\mathrm{sen}(\sqrt{15}\,t/4)]. \tag{10}$$

Na Fig. 6.4.1, o gráfico da solução $y = \phi(t)$ das Eqs. (7) e (10) mostra que a solução tem três partes distintas. Para $0 < t < 5$, a equação diferencial é

$$2y'' + y' + 2y = 0 \tag{11}$$

e as condições iniciais são dadas pela Eq. (3). Como as condições iniciais não fornecem energia ao sistema e como não há força externa, o sistema permanece em repouso, isto é, $y = 0$ para $0 < t < 5$. Isso pode ser confirmado resolvendo-se a Eq. (11) sujeita às condições iniciais (3). Em particular, calculando a solução e suas derivadas em $t = 5$ ou, mais precisamente, quando t tende a 5 por valores menores, temos

$$y(5) = 0, \qquad y'(5) = 0. \tag{12}$$

Quando $t > 5$, a equação diferencial fica

$$2y'' + y' + 2y = 1, \tag{13}$$

cuja solução é a soma de uma constante (a resposta à força externa constante) com uma oscilação amortecida (a solução da equação homogênea correspondente). O gráfico na Fig. 6.4.1 mostra claramente esse comportamento no intervalo $5 \le t \le 20$. Pode-se encontrar uma expressão para essa parte da solução resolvendo-se a equação diferencial (13) sujeita às condições iniciais (12). Finalmente, para $t > 20$, a equação diferencial torna-se novamente a Eq. (11) e as condições iniciais são obtidas cal-

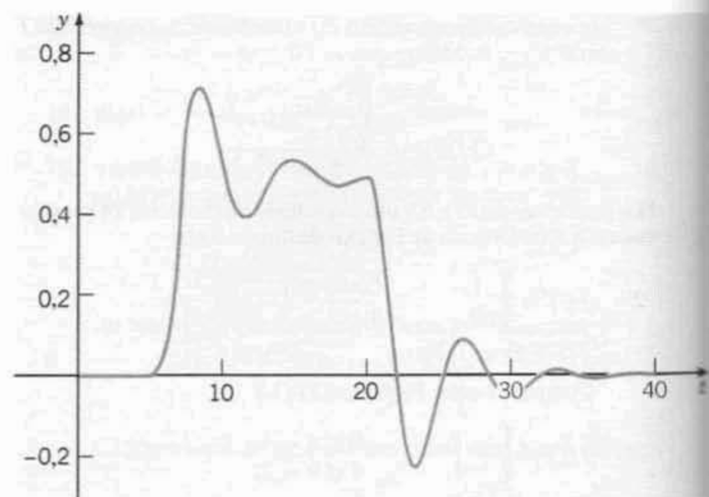


FIG. 6.4.1 Solução do problema de valor inicial (1), (2), (3).

culando-se a solução das Eqs. (13), (12) e suas derivadas em $t = 20$. Esses valores são

$$y(20) \cong 0{,}50162, \qquad y'(20) \cong 0{,}01125. \tag{14}$$

O problema de valor inicial (11), (14) não contém força externa, de modo que sua solução é uma oscilação amortecida em torno de $y = 0$, como pode ser visto na Fig. 6.4.1.

Embora possa ser útil considerar a solução ilustrada na Fig. 6.4.1 como sendo composta de três problemas de valor inicial separados em três intervalos diferentes, é um tanto tedioso encontrar a solução resolvendo-se esses três problemas separados. O método da transformada de Laplace fornece uma abordagem muito mais conveniente e elegante para esse e outros problemas sob a ação de uma força externa descontínua.

O efeito da descontinuidade da força externa pode ser visto se examinarmos a solução $\phi(t)$ do Exemplo 1 com mais cuidado. De acordo com o Teorema 3.2.1 de existência e unicidade, a solução ϕ e suas duas primeiras derivadas são contínuas exceto, possivelmente, nos pontos $t = 5$ e $t = 20$, onde g é descontínua. Isso também pode ser visto imediatamente da Eq. (7). Pode-se mostrar, também, por cálculos diretos a partir da Eq. (7), que ϕ e ϕ' são contínuas mesmo em $t = 5$ e $t = 20$. No entanto, se calcularmos ϕ'', vemos que

$$\lim_{t\to 5-} \phi''(t) = 0, \qquad \lim_{t\to 5+} \phi''(t) = 1/2.$$

Em conseqüência, $\phi''(t)$ tem um salto de 1/2 em $t = 5$. De maneira semelhante, pode-se mostrar que $\phi''(t)$ tem um salto de $-1/2$ em $t = 20$. Assim, o salto do termo não-homogêneo $g(t)$ nesses pontos é balanceado por um salto correspondente no termo de maior ordem $2y''$ à esquerda do sinal de igualdade na equação.

Considere, agora, a equação linear de segunda ordem geral

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \tag{15}$$

onde p e q são contínuas em algum intervalo $\alpha < t < \beta$, mas g só é seccionalmente contínua aí. Se $y = \psi(t)$ é uma solução da Eq. (15), então ψ e ψ' são contínuas em $\alpha < t < \beta$, mas ψ'' tem descontinuidades do tipo salto nos mesmos pontos que g. Observações semelhantes podem ser feitas para equações de ordem maior; a derivada de ordem mais alta da solução que aparece na equação diferencial tem saltos nos mesmos pontos que o termo não-homogêneo, mas a solução e suas derivadas de ordem mais baixa são contínuas, inclusive nesses pontos.

Exemplo 2

Descreva a natureza qualitativa da solução do problema de valor inicial

$$y'' + 4y = g(t), \tag{16}$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0, \tag{17}$$

onde

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 5, \\ (t-5)/5, & 5 \le t < 10, \\ 1, & t \ge 10, \end{cases} \tag{18}$$

e depois encontre a solução.

Neste exemplo, o termo não-homogêneo tem o gráfico ilustrado na Fig. 6.4.2, que é conhecido como rampa crescente. É relativamente fácil identificar a forma geral da solução. Para $t < 5$, a solução é, simplesmente, $y = 0$. Por outro lado, para $t > 10$, a solução tem a forma

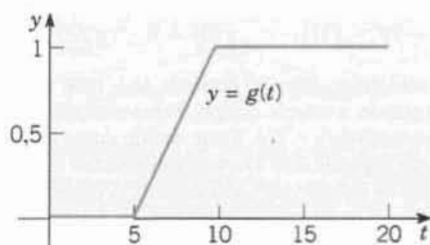


FIG. 6.4.2 Rampa crescente; $y = g(t)$ da Eq. (18).

$$y = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t + 1/4. \tag{19}$$

A constante 1/4 é uma solução particular da equação não-homogênea, enquanto os outros dois termos na solução geral formam a solução geral da equação homogênea correspondente. Assim, a solução (19) corresponde a uma oscilação harmônica simples em torno de $y = 1/4$. Analogamente, no intervalo intermediário $5 < t < 10$, a solução oscila em torno de uma certa função linear. Em um contexto de engenharia, por exemplo, poderíamos estar interessados em saber a amplitude da oscilação estado estacionário.

Para resolver o problema, é conveniente escrever

$$g(t) = [u_5(t)(t-5) - u_{10}(t)(t-10)]/5, \tag{20}$$

como você pode verificar. Calculando a transformada de Laplace da equação diferencial e usando as condições iniciais, obtemos

$$(s^2+4)Y(s) = (e^{-5s} - e^{-10s})/5s^2,$$

ou

$$Y(s) = (e^{-5s} - e^{-10s})H(s)/5, \tag{21}$$

onde

$$H(s) = 1/s^2(s^2+4). \tag{22}$$

Logo, a solução do problema de valor inicial (16), (17), (18) é

$$y = \phi(t) = [u_5(t)h(t-5) - u_{10}(t)h(t-10)]/5, \tag{23}$$

onde $h(t)$ é a transformada inversa de $H(s)$. A expansão em frações parciais de $H(s)$ é

$$H(s) = \frac{1/4}{s^2} - \frac{1/4}{s^2+4}, \qquad (24)$$

e segue, então, das linhas 3 e 5 da Tabela 6.2.1 que

$$h(t) = \tfrac{1}{4}t - \tfrac{1}{8}\,\text{sen}\, 2t. \qquad (25)$$

A Fig. 6.4.3 mostra o gráfico de $y = \phi(t)$. Note que ele tem o aspecto qualitativo indicado anteriormente. Para encontrar a amplitude da oscilação estado estacionário, basta localizar um dos pontos de máximo ou de mínimo para $t > 10$. Igualando a derivada da solução (23) a zero, encontramos que o primeiro máximo está localizado aproximadamente em (10,642; 0,2979), de modo que a amplitude da oscilação é de aproximadamente 0,0479.

Note que nesse exemplo o termo não-homogêneo g é contínuo, mas g' é descontínua em $t = 5$ e $t = 10$. Então, a solução ϕ e suas duas primeiras derivadas são contínuas em toda parte, mas ϕ''' tem descontinuidades em $t = 5$ e $t = 10$ do mesmo tipo das descontinuidades de g' nesses pontos.

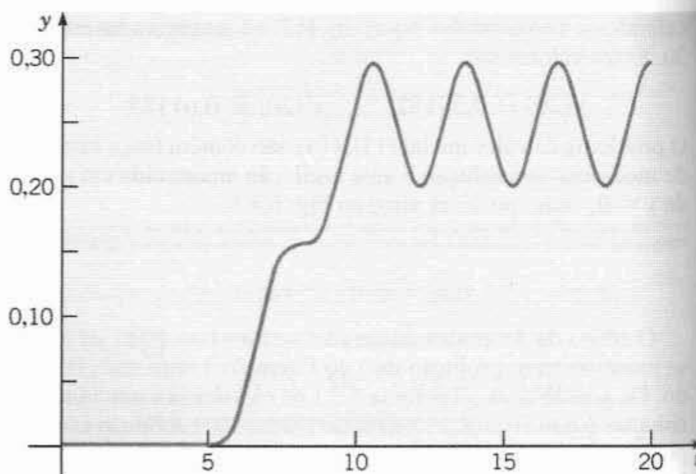


FIG. 6.4.3 Solução do problema de valor inicial (16), (17), (18).

Problemas

Nos problemas de 1 a 13, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Desenhe os gráficos da solução e do termo não-homogêneo; explique a relação entre eles.

1. $y'' + y = f(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$
$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \pi/2 \\ 0, & \pi/2 \le t < \infty \end{cases}$

2. $y'' + 2y' + 2y = h(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$
$h(t) = \begin{cases} 1, & \pi \le t < 2\pi \\ 0, & 0 \le t < \pi \text{ e } t \ge 2\pi \end{cases}$

3. $y'' + 4y = \text{sen}\, t - u_{2\pi}(t)\,\text{sen}(t - 2\pi);$
$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

4. $y'' + 4y = \text{sen}\, t + u_{\pi}(t)\,\text{sen}(t - \pi);$
$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

5. $y'' + 3y' + 2y = f(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0;$
$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 10 \\ 0, & t \ge 10 \end{cases}$

6. $y'' + 3y' + 2y = u_2(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

7. $y'' + y = u_{3\pi}(t); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

8. $y'' + y' + \frac{5}{4}y = t - u_{\pi/2}(t)(t - \pi/2);$
$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

9. $y'' + y = g(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$
$g(t) = \begin{cases} t/2, & 0 \le t < 6 \\ 3, & t \ge 6 \end{cases}$

10. $y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0;$
$g(t) = \begin{cases} \text{sen}\, t, & 0 \le t < \pi \\ 0, & t \ge \pi \end{cases}$

11. $y'' + 4y = u_{\pi}(t) - u_{3\pi}(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

12. $y^{(4)} - y = u_1(t) - u_2(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$
$y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$

13. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 1 - u_{\pi}(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$
$y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$

14. Encontre uma expressão envolvendo $u_c(t)$ para uma função f cujo gráfico é uma rampa crescente de zero em $t = t_0$ até o valor h em $t = t_0 + k$.

15. Encontre uma expressão envolvendo $u_c(t)$ para uma função f cujo gráfico é uma rampa crescente de zero em $t = t_0$ até o valor h em $t = t_0 + k$ seguida de uma rampa decrescente que chega a zero em $t = t_0 + 2k$.

16. Um determinado sistema massa-mola satisfaz o problema de valor inicial

$$u'' + \tfrac{1}{4}u' + u = kg(t), \qquad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0,$$

onde $g(t) = u_{3/2}(t) - u_{5/2}(t)$ e $k > 0$ é um parâmetro.
(a) Esboce o gráfico de $g(t)$. Note que é um pulso de tamanho unitário que se estende por uma unidade de tempo.
(b) Resolva o problema de valor inicial.
(c) Desenhe o gráfico da solução para $k = 1/2$, $k = 1$ e $k = 2$. Descreva as principais características da solução e como elas dependem de k.
(d) Encontre, com duas casas decimais, o menor valor de k para o qual a solução $u(t)$ alcança o valor 2.
(e) Suponha que $k = 2$. Encontre o instante τ após o qual $|u(t)| < 0{,}1$ para todo $t > \tau$.

17. Modifique o problema no Exemplo 2 desta seção substituindo o termo não-homogêneo $g(t)$ por

$$f(t) = [u_5(t)(t-5) - u_{5+k}(t)(t-5-k)]/k.$$

(a) Esboce o gráfico de $f(t)$ e descreva como ele depende de k. Para que valores de k a função $f(t)$ é igual a $g(t)$ no exemplo?
(b) Resolva o problema de valor inicial

$$y'' + 4y = f(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

(c) A solução no item (b) depende de k, mas, para t suficientemente grande, a solução sempre é uma oscilação harmônica simples em torno de $y = 1/4$. Tente decidir como a amplitude dessa oscilação depende de k. Depois confirme sua conclusão fazendo o gráfico da solução para alguns valores diferentes de k.

18. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + \tfrac{1}{3}y' + 4y = f_k(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde

$$f_k(t) = \begin{cases} 1/2k, & 4-k \le t < 4+k \\ 0, & 0 \le t < 4-k \quad \text{e} \quad t \ge 4+k \end{cases}$$

e $0 < k < 4$.
(a) Esboce o gráfico de $f_k(t)$. Note que a área sob o gráfico é independente de k. Se $f_k(t)$ representa uma força, isso significa que o produto do módulo da força e do intervalo de tempo durante o qual ela age não depende de k.
(b) Escreva $f_k(t)$ em termos da função degrau unitário e depois resolva o problema de valor inicial dado.
(c) Desenhe o gráfico da solução para $k = 2$, $k = 1$ e $k = 1/2$. Descreva como a solução depende de k.

Ressonância e Batimento. Na Seção 3.9 observamos como um oscilador harmônico não-amortecido (como um sistema massa-mola) sob a ação de uma força senoidal entra em ressonância se a freqüência do forçamento é a mesma que a freqüência natural. Se a freqüência da força é ligeiramente diferente da freqüência natural, então o sistema apresenta um batimento. Nos problemas de 19 a 23, exploramos o efeito de alguns forçamentos periódicos não-senoidais.

19. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + y = f(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde

$$f(t) = u_0(t) + 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_{k\pi}(t).$$

(a) Desenhe o gráfico de $f(t)$ em um intervalo como $0 \le t \le 6\pi$.
(b) Encontre a solução do problema de valor inicial.
(c) Considere $n = 15$ e desenhe o gráfico da solução para $0 \le t \le 60$. Descreva a solução e explique por que ela se comporta dessa maneira.
(d) Investigue como a solução muda quando n cresce. O que acontece quando $n \to \infty$?

20. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + 0{,}1y' + y = f(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde $f(t)$ é a mesma que no Problema 19.
(a) Desenhe o gráfico da solução. Use um valor de n e um intervalo de tempo suficientemente grandes de modo que a parte transiente da solução se torne desprezível e o estado estacionário apareça claramente.
(b) Estime a amplitude e a freqüência da parte correspondente ao estado estacionário da solução.
(c) Compare os resultados do item (b) com os da Seção 3.9 para um oscilador sob a ação de uma força senoidal.

21. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + y = g(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde

$$g(t) = u_0(t) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_{k\pi}(t).$$

(a) Desenhe o gráfico de $g(t)$ em um intervalo como $0 \le t \le 6\pi$. Compare com o gráfico de $f(t)$ no Problema 19(a).
(b) Encontre a solução do problema de valor inicial.
(c) Considere $n = 15$ e desenhe o gráfico da solução para $0 \le t \le 60$. Descreva a solução e explique por que ela se comporta dessa maneira. Compare com a solução do Problema 19.
(d) Investigue como a solução muda quando n cresce. O que acontece quando $n \to \infty$?

22. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + 0{,}1y' + y = g(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde $g(t)$ é a mesma do Problema 21.
(a) Desenhe o gráfico da solução. Use um valor de n e um intervalo de tempo suficientemente grandes de modo que a parte transiente da solução se torne desprezível e o estado estacionário apareça claramente.
(b) Estime a amplitude e a freqüência da parte correspondente ao estado estacionário da solução.
(c) Compare os resultados do item (b) com os do Problema 20 e os da Seção 3.9 para um oscilador sob a ação de uma força senoidal.

23. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + y = h(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde

$$f(t) = u_0(t) + 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_{11k/4}(t).$$

Observe que este problema é idêntico ao Problema 19, exceto que a freqüência do termo não-homogêneo foi um pouco aumentada.
(a) Encontre a solução desse problema de valor inicial.
(b) Considere $n \ge 33$ e desenhe o gráfico da solução para $0 \le t \le 90$ ou maior. Seu gráfico deve mostrar um batimento claramente reconhecível.
(c) Do gráfico no item (b), estime o "período lento" e o "período rápido" para esse oscilador.
(d) Para um oscilador sob a ação de uma força senoidal, mostramos, na Seção 3.9, que a "freqüência lenta" é dada por $|\omega - \omega_0|/2$, onde ω_0 é a freqüência natural do sistema e ω é a freqüência do termo não-homogêneo. Analogamente, a "freqüência rápida" é $(\omega + \omega_0)/2$. Use essas expressões para calcular o "período rápido" e o "período lento" para o oscilador neste problema. Quão próximos esses resultados estão de suas estimativas no item (c)?

6.5 Funções de Impulso

Em algumas aplicações, é necessário tratar fenômenos de natureza impulsiva, por exemplo, voltagens ou forças de módulo grande que agem por um período de tempo muito curto. Tais problemas levam, com freqüência, a equações diferenciais da forma

$$ay'' + by' + cy = g(t), \tag{1}$$

onde $g(t)$ é grande em um intervalo pequeno $t_0 - \tau < t < t_0 + \tau$ e é zero nos outros pontos.

A integral $I(\tau)$, definida por

$$I(\tau) = \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} g(t)\,dt, \tag{2}$$

ou, como $g(t) = 0$ fora do intervalo $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$,

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt, \tag{3}$$

é uma medida da força do termo não-homogêneo. Em um sistema mecânico, onde $g(t)$ é uma força, $I(\tau)$ é o **impulso** total da força $g(t)$ sobre o intervalo de tempo $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$. Analogamente, se y é a corrente em um circuito elétrico e $g(t)$ é a derivada em rela-

ção ao tempo da voltagem, então $I(\tau)$ representa a voltagem total impressa no circuito durante o intervalo de tempo $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$.

Em particular, vamos supor que t_0 é zero e que $g(t)$ é dada por

$$g(t) = d_\tau(t) = \begin{cases} 1/2\tau, & -\tau < t < \tau, \\ 0, & t \leq -\tau \quad \text{ou} \quad t \geq \tau, \end{cases} \qquad (4)$$

onde τ é uma constante positiva pequena (veja a Fig. 6.5.1). De acordo com a Eq. (2) ou (3), segue imediatamente que, nesse caso, $I(\tau) = 1$ independentemente do valor de τ, desde que $\tau \neq 0$. Vamos agora fazer com que o termo não-homogêneo d_τ aja em intervalos de tempo cada vez mais curtos, isto é, vamos fazer $\tau \to 0$, como indicado na Fig. 6.5.2. Como resultado desse limite, obtemos

$$\lim_{\tau \to 0} d_\tau(t) = 0, \qquad t \neq 0. \qquad (5)$$

Além disso, como $I(\tau) = 1$ para todo $\tau \neq 0$, segue que

$$\lim_{\tau \to 0} I(\tau) = 1. \qquad (6)$$

As Eqs. (5) e (6) podem ser usadas para se definir uma **função impulso unitário** δ, que funciona como um impulso de tamanho 1 em $t = 0$, mas que é zero para todos os outros valores de t diferentes de zero. Em outras palavras, a "função" δ é definida como tendo as propriedades

$$\delta(t) = 0, \qquad t \neq 0; \qquad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1. \qquad (8)$$

Não existe uma função, no sentido usual da palavra, estudada em Cálculo que satisfaça ambas as Eqs. (7) e (8). A "função" δ definida por essas equações é um exemplo de algo conhecido como funções generalizadas e é chamada de **função delta** de Dirac.[2]

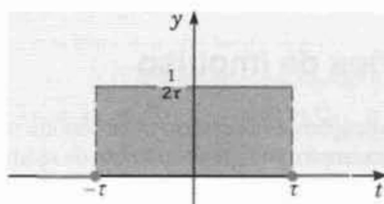


FIG. 6.5.1 Gráfico de $y = d_\tau(t)$.

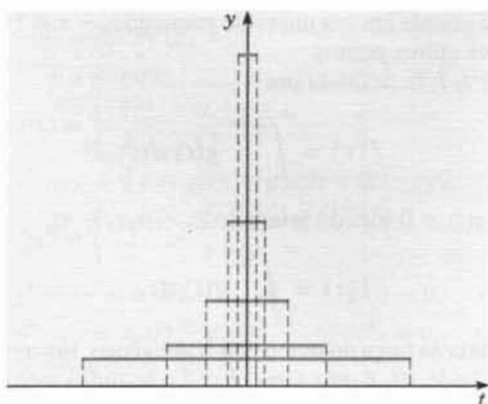


FIG. 6.5.2 Gráficos de $y = d_\tau(t)$ quando $\tau \to 0$.

Como $\delta(t)$ corresponde a um impulso unitário em $t = 0$, um impulso unitário em um ponto arbitrário $t = t_0$ é dado por $\delta(t - t_0)$. Das Eqs. (7) e (8), segue que

$$\delta(t - t_0) = 0, \qquad t \neq t_0; \qquad (9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, dt = 1. \qquad (10)$$

A função δ não satisfaz as condições do Teorema 6.1.2, mas sua transformada de Laplace pode ser definida formalmente. Como $\delta(t)$ é definida como o limite de $d_\tau(t)$ quando $\tau \to 0$, é natural definir a transformada de Laplace de δ como um limite análogo da transformada de d_τ. Em particular, vamos supor que $t_0 > 0$ e vamos definir $\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\}$ pela equação

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = \lim_{\tau \to 0} \mathcal{L}\{d_\tau(t - t_0)\}. \qquad (11)$$

Para calcular o limite na Eq. (11), note primeiro que, se $\tau < t_0$, o que vai acabar acontecendo quando $\tau \to 0$, então $t_0 - \tau > 0$. Como $d_\tau(t - t_0)$ é diferente de zero apenas no intervalo de $t_0 - \tau$ até $t_0 + \tau$, temos

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t - t_0)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} d_\tau(t - t_0)\, dt = \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} e^{-st} d_\tau(t - t_0)\, dt.$$

Substituindo $d_\tau(t - t_0)$ pela expressão na Eq. (4), obtemos

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t - t_0)\} = \frac{1}{2\tau} \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} e^{-st}\, dt = -\frac{1}{2s\tau} e^{-st} \Big|_{t = t_0 - \tau}^{t = t_0 + \tau} = \frac{1}{2s\tau} e^{-st_0} (e^{s\tau} - e^{-s\tau})$$

ou

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t - t_0)\} = \frac{\operatorname{senh} s\tau}{s\tau} e^{-st_0}. \qquad (12)$$

O quociente $(\operatorname{senh} s\tau)/s\tau$ é indeterminado quando $\tau \to 0$, mas seu limite pode ser calculado através da regra de L'Hospital. Obtemos

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\operatorname{senh} s\tau}{s\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{s \cosh s\tau}{s} = 1.$$

Então, segue da Eq. (11) que

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0}. \qquad (13)$$

A Eq. (13) define $\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\}$ para qualquer $t_0 > 0$. Vamos estender esse resultado, para permitir t_0 ser igual a zero, fazendo $t_0 \to 0$ à direita do sinal de igualdade na Eq. (13); assim,

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{t_0 \to 0} e^{-st_0} = 1. \qquad (14)$$

[2] Paul A. M. Dirac (1902-1984), físico matemático inglês, recebeu seu Ph.D. em Cambridge em 1926 e foi professor de matemática lá até 1969. Recebeu o prêmio Nobel em 1933 (junto com Erwin Schrödinger) por seu trabalho fundamental em mecânica quântica. Seu resultado mais conhecido foi a equação relativística para o elétron, publicada em 1928. Dessa equação ele previu o "antielétron", ou pósitron, que foi observado pela primeira vez em 1932. Depois de se aposentar em Cambridge, Dirac se mudou para os Estados Unidos e tornou-se professor pesquisador da Universidade Estadual da Flórida.

De maneira análoga, é possível definir a integral do produto da função δ por qualquer função contínua f. Temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t)\,dt = \lim_{\tau\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t-t_0)f(t)\,dt. \quad (15)$$

Usando a definição (4) de $d_\tau(t)$ e o teorema do valor médio para integrais, encontramos

$$\int_{-\infty}^{\infty} d_\tau(t-t_0)f(t)\,dt = \frac{1}{2\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} f(t)\,dt$$
$$= \frac{1}{2\tau}\cdot 2\tau\cdot f(t^*) = f(t^*),$$

onde $t_0 - \tau < t^* < t_0 + \tau$. Portanto, $t^* \to t_0$ quando $\tau \to 0$ e segue da Eq. (15) que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)f(t)\,dt = f(t_0). \quad (16)$$

É muitas vezes conveniente usar a função δ quando se trabalha com problemas de impulso e operar formalmente como se fosse uma função usual. Isso está ilustrado no exemplo a seguir. É importante compreender, no entanto, que a justificativa de tais procedimentos precisa se basear em uma análise cuidadosa das operações de limite envolvidas. Já foi desenvolvida tal teoria matemática rigorosa, mas ela não será discutida aqui.

Exemplo 1

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$2y'' + y' + 2y = \delta(t-5), \quad (17)$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0. \quad (18)$$

Esse problema de valor inicial vem do estudo do mesmo circuito elétrico ou oscilador mecânico do Exemplo 1 da Seção 6.4. A única diferença é o termo não-homogêneo.

Para resolver o problema dado, calculamos a transformada de Laplace da equação diferencial e usamos as condições iniciais, obtendo

$$(2s^2 + s + 2)Y(s) = e^{-5s}.$$

Assim,

$$Y(s) = \frac{e^{-5s}}{2s^2+s+2} = \frac{e^{-5s}}{2}\frac{1}{(s+\frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}}. \quad (19)$$

Pelo Teorema 6.3.2 ou pela linha 9 da Tabela 6.2.1,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}}\right\} = \frac{4}{\sqrt{15}}e^{-t/4}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{15}}{4}t. \quad (20)$$

Portanto, pelo Teorema 6.3.1, temos

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{2}{\sqrt{15}}u_5(t)e^{-(t-5)/4}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{15}}{4}(t-5), \quad (21)$$

que é a solução formal do problema dado. Também é possível escrever y na forma

$$y = \begin{cases} 0, & t < 5, \\ \frac{2}{\sqrt{15}}e^{-(t-5)/4}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{15}}{4}(t-5), & t \geq 5. \end{cases} \quad (22)$$

O gráfico da Eq. (22) aparece na Fig. 6.5.3. Como as condições iniciais em $t = 0$ são homogêneas e não existe excitação externa até $t = 5$, não há resposta no intervalo $0 < t < 5$. O impulso em $t = 5$ produz uma oscilação que decai, mas persiste indefinidamente. A resposta é contínua em $t = 5$, apesar da singularidade do termo não-homogêneo nesse ponto. No entanto, a derivada primeira da solução tem um salto em $t = 5$, e a derivada segunda tem uma descontinuidade infinita aí. Isso tem que acontecer pela equação diferencial (17), já que uma singularidade em um dos lados do sinal de igualdade tem de ser balanceada por uma singularidade correspondente do outro lado.

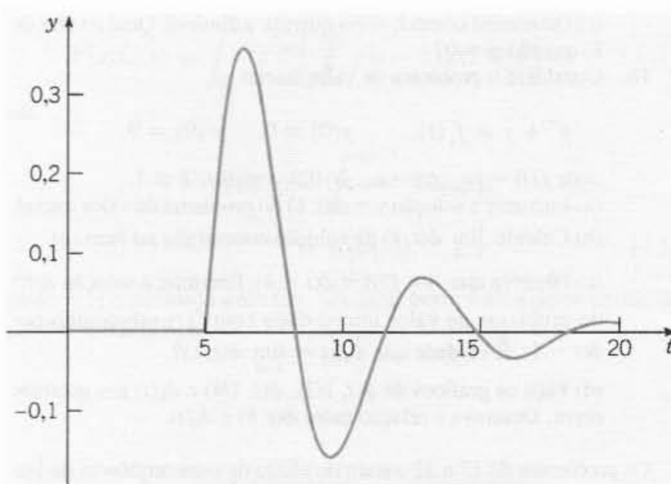


FIG. 6.5.3 Solução do problema de valor inicial (17), (18).

Problemas

Nos problemas de 1 a 12, encontre a solução do problema de valor inicial dado e desenhe seu gráfico.

1. $y'' + 2y' + 2y = \delta(t-\pi)$; $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
2. $y'' + 4y = \delta(t-\pi) - \delta(t-2\pi)$; $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
3. $y'' + 3y' + 2y = \delta(t-5) + u_{10}(t)$; $\quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1/2$
4. $y'' - y = -20\delta(t-3)$; $\quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
5. $y'' + 2y' + 3y = \operatorname{sen} t + \delta(t-3\pi)$; $\quad y(0) = 0, \ y'(0) = 0$
6. $y'' + 4y = \delta(t-4\pi)$; $\quad y(0) = 1/2, \ y'(0) = 0$
7. $y'' + y = \delta(t-2\pi)\cos t$; $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
8. $y'' + 4y = 2\delta(t-\pi/4)$; $\quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
9. $y'' + y = u_{\pi/2}(t) + 3\delta(t-3\pi/2) - u_{2\pi}(t)$; $\quad y(0) = 0, \ y'(0) = 0$

10. $2y'' + y' + 4y = \delta(t - \pi/6)\,\text{sen}\,t; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

11. $y'' + 2y' + 2y = \cos t + \delta(t - \pi/2); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

12. $y^{(4)} - y = \delta(t - 1); \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0 \; y''(0) = 0, \; y'''(0) = 0$

13. Considere, novamente, o sistema no Exemplo 1 desta seção, no qual uma oscilação é excitada por um impulso unitário em $t = 5$. Suponha que desejamos colocar o sistema em repouso após exatamente um ciclo, isto é, quando a resposta volta, pela primeira vez, à posição de equilíbrio movendo-se no sentido positivo.
(a) Determine o impulso $k\delta(t - t_0)$ que deve ser aplicado ao sistema para se alcançar esse objetivo. Note que k é o tamanho do impulso e que t_0 é o instante de sua aplicação.
(b) Resolva o problema de valor inicial resultante e faça o gráfico de sua solução para confirmar que se comporta da maneira especificada.

14. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + \gamma y' + y = \delta(t - 1), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde γ é o coeficiente de amortecimento (ou resistência).
(a) Seja $\gamma = 1/2$. Encontre a solução do problema de valor inicial e desenhe seu gráfico.
(b) Encontre o instante t_1 no qual a solução atinge seu valor máximo. Encontre, também, esse valor máximo y_1 da solução.
(c) Considere $\gamma = 1/4$ e repita os itens (a) e (b).
(d) Determine como t_1 e y_1 variam quando γ diminui. Quais são os valores de t_1 e de y_1 quando $\gamma = 0$?

15. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + \gamma y' + y = k\delta(t - 1), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde k é o tamanho de um impulso em $t = 1$ e γ é o coeficiente de amortecimento (ou resistência).
(a) Seja $\gamma = 1/2$. Encontre o valor de k para o qual a resposta tem um valor máximo de 2; chame esse valor de k_1.
(b) Repita o item (a) para $\gamma = 1/4$.
(c) Determine como k_1 varia quando γ diminui. Qual o valor de k_1 quando $\gamma = 0$?

16. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + y = f_k(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde $f_k(t) = [u_{4-k}(t) - u_{4+k}(t)]/2k$ com $0 < k \le 1$.
(a) Encontre a solução $y = \phi(t, k)$ do problema de valor inicial.
(b) Calcule $\lim_{k\to 0} \phi(t, k)$ da solução encontrada no item (a).
(c) Observe que $\lim_{k\to 0} f_k(t) = \delta(t - 4)$. Encontre a solução $\phi_0(t)$ do problema de valor inicial dado com $f_k(t)$ substituído por $\delta(t - 4)$. É verdade que $\phi_0(t) = \lim_{k\to 0} \phi(t, k)$?
(d) Faça os gráficos de $\phi(t, 1/2)$, $\phi(t, 1/4)$ e $\phi_0(t)$ nos mesmos eixos. Descreva a relação entre $\phi(t, k)$ e $\phi_0(t)$.

Os problemas de 17 a 22 tratam do efeito de uma seqüência de impulsos aplicados em um oscilador não-amortecido. Suponha que

$$y'' + y = f(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Para cada uma das escolhas para $f(t)$:
(a) Tente prever a natureza da solução sem resolver o problema.
(b) Teste sua previsão encontrando a solução e desenhando seu gráfico.
(c) Determine o que acontece após o final da seqüência de impulsos.

17. $f(t) = \sum_{k=1}^{20} \delta(t - k\pi)$

18. $f(t) = \sum_{k=1}^{20} (-1)^{k+1}\delta(t - k\pi)$

19. $f(t) = \sum_{k=1}^{20} \delta(t - k\pi/2)$

20. $f(t) = \sum_{k=1}^{20} (-1)^{k+1}\delta(t - k\pi/2)$

21. $f(t) = \sum_{k=1}^{15} \delta[t - (2k - 1)\pi]$

22. $f(t) = \sum_{k=1}^{40} (-1)^{k+1}\delta(t - 11k/4)$

23. A posição de um determinado oscilador ligeiramente amortecido satisfaz o problema de valor inicial

$$y'' + 0{,}1y' + y = \sum_{k=1}^{20}(-1)^{k+1}\delta(t - k\pi), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Note que, exceto pelo termo de amortecimento, esse problema é igual ao Problema 18.
(a) Tente prever a natureza da solução sem resolver o problema.
(b) Teste sua previsão encontrando a solução e desenhando seu gráfico.
(c) Determine o que acontece após o final da seqüência de impulsos.

24. Proceda como no Problema 23 para o oscilador satisfazendo

$$y'' + 0{,}1y' + y = \sum_{k=1}^{15}\delta[t - (2k - 1)\pi], \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Note que, exceto pelo termo de amortecimento, esse problema é igual ao Problema 21.

25. (a) Mostre, pelo método de variação dos parâmetros, que a solução do problema de valor inicial

$$y'' + 2y' + 2y = f(t); \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

é

$$y = \int_0^t e^{-(t-\tau)} f(\tau)\,\text{sen}(t - \tau)\,d\tau.$$

(b) Mostre que, se $f(t) = \delta(t - \pi)$, então a solução do item (a) se reduz a

$$y = u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\,\text{sen}\,(t - \pi).$$

(c) Use uma transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial dado com $f(t) = \delta(t - \pi)$ e confirme que a solução coincide com a encontrada no item (b).

6.6 A Convolução

Algumas vezes é possível identificar uma transformada de Laplace $H(s)$ como o produto de duas outras transformadas $F(s)$ e $G(s)$, essas últimas correspondendo a funções conhecidas f e g, respectivamente. Nesse caso, poderíamos pensar que $H(s)$ seria a transformada do produto de f e g. Isso não acontece, no entanto; em outras palavras, a transformada de Laplace não comuta com a multiplicação usual. Por outro lado, se definirmos, convenientemente, um "produto generalizado", então a situação muda, conforme enunciado no teorema a seguir.

Teorema 6.6.1

Se ambas $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ existem para $s > a \geq 0$, então

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}, \quad s > a, \tag{1}$$

onde

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau. \tag{2}$$

A função h é conhecida como a convolução de f e g.

A igualdade das duas integrais na Eq. (2) segue da mudança de variável $t - \tau = \xi$ na primeira integral. Antes de demonstrar esse teorema, vamos fazer algumas observações sobre a convolução. De acordo com esse teorema, a transformada da convolução de duas funções, em vez da transformada de seu produto usual, é dada pelo produto das transformadas separadas. É conveniente enfatizar que a convolução pode ser considerada como um "produto generalizado" escrevendo-se

$$h(t) = (f * g)(t). \tag{3}$$

Em particular, a notação $(f * g)(t)$ serve para indicar a primeira integral na Eq. (2).

A convolução $f * g$ tem muitas das propriedades da multiplicação usual. Por exemplo, é relativamente simples mostrar que

$$f * g = g * f \qquad \text{(comutatividade)} \tag{4}$$

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2 \qquad \text{(distributividade)} \tag{5}$$

$$(f * g) * h = f * (g * h) \qquad \text{(associatividade)} \tag{6}$$

$$f * 0 = 0 * f = 0. \tag{7}$$

As demonstrações desses resultados são deixadas a cargo do leitor. No entanto, a multiplicação usual tem outras propriedades que a convolução não tem. Por exemplo, não é verdade, em geral, que $f * 1$ seja igual a f. Para ver isso, note que

$$(f * 1)(t) = \int_0^t f(t-\tau)\cdot 1\,d\tau = \int_0^t f(t-\tau)\,d\tau.$$

Se, por exemplo, $f(t) = \cos t$, então

$$\begin{aligned}(f * 1)(t) &= \int_0^t \cos(t-\tau)\,d\tau = -\operatorname{sen}(t-\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}\\ &= -\operatorname{sen} 0 + \operatorname{sen} t\\ &= \operatorname{sen} t.\end{aligned}$$

É claro que $(f * 1)(t) \neq f(t)$. Analogamente, pode não ser verdade que $f * f$ seja não-negativa. Veja o Problema 3 para um exemplo.

As convoluções aparecem em diversas aplicações nas quais o comportamento do sistema em qualquer instante t não depende apenas do estado no instante t, mas também de sua história passada. Sistemas desse tipo são chamados, algumas vezes, de sistemas hereditários e ocorrem em campos tão diversos quanto transporte, viscoelasticidade e dinâmica populacional.

Voltando à demonstração do Teorema 6.6.1, observe, em primeiro lugar, que, se

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi)\,d\xi$$

e

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau)\,d\tau,$$

então

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi)\,d\xi \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau)\,d\tau. \tag{8}$$

Como o integrando na primeira integral não depende da variável de integração da segunda integral, podemos escrever $F(s)G(s)$ como uma integral iterada,

$$\begin{aligned}F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau)\left[\int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi)\,d\xi\right] d\tau\\ &= \int_0^\infty g(\tau)\left[\int_0^\infty e^{-s(\xi+\tau)} f(\xi)\,d\xi\right] d\tau.\end{aligned} \tag{9}$$

A última integral pode ser colocada em uma forma mais conveniente introduzindo-se uma mudança de variável. Seja $\xi = t - \tau$ para τ fixo, de modo que $d\xi = dt$. Além disso, $\xi = 0$ corresponde a $t = \tau$ e $\xi = \infty$ corresponde a $t = \infty$; então a integral em relação a ξ na Eq. (9) transforma-se numa integral em relação a t:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\tau)\left[\int_\tau^\infty e^{-st} f(t-\tau)\,dt\right] d\tau. \tag{10}$$

A integral iterada à direita do sinal de igualdade na Eq. (10) é calculada sobre a região ilimitada em forma de cunha no plano $t\tau$ que aparece sombreada na Fig. 6.6.1. Supondo que se pode trocar a ordem de integração, obtemos, finalmente,

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right] dt, \tag{11}$$

ou

$$\begin{aligned}F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-st} h(t)\,dt\\ &= \mathcal{L}\{h(t)\},\end{aligned} \tag{12}$$

onde $h(t)$ é definida pela Eq. (2). Isso completa a demonstração do Teorema 6.6.1.

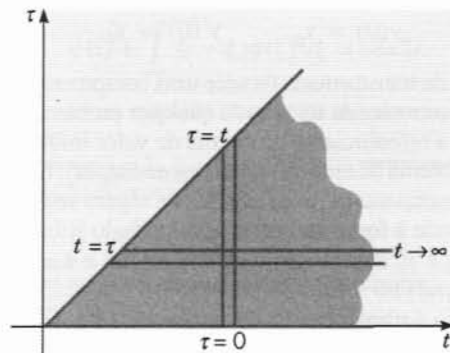


FIG. 6.6.1 Região de integração em $F(s)G(s)$.

Exemplo 1

Encontre a transformada inversa de

$$H(s) = \frac{a}{s^2(s^2+a^2)}. \quad (13)$$

É conveniente pensar em $H(s)$ como o produto de s^{-2} e $a/(s^2+a^2)$, que são, de acordo com as linhas 3 e 5 da Tabela 6.2.1, as transformadas de t e sen at, respectivamente. Portanto, pelo Teorema 6.6.1, a transformada inversa de $H(s)$ é

$$h(t) = \int_0^t (t-\tau)\,\mathrm{sen}\,a\tau\,d\tau = \frac{at - \mathrm{sen}\,at}{a^2}. \quad (14)$$

Você pode verificar que se obtém o mesmo resultado se $h(t)$ for escrito na forma alternativa

$$h(t) = \int_0^t \tau\,\mathrm{sen}\,a(t-\tau)\,d\tau,$$

o que, nesse caso, confirma a Eq. (2). É claro que $h(t)$ também pode ser encontrada expandindo-se $H(s)$ em frações parciais.

Exemplo 2

Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y'' + 4y = g(t), \quad (15)$$

$$y(0) = 3, \qquad y'(0) = -1. \quad (16)$$

Calculando a transformada de Laplace da equação diferencial e usando as condições iniciais, obtemos

$$s^2Y(s) - 3s + 1 + 4Y(s) = G(s),$$

ou

$$Y(s) = \frac{3s-1}{s^2+4} + \frac{G(s)}{s^2+4}. \quad (17)$$

Note que a primeira e a segunda parcelas à direita do sinal de igualdade na Eq. (17) contêm, respectivamente, a dependência de $Y(s)$ nas condições iniciais e o termo não-homogêneo. É conveniente escrever $Y(s)$ na forma

$$Y(s) = 3\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}G(s). \quad (18)$$

Então, usando as linhas 5 e 6 da Tabela 6.2.1 e o Teorema 6.6.1, temos

$$y = 3\cos 2t - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2t + \tfrac{1}{2}\int_0^t \mathrm{sen}\,2(t-\tau)g(\tau)\,d\tau. \quad (19)$$

Se um termo não-homogêneo específico g é dado, então a integral na Eq. (19) pode ser calculada (por métodos numéricos, se necessário).

O Exemplo 2 ilustra a força da convolução como uma ferramenta para se escrever a solução de um problema de valor inicial em função de uma integral. De fato, é possível proceder de um modo bastante semelhante em problemas mais gerais. Considere o problema que consiste na equação diferencial

$$ay'' + by' + cy = g(t), \quad (20)$$

onde a, b e c são constantes reais e g é uma função dada, com as condições iniciais

$$y(0) = y_0, \qquad y'(0) = y_0'. \quad (21)$$

A abordagem de transformada fornece uma compreensão mais profunda sobre a estrutura da solução de qualquer problema desse tipo.

É comum a referência ao problema de valor inicial (20), (21) como um problema de entrada-saída (*input-output*). Os coeficientes a, b e c descrevem as propriedades de algum sistema físico e $g(t)$ corresponde à força externa (*input*) agindo sobre o sistema. Os valores y_0 e y_0' descrevem o estado inicial e a solução y é a resposta (*output*) no instante t.

Calculando a transformada de Laplace da Eq. (20) e usando as condições iniciais (21), obtemos

$$(as^2 + bs + c)Y(s) - (as+b)y_0 - ay_0' = G(s).$$

Se definirmos

$$\Phi(s) = \frac{(as+b)y_0 + ay_0'}{as^2+bs+c}, \quad \Psi(s) = \frac{G(s)}{as^2+bs+c}, \quad (22)$$

podemos escrever

$$Y(s) = \Phi(s) + \Psi(s). \quad (23)$$

Em conseqüência,

$$y = \phi(t) + \psi(t), \quad (24)$$

onde $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}$ e $\psi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Psi(s)\}$. Note que $y = \phi(t)$ é uma solução do problema de valor inicial

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0', \quad (25)$$

obtida das Eqs. (21) e (22) fazendo $g(t) = 0$. Analogamente, $y = \psi(t)$ é a solução de

$$ay'' + by' + cy = g(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad (26)$$

que tem os valores iniciais y_0 e y_0' nulos.

Uma vez dados valores específicos para a, b e c, podemos encontrar $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}$ usando a Tabela 6.2.1, possivelmente

em conjunto com uma translação ou uma expansão em frações parciais. Para encontrar $\psi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Psi(s)\}$, é conveniente escrever $\Psi(s)$ como

$$\Psi(s) = H(s)G(s), \quad (27)$$

onde $H(s) = (as^2 + bs + c)^{-1}$. A função H é conhecida como a **função de transferência**[3] e depende apenas das propriedades do sistema em questão, isto é, $H(s)$ fica inteiramente determinada pelos coeficientes a, b e c. Por outro lado, $G(s)$ depende exclusivamente da excitação externa $g(t)$ que é aplicada ao sistema. Pelo teorema sobre convoluções, podemos escrever

$$\psi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)G(s)\} = \int_0^t h(t-\tau)g(\tau)\,d\tau, \quad (28)$$

onde $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ e $g(t)$ é o termo não-homogêneo dado.

Para obter uma compreensão melhor do significado de $h(t)$, vamos considerar o caso em que $G(s) = 1$; então, $g(t) = \delta(t)$ e $\Psi(s) = H(s)$. Isso significa que $y = h(t)$ é solução do problema de valor inicial

$$ay'' + by' + cy = \delta(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad (29)$$

obtido da Eq. (26) substituindo-se $g(t)$ por $\delta(t)$. Logo, $h(t)$ é a resposta do sistema a um impulso unitário aplicado em $t = 0$ e é natural chamar $h(t)$ de **resposta ao impulso**. A Eq. (28) diz, então, que $\psi(t)$ é a convolução da resposta ao impulso com a força externa.

Com referência ao Exemplo 2, note que, nesse caso, a função de transferência é $H(s) = 1/(s^2 + 4)$ e a resposta ao impulso é $h(t) = (\text{sen}\, 2t)/2$. Além disso, as duas primeiras parcelas à direita do sinal de igualdade na Eq. (19) constituem a função $\phi(t)$, a solução da equação homogênea associada que satisfaz as condições iniciais dadas.

Problemas

1. Prove a comutatividade, a distributividade e a associatividade para a convolução.
   (a) $f * g = g * f$
   (b) $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$
   (c) $f * (g * h) = (f * g) * h$
2. Encontre um exemplo diferente do que foi dado no texto mostrando que $(f * 1)(t)$ não precisa ser igual a $f(t)$.
3. Mostre, através do exemplo $f(t) = \text{sen}\, t$, que $f * f$ não precisa ser não-negativa.

Nos problemas de 4 a 7, encontre a transformada de Laplace da função dada.

4. $f(t) = \int_0^t (t-\tau)^2 \cos 2\tau\, d\tau$
5. $f(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \text{sen}\, \tau\, d\tau$
6. $f(t) = \int_0^t (t-\tau)e^{\tau}\, d\tau$
7. $f(t) = \int_0^t \text{sen}(t-\tau) \cos\tau\, d\tau$

[3] Essa terminologia vem do fato de que $H(s)$ é a razão entre as transformadas da resposta (*output*) e da função externa (*input*) do problema (26).

Nos problemas de 8 a 11, encontre a transformada de Laplace inversa da função dada usando o teorema sobre convoluções.

8. $F(s) = \dfrac{1}{s^4(s^2+1)}$
9. $F(s) = \dfrac{s}{(s+1)(s^2+4)}$
10. $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2(s^2+4)}$
11. $F(s) = \dfrac{G(s)}{s^2+1}$
12. (a) Se $f(t) = t^m$ e $g(t) = t^n$, onde m e n são inteiros positivos, mostre que
$$f * g = t^{m+n+1}\int_0^1 u^m(1-u)^n\, du.$$
(b) Use o teorema 6.6.1 para mostrar que
$$\int_0^1 u^m(1-u)^n\, du = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}.$$
(c) Estenda o resultado do item (b) para caso em que m e n são números positivos, mas não necessariamente inteiros.

Nos problemas de 13 a 20, expresse a solução do problema de valor inicial dado em função de uma convolução.

13. $y'' + \omega^2 y = g(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
14. $y'' + 2y' + 2y = \text{sen}\,\alpha t$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
15. $4y'' + 4y' + 17y = g(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
16. $y'' + y' + \frac{5}{4}y = 1 - u_\pi(t)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
17. $y'' + 4y' + 4y = g(t)$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$
18. $y'' + 3y' + 2y = \cos\alpha t$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
19. $y^{(4)} - y = g(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$
20. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = g(t)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$
21. Considere a equação
$$\phi(t) + \int_0^t k(t-\xi)\phi(\xi)\,d\xi = f(t),$$
na qual f e k são funções conhecidas e ϕ deve ser determinada. Como a função desconhecida ϕ aparece debaixo do sinal de integral, a equação dada é dita uma **equação integral**; em particular, pertence à classe de equações integrais conhecidas como equações de Volterra. Calcule a transformada de Laplace da equação integral dada e obtenha uma expressão para $\mathcal{L}\{\phi(t)\}$ em função das transformadas $\mathcal{L}\{f(t)\}$ e $\mathcal{L}\{k(t)\}$ das funções dadas f e k. A transformada inversa de $\mathcal{L}\{\phi(t)\}$ é a solução da equação integral original.
22. Considere a equação integral de Volterra (veja o Problema 21)
$$\phi(t) + \int_0^t (t-\xi)\phi(\xi)\,d\xi = \text{sen}\, 2t. \quad \text{(i)}$$
(a) Resolva a equação integral (i) usando a transformada de Laplace.
(b) Diferenciando duas vezes a Eq. (i), mostre que $\phi(t)$ satisfaz a equação diferencial
$$\phi''(t) + \phi(t) = -4\,\text{sen}\, 2t.$$
Mostre também que as condições iniciais são
$$\phi(0) = 0, \qquad \phi'(0) = 2.$$
(c) Resolva o problema de valor inicial no item (b) e verifique que a solução é a mesma que a do item (a).

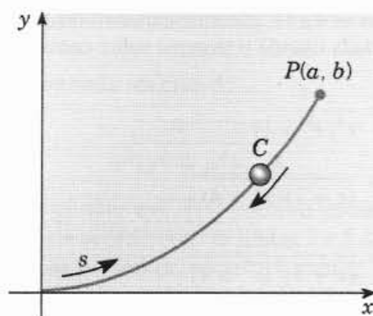


FIG. 6.6.2 A tautócrona.

Em cada um dos problemas, de 23 a 25:

(a) Resolva integral de Volterra dada usando a transformada de Laplace.
(b) Trasnforme a equação integral em um problema de valor inicial, como no problema 22(b).
(c) Resolva o problema de valor inicial encontrado no item (b) e verifique que a solução é a mesma que a do item (a).

23. $\phi(t) + \int_0^t (t-\xi)\phi(\xi)\,d\xi = 1$

24. $\phi(t) - \int_0^t (t-\xi)\phi(\xi)\,d\xi = 1$

25. $\phi(t) + 2\int_0^t \cos(t-\xi)\phi(\xi)\,d\xi = e^{-t}$

Existem também equações, conhecidas como **equações íntegro-diferenciais** nas quais aparecem tanto derivadas quanto integrais da função desconhecida. Em cada um dos problemas 26 a 28:

(a) Resolva a equação íntegro-diferencial dada usando a transformada de Laplace.
(b) Diferenciado a equação íntegro-diferencial um número suficiente de vezes, transforme-a em um problema de valor inicial.
(c) Resolva o problema de valor inicial encontrado no item (b) e verifique que a solução é a mesma que a do item (a).

26. $\phi'(t) + \int_0^t (t-\xi)\phi(\xi)\,d\xi = t, \qquad \phi(0) = 0$

27. $\phi'(t) - \frac{1}{2}\int_0^t (t-\xi)^2\phi(\xi)\,d\xi = -t, \qquad \phi(0) = 1$

28. $\phi'(t) + \phi(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(t-\xi)\phi(\xi)\,d\xi, \qquad \phi(0) = 1$

29. **A Tautócrona.** Um problema de interesse na história da matemática é a de encontrar a *tautócrona*[4] — a curva descrita por uma partícula deslizando livremente sob a ação apenas da gravidade, atingindo o fundo no mesmo instante independentemente do ponto de partida na curva. Esse problema apareceu na construção de um relógio com pêndulo, cujo período é independente da amplitude de seu movimento. A tautócrona foi encontrada por Christian Huygens (1629-1695) em 1673 por métodos geométricos e, mais tarde, por Leibniz e Jakob Bernoulli usando argumentos analíticos. A solução de Bernoulli (em 1690) foi uma das primeiras ocasiões em que se resolveu explicitamente uma equação diferencial.

A configuração geométrica está ilustrada na Fig. 6.6.2. O ponto inicial $P(a, b)$ é unido ao ponto final (0, 0) pelo arco C. O comprimento de arco s é medido a partir da origem e $f(y)$ denota a taxa de variação de s em relação a y:

$$f(y) = \frac{ds}{dy} = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{1/2}. \qquad \text{(i)}$$

Segue então, do princípio de conservação de energia, que o tempo $T(b)$ necessário para uma partícula deslizar de P até a origem é

$$T(b) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{b-y}}\,dy. \qquad \text{(ii)}$$

(a) Suponha que $t(b) = T_0$, uma constante, para cada b. Calculando a transformada de Laplace da Eq. (ii) nesse caso e usando o teorema sobre convoluções, mostre que

$$F(s) = \sqrt{\frac{2g}{\pi}}\frac{T_0}{\sqrt{s}}; \qquad \text{(iii)}$$

depois, mostre que

$$f(y) = \sqrt{\frac{2g}{\pi}}\frac{T_0}{\sqrt{y}}. \qquad \text{(iv)}$$

Sugestão: Veja o Problema 27 da Seção 6.1.
(b) Combinando as Eqs. (i) e (iv), mostre que

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{2\alpha - y}{y}}, \qquad \text{(v)}$$

onde $\alpha = gT_0^2/\pi^2$.
(c) Use a substituição $y = 2\alpha\operatorname{sen}^2(\theta/2)$ para resolver a Eq. (v) e mostre que

$$x = \alpha(\theta + \operatorname{sen}\theta), \qquad y = \alpha(1 - \cos\theta). \qquad \text{(vi)}$$

As Eqs. (vi) podem ser identificadas como equações paramétricas de uma ciclóide. Assim, a tautócrona é um arco de uma ciclóide.

[4]A palavra "tautócrana" vem das palavras gregas *tauto*, que significa igual, e *chronos*, que significa tempo.

REFERÊNCIAS

Os livros listados a seguir contêm informações adicionais sobre a transformada de Laplace e suas aplicações.

Churchill, R. V., *Operational Mathematics* (3rd ed.) (New York: McGraw-Hill, 1971).

Doetsch, G., *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transform* (W. Nader, tr.) (New York: Springer-Verlag, 1974).

Kaplan, W., *Operational Methods for Linear Systems* (Reading, MA: Addison-Wesley, 1962).

Kuhfittig, P. K. F., *Introduction to the Laplace Transform* (New York: Plenum, 1978).

Miles, J. W., *Integral Transforms in Applied Mathematics* (London: Cambridge University Press, 1971).

Rainville, E. D., *The Laplace Transform: An Introduction* (New York: Macmillan, 1963).

Cada um dos livros mencionados acima contém uma tabela de transformadas. Também estão disponíveis tabelas mais extensas; veja, por exemplo:

Erdelyi, A. (ed.), *Tables of Integral Transforms* (Vol. 1) (New York: McGraw-Hill, 1954).

Roberts, G. E., and Kaufman, H., *Table of Laplace Transforms* (Philadelphia: Saunders, 1966).

Uma discussão adicional sobre funções generalizadas pode ser encontrada em:

Lighthill, M. J., *Fourier Analysis and Generalized Functions* (London: Cambridge University Press, 1958).

CAPÍTULO 7

Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem

Existem muitos problemas físicos que envolvem diversos elementos associados de determinada maneira. Por exemplo, circuitos elétricos têm essa característica, assim como problemas em mecânica e em outros campos. Nesses e em casos semelhantes, o problema matemático correspondente consiste em um *sistema* de duas ou mais equações diferenciais, que sempre podem ser escritas como equações de primeira ordem. Vamos estudar, neste capítulo, sistemas de equações *lineares* de primeira ordem, utilizando a álgebra linear elementar para unificar a apresentação.

7.1 Introdução

Sistemas de equações diferenciais ordinárias simultâneas aparecem naturalmente em problemas envolvendo diversas variáveis dependentes, cada uma das quais sendo uma função da mesma única variável independente. Vamos denotar a variável independente por t e as variáveis dependentes, que são funções de t, por x_1, x_2, x_3, ... A diferenciação em relação a t será denotada por um apóstrofo.[1]

Por exemplo, considere o sistema massa-mola na Fig. 7.1.1. As duas massas se movem em uma superfície sem atrito sob a influência de forças externas $F_1(t)$ e $F_2(t)$ e são, também, restringidas em seu movimento pelas três molas com constantes k_1, k_2 e k_3, respectivamente. Usando argumentos semelhantes aos da Seção 3.8, encontramos as seguintes coordenadas x_1 e x_2 para as duas massas:

$$
\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} &= k_2(x_2 - x_1) - k_1x_1 + F_1(t) \\
&= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 + F_1(t), \\
m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} &= -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1) + F_2(t) \\
&= k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + F_2(t).
\end{aligned} \tag{1}
$$

[1]Por exemplo, x_1', que se lê "x_1 linha". (*N.T.*)

A dedução das Eqs. (1) está esquematizada no Problema 17.

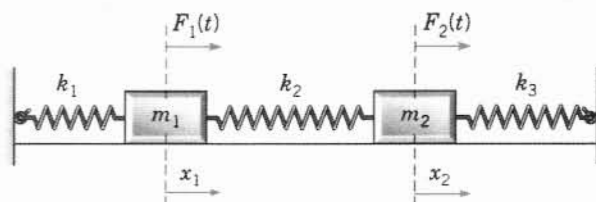


FIG. 7.1.1 Um sistema com duas massas e três molas.

Vamos considerar, agora, o circuito *LRC* em paralelo ilustrado na Fig. 7.1.2. Seja V a diferença de tensão no capacitor e I a corrente passando pelo indutor. Então, de acordo com a Seção 3.8 e com o Problema 19 desta seção, podemos mostrar que a diferença de tensão e a corrente são descritas pelo sistema de equações

$$
\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= \frac{V}{L}, \\
\frac{dV}{dt} &= -\frac{I}{C} - \frac{V}{RC},
\end{aligned} \tag{2}
$$

onde L é a indutância, C a capacitância e R a resistência.

Como último exemplo, mencionamos o problema predador-presa, um dos problemas fundamentais em ecologia matemática, que será discutido em maiores detalhes na Seção 9.5. Vamos denotar por $H(t)$ e $P(t)$ as populações, no instante t, de duas espécies, uma das quais (P) caça a outra (H). Por exemplo, $P(t)$ e $H(t)$ podem ser o número de raposas e de coelhos, respectivamente, em uma floresta, ou o número de peixes grandes e de pequenos (que são comidos pelos grandes) em um rio. Sem a presa, o número de predadores diminui e, sem o predador, o número de presas aumenta. Por volta de 1925, Lotka e Volterra propuseram um modelo matemático mostrando como um equi-

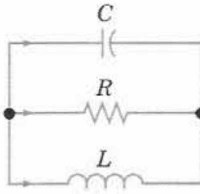


FIG. 7.1.2 Um circuito *LRC* em paralelo.

líbrio ecológico pode ser mantido na presença das duas espécies. O modelo consiste no sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} dH/dt &= a_1 H - b_1 HP, \\ dP/dt &= -a_2 P + b_2 HP, \end{aligned} \tag{3}$$

conhecido como as equações predador-presa. Nas Eqs. (3), o coeficiente a_1 é a taxa de natalidade da população H; analogamente, a_2 é a taxa de mortalidade da população P. Os termos contendo HP nas duas equações modelam a interação entre as duas espécies. Supõe-se que o número de encontros entre predador e presa é proporcional ao produto das populações. Como tal encontro tende a ser bom para o predador e ruim para a presa, o sinal do termo contendo HP é negativo na primeira equação e positivo na segunda. Os coeficientes b_1 e b_2 são os coeficientes da interação entre predador e presa.

Uma outra razão porque sistemas de equações de primeira ordem são importantes é que equações de ordem maior sempre podem ser transformadas em tais sistemas. Isso, normalmente, é necessário se se planeja uma abordagem numérica, já que quase todos os códigos para se gerar soluções numéricas aproximadas de equações diferenciais são escritos para sistemas de equações de primeira ordem. O exemplo a seguir ilustra quão fácil é fazer a transformação.

Exemplo 1

O movimento de um determinado sistema massa-mola (veja o Exemplo 3 da Seção 3.8) é descrito pela equação diferencial de segunda ordem

$$u'' + 0{,}125u' + u = 0. \tag{4}$$

Escreva essa equação como um sistema de equações de primeira ordem.

Sejam $x_1 = u$ e $x_2 = u'$. Então, $x_1' = x_2$. Além disso, como $u'' = x_2'$, substituindo u, u' e u'' na Eq. (4), obtemos

$$x_2' + 0{,}125x_2 + x_1 = 0.$$

Logo, x_1 e x_2 satisfazem o seguinte sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -x_1 - 0{,}125x_2. \end{aligned} \tag{5}$$

A equação geral de movimento de um sistema massa-mola,

$$mu'' + \gamma u' + ku = F(t), \tag{6}$$

pode ser transformada em um sistema de primeira ordem do mesmo modo. Definindo $x_1 = u$ e $x_2 = u'$, e procedendo como no Exemplo 1, obtemos rapidamente o sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -(k/m)x_1 - (\gamma/m)x_2 + F(t)/m. \end{aligned} \tag{7}$$

Para transformar uma equação arbitrária de ordem n

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{8}$$

em um sistema de equações de primeira ordem, estendemos o método do Exemplo 1 definindo as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ por

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y'', \quad \ldots, \quad x_n = y^{(n-1)}. \tag{9}$$

Segue imediatamente que

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n, \end{aligned} \tag{10}$$

e, da Eq. (8),

$$x_n' = F(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{11}$$

As Eqs. (10) e (11) são casos especiais do sistema mais geral

$$\begin{aligned} x_1' &= F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2' &= F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{12}$$

De maneira análoga, o sistema (1) pode ser reduzido a um sistema de quatro equações de primeira ordem da forma (12), e os sistemas (2) e (3) já estão nessa forma. De fato, sistemas da forma (12) incluem quase todos os casos de interesse, de modo que a maior parte da teoria mais avançada de equações diferenciais é dedicada a tais sistemas.

Dizemos que o sistema (12) tem uma **solução** no intervalo I: $\alpha < t < \beta$ se existe um conjunto de n funções

$$x_1 = \phi_1(t), \quad x_2 = \phi_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = \phi_n(t), \tag{13}$$

diferenciáveis em todos os pontos do intervalo I que satisfazem o sistema de equações (12) em todos os pontos desse intervalo. Além do sistema de equações diferenciais, podem ser dadas, também, condições iniciais da forma

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n(t_0) = x_n^0, \tag{14}$$

onde t_0 é um valor especificado de t em I e $x_1^0, \ldots, x_n^0$ são números dados. As equações diferenciais (12) e as condições iniciais (14) juntas formam um problema de valor inicial.

Uma solução (13) pode ser vista como um conjunto de equações paramétricas em um espaço de dimensão n. Para um valor de t dado, as Eqs. (13) fornecem valores para as coordenadas $x_1, \ldots, x_n$ de um ponto no espaço. À medida que t muda, as coordenadas, em geral, também mudam. A coleção de pontos corres-

pondentes para $\alpha < t < \beta$ forma uma curva no espaço. É, muitas vezes, útil pensar na curva como sendo a trajetória ou caminho percorrido por uma partícula movendo-se de acordo com o sistema de equações diferenciais (12). As condições iniciais (14) determinam o ponto inicial da partícula em movimento.

As condições a seguir sobre $F_1, F_2, \ldots, F_n$, facilmente verificadas em problemas específicos, são suficientes para garantir que o problema de valor inicial (12), (14) tenha uma única solução. O Teorema 7.1.1 é análogo ao Teorema 2.4.2, sobre a existência e a unicidade para uma única equação de primeira ordem.

Teorema 7.1.1

Suponha que cada uma das funções $F_1, \ldots, F_n$ e suas derivadas parciais, $\partial F_1/\partial x_1, \ldots, \partial F_1/\partial x_n, \ldots, \partial F_n/\partial x_1, \ldots, \partial F_n/\partial x_n$, são contínuas em uma região R do espaço $tx_1 \ldots x_n$ definida por $\alpha < t < \beta$, $\alpha_1 < x_1 < \beta_1, \ldots, \alpha_n < x_n < \beta_n$, e suponha que o ponto $(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ está em R. Então, existe um intervalo $|t - t_0| < h$ no qual há uma única solução $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ do sistema de equações diferenciais (12) que também satisfaz as condições iniciais (14).

A demonstração desse teorema pode ser construída generalizando-se o argumento dado na Seção 2.8, mas não faremos isso aqui. No entanto, note que não se diz nada nas hipóteses do teorema sobre as derivadas parciais de $F_1, \ldots, F_n$ em relação à variável independente t. Além disso, na conclusão, o comprimento $2h$ do intervalo no qual a solução existe não está especificado exatamente e, em alguns casos, pode ser muito curto. Finalmente, o mesmo resultado pode ser provado sob hipóteses mais fracas, mas muito mais complicadas, de modo que o teorema, como enunciado, não é o mais geral conhecido e as condições dadas são suficientes, mas não necessárias, para a conclusão ser válida.

Se cada uma das funções $F_1, \ldots, F_n$ nas Eqs. (12) é uma função linear das variáveis dependentes $x_1, \ldots, x_n$, então o sistema de equações é dito **linear**; caso contrário, é **não-linear**. Assim, o sistema mais geral de n equações lineares tem a forma

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ x_2' &= p_{21}(t)x_1 + \cdots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t). \end{aligned} \qquad (15)$$

Se todas as funções $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ forem identicamente nulas no intervalo I, então o sistema (15) é dito **homogêneo**; caso contrário, ele é **não-homogêneo**. Observe que os sistemas (1) e (2) são, ambos, lineares, enquanto o sistema (3) é não-linear. O sistema (1) é não-homogêneo, a menos que $F_1(t) = F_2(t) = 0$, enquanto o sistema (2) é homogêneo. Para o sistema linear (15), o teorema de existência e unicidade é mais simples e também tem uma conclusão mais forte. É análogo aos Teoremas 2.4.1 e 3.2.1.

Teorema 7.1.2

Se as funções $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn}, g_1, \ldots, g_n$ são contínuas em um intervalo aberto I: $\alpha < t < \beta$, então existe uma única solução $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ do sistema (15) que também satisfaz as condições iniciais (14), onde t_0 é qualquer ponto em I e $x_1^0, \ldots, x_n^0$ são números arbitrários. Além disso, a solução existe em todo o intervalo I.

Note que, em contraste com a situação para um sistema não-linear, a existência e unicidade de solução para um sistema linear, está garantida em todo o intervalo no qual as hipóteses são satisfeitas. Além disso, para um sistema linear, os valores iniciais $x_1^0, \ldots, x_n^0$ em $t = t_0$ são inteiramente arbitrários, enquanto, no caso não-linear, o ponto inicial tem que estar contido na região R definida no Teorema 7.1.1.

O restante deste capítulo é dedicado a sistemas lineares de equações de primeira ordem (sistemas não-lineares estão incluídos nas discussões dos Caps. 8 e 9). Nossa apresentação utiliza notação matricial e supõe que o leitor tenha alguma familiaridade com as propriedades de matrizes. Os fatos básicos sobre matrizes estão resumidos nas Seções 7.2 e 7.3, e material mais avançado será revisto quando necessário em seções posteriores.

Problemas

Nos problemas de 1 a 4, transforme a equação dada em um sistema de equações de primeira ordem.

1. $u'' + 0{,}5u' + 2u = 0$
2. $u'' + 0{,}5u' + 2u = 3\,\text{sen}\, t$
3. $t^2u'' + tu' + (t^2 - 0{,}25)u = 0$
4. $u^{(4)} - u = 0$

Em cada um dos Problemas 5 e 6, transforme o problema de valor inicial dado em um problema de valor inicial para duas equações de primeira ordem.

5. $u'' + 0{,}25u' + 4u = 2\cos 3t, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = -2$
6. $u'' + p(t)u' + q(t)u = g(t), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_0'$
7. Sistemas de equações de primeira ordem podem ser transformados, algumas vezes, em uma única equação de ordem maior. Considere o sistema
$$x_1' = -2x_1 + x_2, \qquad x_2' = x_1 - 2x_2.$$
(a) Resolva a primeira equação para x_2 e substitua na segunda equação, obtendo, assim, uma equação de segunda ordem para x_1. Resolva essa equação para x_1 e determine x_2.
(b) Encontre a solução do sistema dado que também satisfaz as condições iniciais $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 3$.
(c) Esboce a curva, para $t \geq 0$, dada em forma paramétrica pelas expressões para x_1 e x_2 encontradas em (b).

Nos problemas de 8 a 12, proceda como no Problema 7 para transformar o sistema dado em uma única equação de ordem maior. Depois encontre x_1 e x_2 que satisfazem, também, as condições iniciais dadas. Finalmente, esboce o gráfico da solução no plano x_1x_2 para $t \geq 0$.

8. $x_1' = 3x_1 - 2x_2, \quad x_1(0) = 3$
$x_2' = 2x_1 - 2x_2, \quad x_2(0) = \frac{1}{2}$
9. $x_1' = 1{,}25x_1 + 0{,}75x_2, \quad x_1(0) = -2$
$x_2' = 0{,}75x_1 + 1{,}25x_2, \quad x_2(0) = 1$
10. $x_1' = x_1 - 2x_2, \quad x_1(0) = -1$
$x_2' = 3x_1 - 4x_2, \quad x_2(0) = 2$
11. $x_1' = 2x_2, \quad x_1(0) = 3$
$x_2' = -2x_1, \quad x_2(0) = 4$

12. $x_1' = -0{,}5x_1 + 2x_2, \quad x_1(0) = -2$
$x_2' = -2x_1 - 0{,}5x_2, \quad x_2(0) = 2$
13. Transforme as Eqs. (2) para o circuito em paralelo em uma única equação de segunda ordem.
14. Mostre que, se a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} são constantes, com a_{12} e a_{21} sem serem nulos ao mesmo tempo, e se as funções g_1 e g_2 são diferenciáveis, então o problema de valor inicial

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1(t), \qquad x_1(0) = x_1^0$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2(t), \qquad x_2(0) = x_2^0$$

pode ser transformado em um problema de valor inicial para uma única equação de segunda ordem. Pode-se usar o mesmo procedimento se $a_{11}, \ldots, a_{22}$ forem funções de t?
15. Considere o sistema linear homogêneo

$$x' = p_{11}(t)x + p_{12}(t)y,$$
$$y' = p_{21}(t)x + p_{22}(t)y.$$

Mostre que, se $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$ e $x = x_2(t)$, $y = y_2(t)$ são duas soluções do sistema dado, então $x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$, $y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ também é solução quaisquer que sejam as constantes c_1 e c_2. Esse é o princípio da superposição.
16. Sejam $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$ e $x = x_2(t)$, $y = y_2(t)$ duas soluções do sistema linear não-homogêneo

$$x' = p_{11}(t)x + p_{12}(t)y + g_1(t),$$
$$y' = p_{21}(t)x + p_{22}(t)y + g_2(t).$$

Mostre que $x = x_1(t) - x_2(t)$, $y = y_1(t) - y_2(t)$ é uma solução do sistema homogêneo correspondente.
17. As Eqs. (1) podem ser deduzidas desenhando-se um diagrama mostrando as forças agindo sobre cada massa. A Fig. 7.1.3*a* mostra a situação quando os deslocamentos x_1 e x_2 das duas massas são ambos positivos (para a direita) e $x_2 > x_1$. Nesse caso, as molas 1 e 2 estão alongadas e a mola 3 está comprimida, gerando as forças ilustradas na Fig. 7.1.3*b*. Use a lei de Newton ($F = ma$) para deduzir as Eqs. (1).

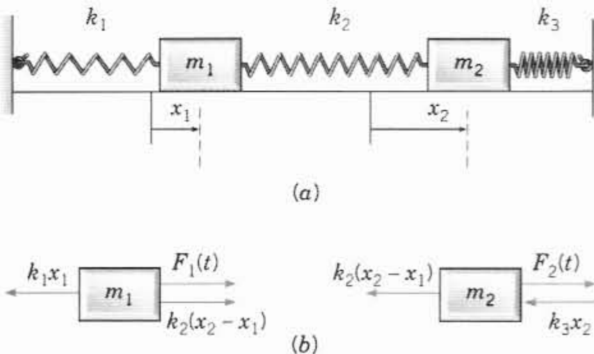


FIG. 7.1.3 (*a*) Os deslocamentos x_1 e x_2 são ambos positivos. (*b*) O diagrama de forças para o sistema massa-mola.

18. Transforme o sistema (1) em um sistema de equações de primeira ordem fazendo $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_1'$ e $y_4 = x_2'$.

Circuitos Elétricos. A teoria de circuitos elétricos, do tipo ilustrado na Fig. 7.1.2, consistindo em indutores, resistências e capacitores, baseia-se nas leis de Kirchhoff: (1) o fluxo total de corrente atravessando cada nó (ou junção) é zero e (2) a diferença de tensão total em cada laço fechado é zero. Além das leis de Kirchhoff, temos, também, a relação entre a corrente I em ampères passando em cada elemento do circuito e a diferença de potencial V naquele elemento, a saber,

$$V = RI, \qquad R = \text{resistência em ohms;}$$
$$C\frac{dV}{dt} = I, \qquad C = \text{capacitância em farads}^2\text{;}$$
$$L\frac{dI}{dt} = V, \qquad L = \text{indutância em henrys.}$$

As leis de Kirchhoff e a relação entre corrente e diferença de tensão em cada elemento do circuito fornecem um sistema de equações algébricas e diferenciais das quais pode-se determinar a diferença de tensão e a corrente em todo o circuito. Os problemas de 19 a 21 ilustram o procedimento que acabamos de descrever.

19. Considere o circuito ilustrado na Fig. 7.1.2. Sejam I_1, I_2 e I_3 as correntes atravessando, respectivamente, o capacitor, a resistência e o indutor. Analogamente, sejam V_1, V_2 e V_3 as diferenças de tensão correspondentes. As setas denotam as direções, escolhidas arbitrariamente, nas quais as correntes e diferenças de tensão serão consideradas positivas.
(a) Aplicando a segunda lei de Kirchhoff no laço superior do circuito, mostre que

$$V_1 - V_2 = 0. \tag{i}$$

De maneira análoga, mostre que

$$V_2 - V_3 = 0. \tag{ii}$$

(b) Aplicando a primeira lei de Kirchhoff em qualquer dos nós do circuito, mostre que

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \tag{iii}$$

(c) Use a relação entre a corrente e a diferença de tensão em cada elemento do circuito para obter as equações

$$CV_1' = I_1, \qquad V_2 = RI_2, \qquad LI_3' = V_3. \tag{iv}$$

(d) Elimine V_2, V_3, I_1 e I_2 das equações de (i) a (iv) para obter

$$CV_1' = -I_3 - \frac{V_1}{R}, \qquad LI_3' = V_1. \tag{v}$$

Observe que, se omitirmos os índices nas Eqs. (v), então teremos o sistema (2) desta seção.
20. Considere o circuito ilustrado na Fig. 7.1.4. Use o método esboçado no Problema 19 para mostrar que a corrente I através do indutor e a diferença de tensão V através do capacitor satisfazem o sistema de equações diferenciais

$$\frac{dI}{dt} = -I - V, \qquad \frac{dV}{dt} = 2I - V.$$

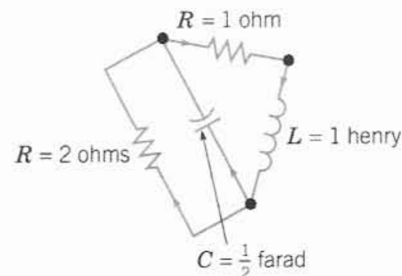


FIG. 7.1.4 O circuito do Problema 20.

21. Considere o circuito ilustrado na Fig. 7.1.5. Use o método esboçado no Problema 19 para mostrar que a corrente I através

[2]Capacitores, de fato, têm capacitâncias medidas, tipicamente, em microfarads. Usamos farad como unidade de medida por conveniência numérica.

do indutor e a diferença de tensão V através do capacitor satisfazem o sistema de equações diferenciais

$$L\frac{dI}{dt} = -R_1 I - V, \qquad C\frac{dV}{dt} = I - \frac{V}{R_2}.$$

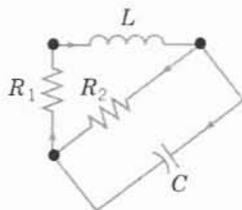


FIG. 7.1.5 O circuito do Problema 21.

22. Considere os dois tanques interligados ilustrados na Fig. 7.1.6.[3] O tanque 1 contém, inicialmente, 30 gal (≅ 136 l) de água e 25 oz (≅ 709 g) de sal, e o tanque 2 contém, inicialmente, 20 gal (≅ 91 l) de água e 15 oz (≅ 425 g) de sal. Entra no tanque 1 uma mistura de água contendo 1 oz/gal (≅ 6 g/l) a uma taxa de 1,5 gal/min (≅ 31 l/min). A mistura flui do tanque 1 para o tanque 2 a uma taxa de 3 gal/min (≅ 62 l/min). Entra, também, no tanque 2, vinda de fora, uma mistura de água contendo 3 oz/gal (≅ 19 g/l) a uma taxa de 1 gal/min (≅ 4,5 l/min). A mistura escorre do tanque 2 a uma taxa de 4 gal/min (≅ 18 l/min) e parte dela volta para o tanque 1 a uma taxa de 1,5 gal/min (≅ 31 l/min), enquanto o restante deixa o sistema.
(a) Sejam $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$ as quantidades de sal nos tanques 1 e 2, respectivamente, no instante t. Escreva as equações diferenciais e as condições iniciais que modelam o processo de fluxo. Observe que o sistema de equações diferenciais é não-homogêneo.
(b) Encontre os valores de Q_1 e Q_2 para os quais o sistema está em equilíbrio, isto é, não varia com o tempo. Sejam Q_1^E e Q_2^E os valores de equilíbrio. Você pode prever qual tanque atingirá seu estado de equilíbrio mais rapidamente?
(c) Sejam $x_1(t) = Q_1(t) - Q_1^E$ e $x_2(t) = Q_2(t) - Q_2^E$. Determine um problema de valor inicial para x_1 e x_2. Observe que o sistema de equações para x_1 e x_2 é homogêneo.

23. Considere dois tanques interligados de maneira análoga aos da Fig. 7.1.6. O tanque 1 contém, inicialmente, 60 gal (≅ 273 l) de água e Q_1^0 oz (1 oz ≅ 28 g) de sal, e o tanque 2 contém, inicialmente, 100 gal (≅ 455 l) de água e Q_2^0 oz de sal. Está entrando no tanque 1, a uma taxa de 3 gal/min (≅ 14 l/min), uma mistura de água contendo q_1 oz/gal (1 oz/gal ≅ 6 g/l). A mistura no tanque 1 sai a uma taxa de 4 gal/min (≅ 18 l/min), e metade entra no tanque 2 enquanto o restante deixa o sistema. O tanque 2 também recebe uma mistura de água com q_2 oz/gal de sal, que entra a uma taxa de 1 gal/min (≅ 4,5 l/min). A mistura no tanque 2 sai do tanque a uma taxa de 3 gal/min, dos quais uma parte volta para o tanque 1 a uma taxa de 1 gal/min, enquanto o restante deixa o sistema.
(a) Desenhe um diagrama que ilustre o processo de fluxo descrito anteriormente. Sejam $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$ as quantidades de sal nos tanques 1 e 2, respectivamente, no instante t. Escreva as equações diferenciais e as condições iniciais para Q_1 e Q_2 que modelam o processo de fluxo.
(b) Encontre os valores de equilíbrio Q_1^E e Q_2^E em função das concentrações q_1 e q_2.
(c) É possível (ajustando q_1 e q_2) obter $Q_1^E = 60$ e $Q_2^E = 50$ como um estado de equilíbrio?
(d) Descreva os estados de equilíbrio possíveis para esse sistema para diversos valores de q_1 e q_2.

7.2 Revisão de Matrizes

Por razões tanto teóricas quanto computacionais, é melhor ter em mente alguns dos resultados sobre a teoria de matrizes[4] para um problema de valor inicial para um sistema de equações diferenciais lineares. Para facilitar, esta e a próxima seção são dedicadas a um pequeno resumo dos fatos sobre matrizes que usaremos depois. Maiores detalhes podem ser encontrados em qualquer livro elementar de álgebra linear. Supomos, no entanto, que você conhece determinantes e sabe calculá-los.

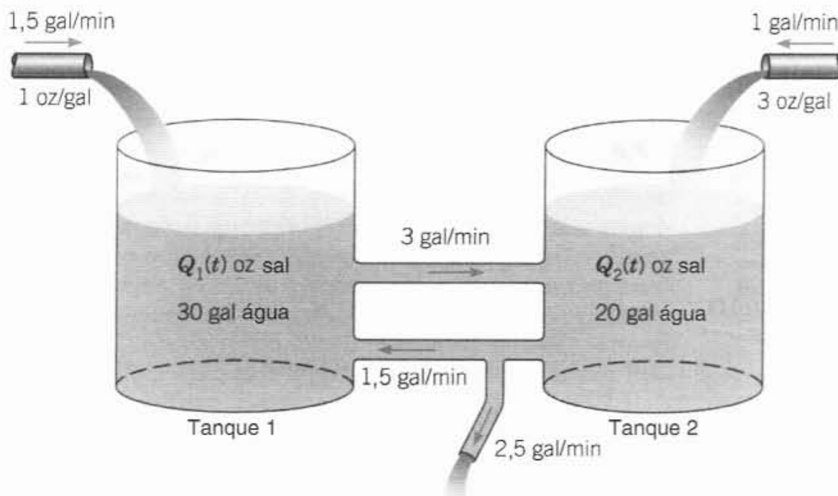


FIG. 7.1.6 Dois tanques interligados (Problema 22).

[3]Usamos as abreviações gal para galão, oz para onças e min para minutos; 1 oz ≅ 28,3495 g e 1 gal ≅ 4,546 l. (*N.T.*)
[4]As propriedades de matrizes foram exploradas pela primeira vez em um artigo de 1858 escrito pelo algebrista inglês Arthur Cayley (1821–1895), embora a palavra "matriz" tenha sido introduzida por seu amigo James Sylvester (1814–1897) em 1850. Cayley fez parte de seu trabalho matemático mais importante enquanto advogava, de 1849 até 1863; tornou-se, depois, professor de matemática em Cambridge, uma posição que manteve até o fim de sua vida. Depois do trabalho pioneiro de Cayley, o desenvolvimento da teoria de matrizes foi rápido, com contribuições importantes de Charles Hermite, Georg Frobenius e Camille Jordan, entre outros.

Vamos denotar matrizes por letras maiúsculas em negrito, **A**, **B**, **C**, ..., usando, de vez em quando, letras gregas maiúsculas como **Φ**, **Ψ**, ... Uma matriz **A** consiste em um arranjo retangular de números ou elementos, arrumados em m linhas e n colunas, isto é

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Dizemos que **A** é uma matriz $m \times n$. Embora mais adiante neste capítulo façamos, muitas vezes, a hipótese de que os elementos de determinadas matrizes são números reais, nesta seção vamos supor que os elementos possam ser números complexos. O elemento que está na i-ésima linha e j-ésima coluna será denotado por a_{ij}, onde o primeiro índice identifica a linha, e o segundo, a coluna. Algumas vezes utiliza-se a notação (a_{ij}) para denotar a matriz cujo elemento genérico é a_{ij}.

Associada a cada matriz **A** existe a matriz $\mathbf{A}^T$, conhecida como **transposta** de **A**, que é obtida de **A** permutando-se as linhas e colunas de **A**. Assim, se $\mathbf{A} = (a_{ij})$, então $\mathbf{A}^T = (a_{ji})$. Além disso, denotaremos o complexo conjugado de a_{ij} por $\overline{a}_{ij}$ e a matriz obtida de **A** trocando-se todos os elementos pelos seus conjugados por $\overline{\mathbf{A}}$. A matriz $\overline{\mathbf{A}}$ é a **conjugada** de **A**. Será necessário, também, considerar a transposta da conjugada, $\overline{\mathbf{A}}^T$. Essa matriz é chamada de **adjunta** de **A** e denotada por $\mathbf{A}^*$.

Por exemplo, considere

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 4+3i & -5+2i \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4+3i \\ 2-i & -5+2i \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 2+i \\ 4-3i & -5-2i \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 3 & 4-3i \\ 2+i & -5-2i \end{pmatrix}.$$

Estamos particularmente interessados em dois tipos especiais de matrizes: matrizes quadradas, que têm o mesmo número de linhas e colunas — isto é, $m = n$; e vetores (ou vetores colunas), que podem ser considerados como matrizes $n \times 1$, ou matrizes tendo apenas uma coluna. Dizemos que uma matriz quadrada com n linhas e n colunas é de ordem n. Denotaremos vetores (colunas) por letras minúsculas em negrito, **x**, **y**, **ξ**, **η**, ... A transposta $\mathbf{x}^T$ de uma coluna $n \times 1$ é um vetor linha — isto é, a matriz consistindo em apenas uma linha cujos elementos são iguais aos elementos nas posições correspondentes de **x**.

Propriedades de Matrizes.

1. **Igualdade.** Duas matrizes $m \times n$ **A** e **B** são ditas iguais se todos os elementos correspondentes são iguais — isto é, se $a_{ij} = b_{ij}$ quaisquer que sejam i e j.

2. **Matriz Nula.** O símbolo **0** será usado para denotar a matriz (ou vetor) com todos os elementos iguais a 0.

3. **Soma.** A soma de duas matrizes $m \times n$ **A** e **B** é definida como a matriz obtida somando-se os elementos correspondentes:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}). \tag{2}$$

Com essa definição, segue que a soma de matrizes é comutativa e associativa, de modo que

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \qquad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}. \tag{3}$$

4. **Multiplicação por um Número.** O produto de uma matriz **A** por um número complexo α é definido da seguinte maneira:

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij}). \tag{4}$$

As propriedades distributivas

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}, \qquad (\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A} \tag{5}$$

são satisfeitas por esse tipo de multiplicação. Em particular, a matriz negativa de **A**, denotada por $-\mathbf{A}$, é definida por

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A}. \tag{6}$$

5. **Subtração.** A diferença $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ de duas matrizes $m \times n$ é definida por

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}). \tag{7}$$

Logo,

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij}), \tag{8}$$

que é semelhante à Eq. (2).

6. **Multiplicação.** O produto **AB** de duas matrizes está definido sempre que o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda. Se **A** e **B** são matrizes $m \times n$ e $n \times r$, respectivamente, então o produto $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ é uma matriz $m \times r$. O elemento na i-ésima linha e j-ésima coluna de **C** é encontrado multiplicando-se cada elemento da i-ésima linha de **A** pelo elemento correspondente da j-ésima coluna de **B** e, depois, somando-se os produtos resultantes. Em símbolos,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}. \tag{9}$$

Pode-se mostrar, através de um cálculo direto, que a multiplicação de matrizes é associativa,

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \tag{10}$$

e distributiva,

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}. \tag{11}$$

No entanto, em geral, a multiplicação de matrizes não é comutativa. Para que ambos os produtos **AB** e **BA** existam e sejam de mesmo tamanho, é necessário que as matrizes **A** e **B** sejam quadradas de mesma ordem. Mesmo nesse caso, os produtos são, normalmente, diferentes, de modo que, em geral

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}. \tag{12}$$

Exemplo 1

Para ilustrar a multiplicação de matrizes e o fato de que a multiplicação não é comutativa, considere as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da definição de multiplicação dada pela Eq. (9), temos

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2-2+2 & 1+2-1 & -1+0+1 \\ 0+2-2 & 0-2+1 & 0+0-1 \\ 4+1+2 & 2-1-1 & -2+0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, vemos que

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

É claro que $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

7. **Multiplicação de Vetores.** Existem diversas maneiras de se formar um produto de dois vetores x e y, cada um com n componentes. Uma delas é uma extensão natural por n dimensões do produto interno da física e do cálculo; vamos denotar esse produto por x^Ty e escrever

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{13}$$

O resultado da Eq. (13) é um número (complexo), e segue diretamente da Eq. (13) que

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}^T(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y} + \mathbf{x}^T\mathbf{z}, \qquad (\alpha\mathbf{x})^T\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{x}^T\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T(\alpha\mathbf{y}). \tag{14}$$

Existe um outro produto vetorial definido para dois vetores quaisquer com o mesmo número de componentes. Esse produto, denotado por $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, é chamado de **produto interno**[5] e é definido por

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i. \tag{15}$$

O produto interno também é um número (complexo) e, comparando as Eqs. (13) e (15), vemos que

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\overline{\mathbf{y}}. \tag{16}$$

Então, se todos os elementos forem reais, os dois produtos (13) e (15) são idênticos. Segue da Eq. (15) que

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}, \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y}+\mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z}), \qquad (\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad (\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) = \overline{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{17}$$

Note que, mesmo que o vetor $\mathbf{x}$ tenha elementos com parte imaginária não-nula, o produto interno de $\mathbf{x}$ consigo mesmo é um número real não-negativo:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x}_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2. \tag{18}$$

A quantidade não-negativa $(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}$, denotada, muitas vezes, por $\|\mathbf{x}\|$, é chamada de **comprimento** ou **tamanho** de $\mathbf{x}$. Se $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, os dois vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são ditos **ortogonais**. Por exemplo, os vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, da geometria vetorial tridimensional, formam um conjunto ortogonal. Por outro lado, se alguns dos elementos de $\mathbf{x}$ não são reais, então o produto matricial

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{19}$$

pode não ser um número real.

Por exemplo, sejam

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ 1+i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2-i \\ i \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T\mathbf{y} &= (i)(2-i) + (-2)(i) + (1+i)(3) = 4+3i, \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (i)(2+i) + (-2)(-i) + (1+i)(3) = 2+7i, \\ \mathbf{x}^T\mathbf{x} &= (i)^2 + (-2)^2 + (1+i)^2 = 3+2i, \\ (\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= (i)(-i) + (-2)(-2) + (1+i)(1-i) = 7. \end{aligned}$$

8. **Matriz Identidade.** A identidade multiplicativa ou, simplesmente, a matriz identidade $\mathbf{I}$, é dada por

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Da definição de multiplicação matricial, temos

$$\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A} \tag{21}$$

para qualquer matriz (quadrada) $\mathbf{A}$. Portanto, a comutatividade é válida para matrizes quadradas se uma delas é a identidade.

9. **Inversa.** A matriz quadrada $\mathbf{A}$ é dita **não-singular** ou **invertível** se existe uma outra matriz $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, onde $\mathbf{I}$ é a identidade. Se existe tal matriz $\mathbf{B}$, pode-se

[5]Em português, esse produto também é chamado, muitas vezes, de produto escalar. No entanto, para não confundir com o produto definido pela Eq. (13), reservaremos a nomenclatura "escalar" para o produto definido por (13). (*N.T.*)

mostrar que existe apenas uma. Ela é chamada de inversa multiplicativa ou, simplesmente, inversa de **A** e denotada por $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Então,

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \qquad (22)$$

Matrizes que não têm inversas são ditas **singulares** ou **não invertíveis**.

Existem várias maneiras de se calcular $\mathbf{A}^{-1}$ a partir de **A**, supondo que exista. Uma envolve o uso de determinantes. A cada elemento a_{ij} de uma matriz dada, associa-se o menor M_{ij}, que é o determinante da matriz obtida excluindo-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna da matriz original — isto é, a linha e a coluna que contêm o elemento a_{ij}. Além disso, associa-se a cada elemento a_{ij} o co-fator C_{ij} definido pela equação

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \qquad (23)$$

Se $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, pode-se mostrar que o elemento b_{ij} é dado por

$$b_{ij} = \frac{C_{ji}}{\det \mathbf{A}}. \qquad (24)$$

Embora a Eq. (24) não seja um modo eficiente[6] de calcular $\mathbf{A}^{-1}$, esta sugere uma condição que **A** precisa satisfazer para ter inversa. De fato, a condição é necessária e suficiente: **A** é não singular se, e somente se, $\det \mathbf{A} \neq 0$. Se $\det \mathbf{A} = 0$, então **A** é singular.

Uma outra maneira, geralmente melhor, de calcular $\mathbf{A}^{-1}$ é através de operações elementares sobre as linhas. Existem três dessas operações:

1. Permutar duas linhas.
2. Multiplicar uma linha por um escalar diferente de zero.
3. Somar qualquer múltiplo de uma linha a uma outra linha.

A transformação de uma matriz por uma seqüência de operações elementares é chamada de **redução por linhas** ou **método de eliminação de Gauss**[7]. Qualquer matriz invertível **A** pode ser transformada na identidade **I** através de uma seqüência sistemática dessas operações. É possível mostrar que, se a mesma seqüência de operações for efetuada em **I**, então **I** é transformada em $\mathbf{A}^{-1}$. É bastante eficiente fazer a seqüência de operações em ambas as matrizes ao mesmo tempo formando a matriz aumentada $\mathbf{A}|\mathbf{I}$. O exemplo a seguir ilustra o cálculo de uma matriz inversa desse modo.

Exemplo 2

Encontre a inversa da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Começamos formando a matriz aumentada

$$\mathbf{A}|\mathbf{I} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

A matriz **A** pode ser transformada em **I** pela seqüência de operações a seguir e, ao mesmo tempo, **I** é tranformada em $\mathbf{A}^{-1}$. O resultado de cada passo aparece abaixo do enunciado.

(a) Obtenha zeros na primeira coluna fora da diagonal somando (-3) vezes a primeira linha à segunda e somando (-2) vezes a primeira linha à terceira.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(b) Obtenha 1 na posição diagonal na segunda coluna multiplicando a segunda linha por 1/2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(c) Obtenha zeros na segunda coluna fora da diagonal somando a segunda linha à primeira e somando (-4) vezes a segunda linha à terceira.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

(d) Obtenha 1 na posição diagonal na terceira coluna multiplicando a terceira linha por $(-1/5)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right)$$

(e) Obtenha zeros na terceira coluna fora da diagonal somando $(-3/2)$ vezes a terceira linha à primeira e somando $(-5/2)$ vezes a terceira linha à segunda.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right)$$

A última dessas matrizes é $\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}$, um fato que pode ser verificado diretamente através da multiplicação pela matriz original **A**.

[6] Para valores grandes de n, o número de multiplicações necessárias para se calcular $\mathbf{A}^{-1}$ pela Eq. (24) é proporcional a $n!$. Com a utilização de métodos mais eficientes, como a redução por linhas descrita mais adiante, o número de multiplicações fica proporcional a n^3 apenas. Mesmo para valores pequenos de n (como $n = 4$), determinantes não são ferramentas boas para o cálculo de inversas, e métodos de redução por linhas são preferíveis.

[7] Carl Friedrich Gauss (1777-1855) passou a maior parte de sua vida em Göttingen e fez contribuições importantes em muitas áreas da matemática, incluindo teoria dos números, álgebra, geometrias não-euclidianas e diferencial, e análise, assim como em campos mais aplicados como geodesia, estatística e mecânica celeste. Ele é considerado, geralmente, como estando entre os seis melhores matemáticos de todos os tempos.

Esse exemplo tornou-se ligeiramente mais simples pelo fato de que a matriz original **A** tinha o primeiro elemento igual a 1 ($a_{11} = 1$). Se não for esse o caso, então o primeiro passo é produzir um 1 nessa posição multiplicando-se a primeira linha por $1/a_{11}$, se $a_{11} \neq 0$. Se $a_{11} = 0$, então a primeira linha tem que ser trocada por outra, de modo a trazer um elemento diferente de zero para o primeiro elemento da primeira linha antes de prosseguir.

Matrizes de Funções. Vamos precisar, algumas vezes, considerar vetores ou matrizes cujos elementos são funções de uma variável real t. Escrevemos

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \tag{25}$$

respectivamente.

A matriz $\mathbf{A}(t)$ é dita contínua em $t = t_0$ ou em um intervalo $\alpha < t < \beta$, se todos os elementos de **A** são funções contínuas de t no ponto dado ou no intervalo dado. Analogamente, $\mathbf{A}(t)$ é dita diferenciável se todos os seus elementos são diferenciáveis e sua derivada $d\mathbf{A}/dt$ é definida por

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{da_{ij}}{dt}\right); \tag{26}$$

isto é, cada elemento de $d\mathbf{A}/dt$ é a derivada do elemento correspondente de **A**. Do mesmo modo, a integral de uma matriz de funções é definida por

$$\int_a^b \mathbf{A}(t)\,dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t)\,dt\right). \tag{27}$$

Por exemplo, se

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & t \\ 1 & \cos t \end{pmatrix},$$

então,

$$\mathbf{A}'(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 1 \\ 0 & -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}, \quad \int_0^\pi \mathbf{A}(t)\,dt = \begin{pmatrix} 2 & \pi^2/2 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}.$$

Muitas das propriedades do cálculo elementar podem ser facilmente estendidas para matrizes de funções; em particular,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{CA}) = \mathbf{C}\frac{d\mathbf{A}}{dt}, \quad \text{onde } \mathbf{C} \text{ é uma matriz constante}; \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}; \tag{29}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B}. \tag{30}$$

É preciso tomar cuidado em cada termo das Eqs. (28) e (30) para evitar trocar a ordem de multiplicação. As definições expressas pelas Eqs. (26) e (27) também se aplicam ao caso particular de vetores.

Problemas

1. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, encontre

(a) $2\mathbf{A} + \mathbf{B}$ (b) $\mathbf{A} - 4\mathbf{B}$
(c) $\mathbf{AB}$ (d) $\mathbf{BA}$

2. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+i & -1+2i \\ 3+2i & 2-i \end{pmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 3 \\ 2 & -2i \end{pmatrix}$, encontre

(a) $\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$ (b) $3\mathbf{A} + \mathbf{B}$
(c) $\mathbf{AB}$ (d) $\mathbf{BA}$

3. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, encontre

(a) $\mathbf{A}^T$ (b) $\mathbf{B}^T$
(c) $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ (d) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T$

4. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3-2i & 1+i \\ 2-i & -2+3i \end{pmatrix}$, encontre

(a) $\mathbf{A}^T$ (b) $\overline{\mathbf{A}}$ (c) $\mathbf{A}^*$

5. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, verifique que

$2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 2\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$.

6. Se $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, e

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, verifique que

(a) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
(b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
(c) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

7. Prove cada uma das propriedades a seguir da álgebra de matrizes:

(a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
(b) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
(c) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$
(d) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$
(e) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$
(f) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

8. Se $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 1-i \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1+i \\ 2 \\ 3-i \end{pmatrix}$, encontre

(a) $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ (b) $\mathbf{y}^T\mathbf{y}$
(c) $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (d) $(\mathbf{y}, \mathbf{y})$

9. Se $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1-2i \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$, mostre que

(a) $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x}$ (b) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$

Nos problemas de 10 a 19, calcule a inversa da matriz dada ou mostre que ela é singular.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -7 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

20. Prove que, se existem duas matrizes **B** e **C** tais que **AB** = **I** e **AC** = **I**, então **B** = **C**. Isso mostra que a matriz **A** só pode ter uma inversa.

21. Se $\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 2e^t & e^{-t} & -e^{2t} \\ -e^t & 3e^{-t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}$ e

$\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{-t} & 3e^{2t} \\ -e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 3e^t & -e^{-t} & -e^{2t} \end{pmatrix}$, encontre

(a) $\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$ (b) $\mathbf{AB}$

(c) $d\mathbf{A}/dt$ (d) $\int_0^1 \mathbf{A}(t)\, dt$

Nos problemas de 22 a 24, verifique que o vetor dado satisfaz a equação diferencial dada.

22. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$

23. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^t$

24. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-t} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$

Nos Problemas 25 e 26, verifique que a matriz dada satisfaz a equação diferencial dada.

25. $\mathbf{\Psi}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{\Psi}$, $\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{2t} \\ -4e^{-3t} & e^{2t} \end{pmatrix}$

26. $\mathbf{\Psi}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{\Psi}$, $\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-2t} & e^{3t} \\ -4e^t & -e^{-2t} & 2e^{3t} \\ -e^t & -e^{-2t} & e^{3t} \end{pmatrix}$

7.3 Sistemas de Equações Lineares Algébricas; Independência Linear, Autovalores e Autovetores

Vamos rever, nesta seção, alguns resultados de álgebra linear que são importantes para a solução de sistemas lineares de equações diferenciais. Alguns desses resultados são facilmente demonstráveis, outros não; como estamos interessados apenas em resumir uma informação útil de forma compacta, não daremos indicação da demonstração em nenhum dos casos. Todos os resultados nesta seção dependem de alguns fatos básicos sobre sistemas lineares de equações algébricas.

Sistemas Lineares de Equações Algébricas. Um conjunto de n equações algébricas lineares simultâneas em n variáveis,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \tag{1}$$

pode ser escrito como

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{2}$$

onde a matriz $n \times n$ **A** e o vetor **b** são dados, e as componentes de **x** têm que ser determinadas. Se $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, o sistema é dito **homogêneo**; caso contrário, ele é **não-homogêneo**.

Se a matriz de coeficientes **A** é invertível — isto é, se det **A** é diferente de zero — então o sistema (2) tem uma única solução. Como **A** é invertível, $\mathbf{A}^{-1}$ existe e a solução pode ser encontrada multiplicando-se cada lado da Eq. (2) à esquerda por $\mathbf{A}^{-1}$; assim,

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \tag{3}$$

Em particular, o problema homogêneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, correspondente a $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ na Eq. (2), tem apenas a solução trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Por outro lado, se **A** for singular — isto é, se det **A** é zero — então ou não existe solução da Eq. (2), ou existe, mas não é única. Como **A** é singular, $\mathbf{A}^{-1}$ não existe, de modo que a Eq. (3) não é mais válida. O sistema homogêneo

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \tag{4}$$

tem (uma infinidade de) soluções não-nulas, além da solução trivial. A situação para o sistema não-homogêneo (2) é mais complicada. Esse sistema não tem solução, a menos que o vetor **b** satisfaça uma determinada condição. Essa condição é que

$$(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = 0, \tag{5}$$

para todos os vetores **y** tais que $\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{A}^*$ é a adjunta de **A**. Se a condição (5) for satisfeita, então o sistema (2) tem uma infinidade de soluções. Cada uma dessas soluções tem a forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \boldsymbol{\xi}, \tag{6}$$

onde $\mathbf{x}^{(0)}$ é uma solução particular da Eq. (2) e $\boldsymbol{\xi}$ é qualquer solução do sistema homogêneo (4). Note a semelhança entre a Eq. (6) e a solução de uma equação diferencial linear não-homogênea. As demonstrações de algumas das afirmações precedentes estão esboçadas nos problemas de 25 a 29.

Os resultados do parágrafo anterior são importantes para classificar as soluções de sistemas lineares. No entanto, para resolver um sistema particular, é melhor, em geral, usar redução por linhas para transformar o sistema em um muito mais simples, do qual a solução (ou as soluções), se existir(em), pode(m) ser

escrita(s) facilmente. Para fazer isso de maneira eficiente, podemos formar a **matriz aumentada**

$$\mathbf{A} \mid \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & | & b_1 \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & | & b_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

juntando o vetor **b** à matriz de coeficientes **A** como uma coluna adicional. A linha pontilhada fica no lugar dos sinais de igualdade e particiona a matriz aumentada. Agora efetuamos as operações elementares na matriz aumentada de modo a transformar **A** em uma matriz triangular — isto é, em uma matriz cujos elementos abaixo da diagonal principal são todos nulos. Uma vez feito isso, é fácil ver se o sistema tem ou não solução e, se tiver, encontrá-las. Observe que as operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada (7) são operações legítimas sobre as equações do sistema (1). O exemplo a seguir ilustra esse processo.

Exemplo 1

Resolva o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= -5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4. \end{aligned} \tag{8}$$

A matriz aumentada para o sistema (8) é

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 7 \\ -1 & 1 & -2 & | & -5 \\ 2 & -1 & -1 & | & 4 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Vamos agora efetuar operações elementares sobre as linhas da matriz (9) com o objetivo de introduzir zeros na matriz em sua parte inferior à esquerda. Cada passo está descrito e o resultado é mostrado em seguida.

(a) Some a primeira à segunda linha e some (-2) vezes a primeira linha à terceira.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 7 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 3 & -7 & | & -10 \end{pmatrix}$$

(b) Multiplique a segunda linha por -1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 7 \\ 0 & 1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 3 & -7 & | & -10 \end{pmatrix}$$

(c) Some (-3) vezes a segunda linha à terceira.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 7 \\ 0 & 1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & -4 & | & -4 \end{pmatrix}$$

(d) Divida a terceira linha por -4.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 7 \\ 0 & 1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz obtida desse modo corresponde ao sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7, \\ x_2 - x_3 &= -2, \\ x_3 &= 1, \end{aligned} \tag{10}$$

que é equivalente ao sistema original (8). Note que os coeficientes nas Eqs. (10) formam uma matriz triangular. Da última das Eqs. (10), temos $x_3 = 1$; da segunda, $x_2 = -2 + x_3 = -1$; e, da primeira, $x_1 = 7 + 2x_2 - 3x_3 = 2$. Obtemos, assim,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

que é a solução do sistema dado (8). Aliás, como a solução é única, concluímos que a matriz de coeficientes é invertível.

Exemplo 2

Discuta as soluções do sistema

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= b_1, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= b_2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{11}$$

para diversos valores de b_1, b_2 e b_3.

Observe que os coeficientes no sistema (11) são os mesmos do sistema (8) exceto pelo coeficiente de x_3 na terceira equação. A matriz aumentada do sistema (11) é

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & b_1 \\ -1 & 1 & -2 & | & b_2 \\ 2 & -1 & 3 & | & b_3 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Efetuando as operações (a), (b) e (c) como no Exemplo 1, transformamos a matriz (12) em

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & | & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & | & -b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & | & b_1 + 3b_2 + b_3 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

A equação correspondente à terceira linha da matriz (13) é

$$b_1 + 3b_2 + b_3 = 0; \tag{14}$$

logo, o sistema (11) não tem solução a menos que a condição (14) seja satisfeita por b_1, b_2 e b_3. É possível mostrar que essa condição é exatamente a Eq. (5) para o sistema (11).

Vamos supor que $b_1 = 2$, $b_2 = 1$ e $b_3 = -5$, caso em que a Eq. (14) é satisfeita. Então as duas primeiras linhas da matriz (13) correspondem às equações

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2, \\ x_2 - x_3 &= -3. \end{aligned} \qquad (15)$$

Para resolver o sistema (15), escolhemos uma das incógnitas arbitrariamente e resolvemos para as outras duas. Fazendo $x = \alpha$, onde α é arbitrário, segue que

$$\begin{aligned} x_2 &= \alpha - 3, \\ x_1 &= 2(\alpha - 3) - 3\alpha + 2 = -\alpha - 4. \end{aligned}$$

Escrevendo a solução em notação vetorial, temos

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\alpha - 4 \\ \alpha - 3 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

É fácil verificar que a segunda parcela à direita do segundo sinal de igualdade na Eq. (16) é uma solução do sistema não-homogêneo (11) e que a primeira parcela é a solução mais geral possível do sistema homogêneo correspondente a (11).

A redução por linhas é também útil na resolução de sistemas homogêneos e de sistemas nos quais o número de equações é diferente do número de incógnitas.

Independência Linear. Um conjunto de k vetores $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ é dito **linearmente dependente** se existe um conjunto de números (complexos) $c_1, \ldots, c_k$, nem todos nulos, tais que

$$c_1\mathbf{x}^{(1)} + \cdots + c_k\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0}. \qquad (17)$$

Em outras palavras, $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ são linearmente dependentes se existe uma relação linear entre eles. Por outro lado, se o único conjunto $c_1, \ldots, c_k$ para o qual a Eq. (17) é satisfeita é $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$, então $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ são ditos **linearmente independentes**.

Considere um conjunto de n vetores, cada um deles com n componentes. Seja $x_{ij} = x_i^{(j)}$ a i-ésima componente do vetor $\mathbf{x}^{(j)}$ e seja $\mathbf{X} = (x_{ij})$. Então, a Eq. (17) pode ser escrita na forma

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)}c_1 + \cdots + x_1^{(n)}c_n \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_n^{(1)}c_1 + \cdots + x_n^{(n)}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}c_1 + \cdots + x_{1n}c_n \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_{n1}c_1 + \cdots + x_{nn}c_n \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{Xc} = \mathbf{0}. \qquad (18)$$

Se $\det \mathbf{X} \neq 0$, então a única solução da Eq. (18) é $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, mas, se $\det \mathbf{X} = \mathbf{0}$, existem soluções não-nulas. Logo, o conjunto de vetores $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ é linearmente dependente se, e somente se, $\det \mathbf{X} \neq \mathbf{0}$.

Exemplo 3

Determine se os vetores

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} \qquad (19)$$

são linearmente independentes ou linearmente dependentes. Se forem linearmente dependentes, encontre uma relação linear entre eles.

Para determinar se $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ e $\mathbf{x}^{(3)}$ são linearmente dependentes, procuramos constantes c_1, c_2 e c_3 tais que

$$c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)} + c_3\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0}. \qquad (20)$$

A Eq. (20) também pode ser escrita na forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (21)$$

e resolvida através de operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -11 & 0 \end{array}\right). \qquad (22)$$

Vamos proceder como nos Exemplos 1 e 2.

(a) Some (-2) vezes a primeira linha à segunda e some a primeira à terceira linha.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & -15 & 0 \end{array}\right)$$

(b) Divida a segunda linha por -3; depois some (-5) vezes a segunda linha à terceira.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Obtemos, assim, o sistema equivalente

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 - 4c_3 &= 0, \\ c_2 - 3c_3 &= 0. \end{aligned} \qquad (23)$$

Da segunda das Eqs. (23), temos $c_2 = 3c_3$ e, da primeira, obtemos $c_1 = 4c_3 - 2c_2 = -2c_3$. Resolvemos, então, para c_1 e c_2 em função de c_3, com esse último arbitrário. Se escolhermos, por conveniência, $c_3 = -1$, teremos $c_1 = 2$ e $c_2 = -3$. Nesse caso a relação (20) fica

$$2\mathbf{x}^{(1)} - 3\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0},$$

e os vetores dados são, claramente, linearmente dependentes.

De um modo alternativo, podemos calcular $\det(x_{ij})$, cujas colunas são as componentes $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$, respectivamente. Então

$$\det(x_{ij}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{vmatrix}$$

e um cálculo direto mostra que é igual a zero. Logo $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$ são linearmente dependentes. No entanto, se for necessário calcular os coeficientes c_1, c_2 e c_3, ainda vamos precisar resolver a Eq. (20) para encontrá-los.

Muitas vezes, é útil pensar nas colunas (ou linhas) de uma matriz $\mathbf{A}$ como vetores. Esses vetores colunas (ou linhas) são linearmente independentes se, e somente se, $\det \mathbf{A} \neq \mathbf{0}$. Além disso, se $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, pode-se mostrar que $\det \mathbf{C} = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$. Portanto, se as colunas (ou linhas) de ambas, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, são linearmente independentes, então as colunas (ou linhas) de $\mathbf{C}$ também o são.

Vamos agora estender os conceitos de dependência e independência linear a um conjunto de vetores de funções $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ definidas em um intervalo $\alpha < t < \beta$. Os vetores $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ são ditos linearmente dependentes em $\alpha < t < \beta$ se existir um conjunto de constantes $c_1, \ldots, c_k$, não todas nulas, tais que $c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \ldots + c_k\mathbf{x}^{(k)}(t) = \mathbf{0}$ para todo t no intervalo. Caso contrário, $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ são ditos linearmente independentes. Note que, se $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ são linearmente dependentes em um intervalo, então eles são linearmente dependentes em todos os pontos do intervalo. No entanto, se $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ forem linearmente independentes em um intervalo, eles podem ou não ser linearmente independentes em cada ponto; eles podem, de fato, ser linearmente dependentes em cada ponto, mas com um conjunto diferente de constantes em pontos diferentes. Veja o Problema 14 para um exemplo.

Autovalores e Autovetores. A equação

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \tag{24}$$

pode ser vista como uma transformação linear que leva (ou transforma) um vetor dado $\mathbf{x}$ em um novo vetor $\mathbf{y}$. Vetores que são transformados em múltiplos de si mesmo são importantes em muitas aplicações.[8] Para encontrar tais vetores, fazemos $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$, onde λ é um fator escalar de proporcionalidade, e procuramos soluções das equações

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}, \tag{25}$$

ou

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{26}$$

A última equação tem soluções não-nulas se, e somente se, λ for escolhido de modo que

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \tag{27}$$

Os valores de λ que satisfazem a Eq. (27) são chamados de **autovalores** da matriz $\mathbf{A}$, e as soluções não-nulas correspondentes das Eqs. (25) ou (26), obtidas usando-se um tal valor de λ, são chamadas de **autovetores** correspondentes, ou associados, àquele autovalor.

Se $\mathbf{A}$ é uma matriz 2×2, então a Eq. (26) fica

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

e a Eq. (27) torna-se

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0. \tag{29}$$

O exemplo a seguir ilustra como encontrar autovalores e autovetores.

Exemplo 4

Encontre os autovalores e autovetores da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Os autovalores λ e os autovetores $\mathbf{x}$ satisfazem a equação $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ou

$$\begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 4 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Os autovalores são as raízes da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 4 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0. \tag{32}$$

Logo, os autovalores são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$.

Para encontrar os autovetores, voltamos à Eq. (31) e substituímos λ em cada um dos autovalores encontrados. Para $\lambda = 2$, temos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Logo, cada linha dessa equação vetorial leva à condição $x_1 - x_2 = 0$, logo x_1 e x_2 são iguais, mas seus valores não estão determinados. Se $x_1 = c$, então $x_2 = c$ também e o autovetor $\mathbf{x}^{(1)}$ é

$$\mathbf{x}^{(1)} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \neq 0. \tag{34}$$

Em geral, não usaremos a constante arbitrária c ao encontrar autovetores; assim, em vez da Eq. (34), escrevemos

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{35}$$

e lembramos que qualquer múltiplo não-nulo desse vetor também é um autovetor. Dizemos que $\mathbf{x}^{(1)}$ é o autovetor correspondente ao autovalor $\lambda_1 = 2$.

Fazendo, agora, $\lambda = -1$ na Eq. (31), obtemos

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Mais uma vez obtemos uma única condição sobre x_1 e x_2, a saber, $4x_1 - x_2 = 0$. Logo, o autovetor correspondente ao autovalor $\lambda_2 = -1$ é

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \tag{37}$$

ou qualquer múltiplo não-nulo desse vetor.

[8] Por exemplo, esse problema é encontrado ao se procurar os eixos principais de tensão em um corpo elástico e ao se procurar os modos de vibração livre em um sistema conservativo com um número finito de graus de liberdade.

Como ilustrado no Exemplo 4, os autovetores são determinados a menos de uma constante multiplicativa não-nula; se essa constante é especificada de algum modo, então os autovetores são ditos **normalizados**. No Exemplo 4, escolhemos as constantes iguais a 1, mas poderíamos ter usado qualquer número diferente de zero. Algumas vezes é conveniente normalizar um autovetor de modo que $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$.

A Eq. (27) é uma equação polinomial de grau n em λ, de modo que existem n autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alguns dos quais podem ser repetidos. Se um determinado autovalor aparece m vezes como raiz da Eq. (27), ele é dito de **multiplicidade algébrica** m. Cada autovalor tem pelo menos um autovetor associado e um autovalor de multiplicidade algébrica m pode ter q autovetores linearmente independentes. O número q é chamado de **multiplicidade geométrica** do autovalor e é possível mostrar que

$$1 \leq q \leq m. \tag{38}$$

Além disso, exemplos demonstram que q pode ser qualquer inteiro nesse intervalo. Se cada autovalor de $\mathbf{A}$ é **simples** (tem mutiplicidade algébrica igual a um), cada autovalor também tem multiplicidade um. Então é possível mostrar que os n autovetores de $\mathbf{A}$, um para cada autovalor, são linearmente independentes. Por outro lado, se $\mathbf{A}$ tem um ou mais autovalores repetidos, então pode ter menos do que n autovetores linearmente independentes, já que, para um autovalor de multiplicidade m, podemos ter $q < m$. Como veremos na Seção 7.8, esse fato leva a complicações mais tarde na resolução de sistemas de equações diferenciais.

Exemplo 5

Encontre os autovalores e autovetores da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Os autovalores λ e os autovetores $\mathbf{x}$ satisfazem a equação $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ou

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Os autovalores são as raízes da equação

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0. \tag{41}$$

As raízes da Eq. (41) são $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -1$. Assim, 2 é um autovalor simples e -1 é um autovalor de multiplicidade algébrica 2, ou um autovalor duplo.

Para encontrar o autovetor $\mathbf{x}^{(1)}$ associado ao autovalor λ_1, substituímos $\lambda = 2$ na Eq. (40); isso nos leva ao sistema

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Podemos reduzi-lo ao sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{43}$$

através de operações elementares sobre as linhas. Resolvendo esse sistema, obtemos o autovetor

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Para $\lambda = -1$, a Eq. (40) se reduz imediatamente à única equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0. \tag{45}$$

Assim, valores para duas das quantidades x_1, x_2 e x_3 podem ser escolhidos arbitrariamente e o terceiro valor fica determinado pela Eq. (45). Por exemplo, se $x_1 = 1$ e $x_2 = 0$, então $x_3 = -1$ e

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{46}$$

é um autovetor. Qualquer múltiplo não-nulo de $\mathbf{x}^{(2)}$ também é um autovetor, mas um segundo autovetor independente pode ser encontrado para uma outra escolha de x_1 e x_2 — por exemplo, $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$. Novamente $x_3 = -1$ e

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{47}$$

é um autovetor linearmente independente de $\mathbf{x}^{(2)}$. Portanto, neste exemplo, existem dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor duplo.

Uma classe importante de matrizes é formada pelas matrizes **auto-adjuntas** ou **hermitianas**, isto é, matrizes tais que $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$, ou seja, tais que $\bar{a}_{ji} = a_{ij}$. A classe das matrizes auto-adjuntas inclui, como subclasse, as matrizes simétricas reais — isto é, matrizes com todos os elementos reais tais que $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Os autovalores e autovetores de matrizes auto-adjuntas têm as seguintes propriedades úteis:

1. Todos os autovalores são reais.
2. Sempre existe um conjunto completo de n autovetores linearmente independentes, independentemente das multiplicidades algébricas dos autovalores.
3. Se $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são autovetores correspondentes a autovalores distintos, então $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = 0$. Logo, se todos os autovalores são distintos, os autovetores associados formam um conjunto ortogonal de vetores.
4. É possível escolher m autovetores ortogonais entre si associados a um autovalor de multiplicidade algébrica m. Portanto, é sempre possível escolher o conjunto completo dos n autovetores com autovetores ortogonais e linearmente independentes.

O Exemplo anterior envolve uma matriz simétrica real e ilustra as propriedades 1, 2 e 3, mas a escolha que fizemos para $\mathbf{x}^{(2)}$ e $\mathbf{x}^{(3)}$ não ilustra a propriedade 4. No entanto, sempre é possível escolher $\mathbf{x}^{(2)}$ e $\mathbf{x}^{(3)}$ de modo que $(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}) = 0$. Por exemplo, poderíamos ter escolhido

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

no Exemplo 5 como autovetores associados ao autovalor $\lambda = -1$. Esses autovetores são ortogonais entre si e são, também, ortogonais ao autovetor $\mathbf{x}^{(1)}$ associado ao autovalor $\lambda = 2$. As demonstrações das propriedades 1 e 3 citadas anteriormente estão esquematizadas nos Problemas 32 e 33.

Problemas

Nos problemas de 1 a 5, resolva o conjunto de equações dado ou mostre que não tem solução.

1. $\begin{aligned} x_1 \quad\quad - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x_1 \quad\quad - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

Nos problemas de 6 a 10, determine se os elementos do conjunto de vetores dados são linearmente independentes. Se forem linearmente dependentes, encontre uma relação linear entre os vetores. Os vetores estão escritos na forma de linhas para economizar espaço, mas podem ser considerados como sendo vetores colunas, isto é, pode-se usar as transpostas dos vetores dados, em vez dos próprios vetores.

6. $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (1, 0, 1)$
7. $\mathbf{x}^{(1)} = (2, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-1, 2, 0)$
8. $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, 2, 3)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (-1, 0, 3, 1)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-2, -1, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(4)} = (-3, 0, -1, 3)$
9. $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, -1, 0)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (2, 3, 1, -1)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-1, 0, 2, 2)$, $\mathbf{x}^{(4)} = (3, -1, 1, 3)$
10. $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, -2)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (3, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (2, -1, 1)$, $\mathbf{x}^{(4)} = (4, 3, -2)$
11. Suponha que cada um dos vetores $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}$ tem n componentes, onde $n < m$. Mostre que $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}$ são linearmente dependentes.

Nos Problemas 12 e 13, determine se os elementos do conjunto de vetores dado são linearmente independentes para $-\infty < t < \infty$. Se forem linearmente dependentes, encontre uma relação linear entre os vetores. Como nos problemas de 6 a 10, os vetores estão escritos como linhas para economizar espaço.

12. $\mathbf{x}^{(1)}(t) = (e^{-t}, 2e^{-t})$, $\quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = (e^{-t}, e^{-t})$, $\mathbf{x}^{(3)}(t) = (3e^{-t}, 0)$
13. $\mathbf{x}^{(1)}(t) = (2\,\mathrm{sen}\,t, \mathrm{sen}\,t)$, $\quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = (\mathrm{sen}\,t, 2\,\mathrm{sen}\,t)$
14. Sejam

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Mostre que $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ e $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ são linearmente dependentes em cada ponto do intervalo $0 \le t \le 1$. Apesar disso, mostre que $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ e $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ são linearmente independentes em $0 \le t \le 1$.

Nos problemas de 15 a 24, encontre todos os autovalores e autovetores da matriz dada.

15. $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} -3 & 3/4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 11/9 & -2/9 & 8/9 \\ -2/9 & 2/9 & 10/9 \\ 8/9 & 10/9 & 5/9 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Os problemas de 25 a 29 tratam da resolução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ quando $\det \mathbf{A} = 0$.

25. Suponha que, para uma matriz dada $\mathbf{A}$, existe um vetor não-nulo $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Mostre que existe, também, um vetor não-nulo $\mathbf{y}$ tal que $\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$.
26. Mostre que, quaisquer que sejam os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y})$.
27. Suponha que $\det \mathbf{A} = 0$ e que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tem solução. Mostre que $(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = 0$, onde $\mathbf{y}$ é qualquer solução de $\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Verifique que essa afirmação é válida para o conjunto de equações no Exemplo 2. *Sugestão:* Use o resultado do Problema 26.
28. Suponha que $\det \mathbf{A} = 0$ e que $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)}$ é uma solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Mostre que, se $\boldsymbol{\xi}$ é uma solução de $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ e α é qualquer constante, então $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha\boldsymbol{\xi}$ também é solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
29. Suponha que $\det \mathbf{A} = 0$ e que $\mathbf{y}$ é uma solução de $\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Mostre que, se $(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = 0$ para qualquer desses $\mathbf{y}$, então $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tem solução. Note que isso é a recíproca do Problema 27; a forma da solução é dada pelo Problema 28.
30. Prove que $\lambda = 0$ é um autovalor de $\mathbf{A}$ se, e somente se, $\mathbf{A}$ é singular.
31. Prove que, se $\mathbf{A}$ é auto-adjunta, então $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ay})$, onde $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são vetores arbitrários.
32. Vamos mostrar, neste problema, que os autovalores de uma matriz auto-adjunta são reais. Seja $\mathbf{x}$ um autovetor associado ao autovalor λ.
    (a) Mostre que $(\mathbf{Ax}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ax})$. *Sugestão*: Veja o Problema 31.
    (b) Mostre que $\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \bar{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. *Sugestão*: Lembre-se de que $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$.
    (c) Mostre que $\lambda = \bar{\lambda}$; isto é, o autovalor λ é real.
33. Mostre que, se λ_1 e λ_2 são autovalores de uma matriz $\mathbf{A}$ auto-adjunta e se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então os autovetores correspondentes $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são ortogonais. *Sugestão*: Use os resultados dos Problemas 31 e 32 para mostrar que $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = 0$.

7.4 Teoria Básica de Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem

A teoria geral para sistemas de n equações lineares de primeira ordem

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{aligned} \tag{1}$$

é bastante semelhante à teoria para uma única equação linear de ordem n. A discussão nesta seção, portanto, segue as mesmas linhas gerais que a feita nas Seções 3.2, 3.3 e 4.1. Para discutir o sistema (1) de maneira mais eficiente, usaremos notação matricial. Isto é, vamos considerar $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ como componentes de um vetor $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$; analogamente, $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ são componentes de um vetor $\mathbf{g}(t)$ e $p_{11}(t), \ldots, p_{nn}(t)$ são elementos de uma matriz $n \times n$ $\mathbf{P}(t)$. A Eq. (1) fica, então, na forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \qquad (2)$$

A utilização de vetores e matrizes não só economiza muito espaço e facilita os cálculos como também enfatiza a semelhança entre sistemas de equações e uma única equação (escalar).

Dizemos que um vetor $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ é uma solução da Eq. (2) se suas componentes satisfazem o sistema de Eqs. (1). Nesta seção, vamos supor que $\mathbf{P}$ e $\mathbf{g}$ são contínuas em algum intervalo $\alpha < t < \beta$, isto é, cada uma das funções escalares $p_{11}, \ldots, p_{nn}, g_1, \ldots, g_n$ é contínua nesse intervalo. De acordo com o Teorema 7.12, isto é suficiente para garantir a existência de soluções da Eq. (2) no intervalo $\alpha < t < \beta$.

É conveniente considerar primeiro a equação homogênea

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \qquad (3)$$

obtida da Eq. (2) fazendo-se $\mathbf{g}(t) = \mathbf{0}$. Uma vez resolvida a equação homogênea, existem diversos métodos para se resolver a equação não-homogênea (2); isso será feito na Seção 7.9. Usaremos a notação

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}, \ldots \qquad (4)$$

para denotar soluções específicas do sistema (3). Note que $x_{ij}(t) = x_i^{(j)}(t)$ denota a i-ésima componente da j-ésima solução $\mathbf{x}^{(j)}(t)$. Os fatos principais sobre a estrutura das soluções do sistema (3) estão enunciados nos teoremas de 7.4.1 a 7.4.4. Eles são bastante semelhantes aos teoremas correspondentes nas Seções 3.2, 3.3 e 4.1; algumas das demonstrações ficam como exercício para você.

Teorema 7.4.1

Se as funções vetoriais $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são soluções do sistema (3), então a combinação linear $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ também é solução quaisquer que sejam as constantes c_1 e c_2.

Esse é o princípio da superposição; para prová-lo, basta derivar $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ e usar o fato de que $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ satisfazem a Eq. (3). Aplicando repetidamente o Teorema 7.4.1, chegamos à conclusão de que, se $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}$ são soluções da Eq. (3), então

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_k\mathbf{x}^{(k)}(t) \qquad (5)$$

também é solução quaisquer que sejam as constantes $c_1, \ldots, c_k$. Como exemplo, pode-se verificar que

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \qquad (6)$$

satisfaz a equação

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \qquad (7)$$

De acordo com o Teorema 7.4.1,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \\ &= c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) \end{aligned} \qquad (8)$$

também satisfaz a Eq. (7).

Como indicamos anteriormente, aplicando repetidamente o Teorema 7.4.1, segue que toda combinação linear finita de soluções da Eq. (3) também é solução. A questão, agora, é saber se todas as soluções da Eq. (3) podem ser encontradas dessa maneira. Por analogia com casos anteriores, é razoável esperar que, para um sistema da forma (3) de ordem n, seja suficiente formar combinações lineares de n soluções escolhidas apropriadamente. Sejam, então, $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ n soluções do sistema (3) de ordem n e considere a matriz $\mathbf{X}(t)$ cujas colunas são os vetores $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Lembre-se, da Seção 7.3, de que as colunas de $\mathbf{X}(t)$ são linearmente independentes para um valor dado de t se, e somente se, $\det \mathbf{X} \neq 0$ para esse valor de t. Esse determinante é chamado de wronskiano das n soluções $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ e denotado por $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]$, isto é,

$$W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}](t) = \det \mathbf{X}(t). \qquad (10)$$

Então, as soluções $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ são linearmente independentes em um ponto se, e somente se, $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]$ não é zero nesse ponto.

Teorema 7.4.2

Se as funções vetoriais $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ são soluções linearmente independentes do sistema (3) em cada ponto do intervalo $\alpha < t < \beta$, então cada solução $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ do sistema (3) pode ser expressa como uma combinação linear de $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$,

$$\boldsymbol{\phi}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t), \qquad (11)$$

de exatamente um modo.

Antes de provar o Teorema 7.4.2, note que, de acordo com o Teorema 7.4.1, todas as expressões da forma (11) são soluções do sistema (3), enquanto, pelo Teorema 7.4.2, todas as soluções da Eq. (3) podem ser escritas na forma (11). Se pensarmos nas constantes $c_1, \ldots, c_n$ como arbitrárias, então a Eq. (11) inclui todas as soluções do sistema (3) e é costume chamá-la de **solução geral**. Qualquer conjunto de soluções $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ da Eq. (3) que seja linearmente independente em cada ponto do intervalo $\alpha < t < \beta$ é dito um **conjunto fundamental de soluções** para esse intervalo.

Para provar o Teorema 7.4.2, vamos mostrar que, dada qualquer solução $\boldsymbol{\phi}$ da Eq. (3), $\boldsymbol{\phi}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)} + \ldots + c_n\mathbf{x}^{(n)}$ para valores apropriados de $c_1, \ldots, c_n$. Seja $t = t_0$ algum ponto do intervalo $\alpha < t < \beta$ e seja $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\phi}(t_0)$. Queremos determinar se existe alguma solução da forma $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)} + \ldots + c_n\mathbf{x}^{(n)}$ que também satisfaça a condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\xi}$. Em outras palavras, queremos saber se existem valores $c_1, \ldots, c_n$ para os quais

$$c_1\mathbf{x}^{(1)}(t_0) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t_0) = \boldsymbol{\xi}, \qquad (12)$$

ou, em forma escalar,

$$\begin{aligned} c_1x_{11}(t_0) + \cdots + c_nx_{1n}(t_0) &= \xi_1, \\ &\vdots \\ c_1x_{n1}(t_0) + \cdots + c_nx_{nn}(t_0) &= \xi_n. \end{aligned} \qquad (13)$$

A condição necessária e suficiente para que as Eqs. (13) possuam uma única solução $c_1, \ldots, c_n$ é exatamente que o determinante da matriz dos coeficientes, que é o wronskiano $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]$ no ponto t_0, seja diferente de zero. A hipótese de que $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ são linearmente independentes em todo o intervalo $\alpha < t < \beta$ garante que $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]$ não se anula em $t = t_0$ e, portanto, existe uma (única) solução da Eq. (3) da forma $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)} + \ldots + c_n\mathbf{x}^{(n)}$ que também satisfaz a condição inicial (12). Pela unicidade no Teorema 7.1.2, essa solução é idêntica a $\boldsymbol{\phi}(t)$, logo $\boldsymbol{\phi}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)} + \ldots + c_n\mathbf{x}^{(n)}$, como queríamos provar.

Teorema 7.4.3

Se $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ são soluções da Eq. (3) no intervalo $\alpha < t < \beta$, então $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]$ ou é identicamente nulo ou nunca se anula nesse intervalo.

A importância do Teorema 7.4.3 reside no fato de este nos livrar da necessidade de examinar $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}]$ em todos os pontos do intervalo de interesse e nos permitir determinar se $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ formam um conjunto fundamental de soluções simplesmente calculando seu wronskiano em qualquer ponto conveniente do intervalo.

A demonstração do Teorema 7.4.3 é feita estabelecendo-se, primeiro, que o wronskiano de $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ satisfaz a equação diferencial (veja o Problema 2)

$$\frac{dW}{dt} = (p_{11} + p_{22} + \cdots + p_{nn})W. \qquad (14)$$

Logo, W é uma função exponencial, e a conclusão do teorema segue imediatamente. A expressão para W obtida resolvendo-se a Eq. (14) é conhecida como a fórmula de Abel; observe a semelhança com a Eq. (8) da Seção 3.3.

De maneira alternativa, o Teorema 7.4.3 também pode ser demonstrado provando-se que, se n soluções $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ da Eq. (3) são linearmente dependentes em um ponto $t = t_0$, então elas são linearmente dependentes em todos os pontos em $\alpha < t < \beta$ (veja o Problema 8). Em conseqüência, se $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ são linearmente independentes em um ponto, têm que ser linearmente dependentes em todos os pontos do intervalo.

O próximo teorema diz que o sistema (3) tem pelo menos um conjunto fundamental de soluções.

Teorema 7.4.4

Sejam

$$\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{e}^{(n)} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix};$$

além disso, suponha que $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ são soluções do sistema (3) que satisfazem as condições iniciais

$$\mathbf{x}^{(1)}(t_0) = \mathbf{e}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t_0) = \mathbf{e}^{(n)}; \qquad (15)$$

respectivamente, onde t_0 é um ponto qualquer no intervalo $\alpha < t < \beta$. Então, $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ formam um conjunto fundamental de soluções para o sistema (3).

Para provar esse teorema, note que a existência e a unicidade das soluções $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ mencionadas no Teorema 7.4.4 é garantida pelo Teorema 7.1.2. Não é difícil ver que o wronskiano dessas soluções é igual a 1 quando $t = t_0$; portanto, $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ é um conjunto fundamental de soluções.

Uma vez encontrado um conjunto fundamental de soluções, pode-se gerar outros conjuntos formando-se combinações lineares (independentes) do primeiro conjunto. Para fins teóricos, o conjunto dado pelo Teorema 7.4.4 é, em geral, o mais simples possível.

Resumindo, qualquer conjunto de n soluções linearmente independentes do sistema (3) constitui um conjunto fundamental de soluções. Sob as condições dadas nesta seção, tais conjuntos fundamentais sempre existem e toda solução do sistema (3) pode ser representada como uma combinação linear de qualquer conjunto fundamental de soluções.

Problemas

1. Prove a afirmação feita logo após o Teorema 7.4.1 para um valor arbitrário do inteiro k.
2. Neste problema, vamos esquematizar a demonstração do Teorema 7.4.3 no caso $n = 2$. Sejam $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ soluções da Eq. (3) para $\alpha < t < \beta$ e seja W o wronskiano de $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$.
   (a) Mostre que
   $$\frac{dW}{dt} = \begin{vmatrix} \dfrac{dx_1^{(1)}}{dt} & \dfrac{dx_1^{(2)}}{dt} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ \dfrac{dx_2^{(1)}}{dt} & \dfrac{dx_2^{(2)}}{dt} \end{vmatrix}.$$
   (b) Usando a Eq. (3), mostre que
   $$\frac{dW}{dt} = (p_{11} + p_{22})W.$$
   (c) Encontre $W(t)$ resolvendo a equação diferencial obtida no item (b). Use essa expressão para obter a conclusão enunciada no Teorema 7.4.3.
   (d) Prove o Teorema 7.4.3 para um valor arbitrário de n generalizando o procedimento usado nos itens (*a*), (*b*) e (*c*).
3. Mostre que o wronskiano de dois conjuntos fundamentais de soluções do sistema (3) pode diferir, no máximo, por uma constante multiplicativa.
   Sugestão: Use a Eq. (14).
4. Se $x_1 = y$ e $x_2 = y'$, então a equação de segunda ordem
   $$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad \text{(i)}$$
   corresponde ao sistema
   $$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -q(t)x_1 - p(t)x_2. \end{aligned} \qquad \text{(ii)}$$
   Mostre que, se $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ formam um conjunto fundamental de soluções para as Eqs. (ii) e se $y^{(1)}$ e $y^{(2)}$ formam um conjunto fundamental de soluções para a Eq. (i), então $W[y^{(1)}, y^{(2)}] = cW[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}]$, onde c é uma constante não-nula.

Sugestão: $y^{(1)}(t)$ e $y^{(2)}(t)$ têm que ser combinações lineares de $x_{11}(t)$ e $x_{12}(t)$.

5. Mostre que a solução geral de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ é a soma de qualquer solução particular $\mathbf{x}^{(p)}$ dessa equação com a solução geral $\mathbf{x}^{(c)}$ da equação homogênea correspondente.
6. Considere os vetores $x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ e $x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$.
(a) Calcule o wronskiano de $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$.
(b) Em que intervalos $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são linearmente independentes?
(c) Que conclusão se pode tirar sobre os coeficientes no sistema homogêneo de equações diferenciais satisfeito por $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$?
(d) Encontre esse sistema de equações e verifique as conclusões do item (c).
7. Considere os vetores $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$ e $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ e responda às mesmas perguntas do Problema 6.

Os dois problemas a seguir indicam uma outra demonstração para o Teorema 7.4.2.

8. Sejam $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}$ soluções de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ no intervalo $\alpha < t < \beta$. Suponha que $\mathbf{P}$ é contínua e seja t_0 um ponto arbitrário do intervalo dado. Mostre que $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}$ são linearmente dependentes para $\alpha < t < \beta$ se (e somente se) $\mathbf{x}^{(1)}(t_0), \ldots, \mathbf{x}^{(m)}(t_0)$ são linearmente dependentes. Em outras palavras, $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}$ são linearmente dependentes no intervalo (α, β) se forem linearmente dependentes em qualquer ponto do intervalo.
Sugestão: Existem constantes $c_1, \ldots, c_m$ tais que $c_1\mathbf{x}^{(1)}(t_0) + \ldots + c_m\mathbf{x}^{(m)}(t_0) = \mathbf{0}$. Seja $\mathbf{z}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \ldots + c_m\mathbf{x}^{(m)}(t)$ e use o teorema de unicidade para mostrar que $\mathbf{z}(t) = \mathbf{0}$ para todo t em $\alpha < t < \beta$.
9. Sejam $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ soluções linearmente independentes de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$, onde $\mathbf{P}$ é contínua em $\alpha < t < \beta$.
(a) Mostre que qualquer solução $\mathbf{x} = \mathbf{z}(t)$ pode ser escrita na forma
$$\mathbf{z}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$$
para constantes apropriadas $c_1, \ldots, c_n$.
Sugestão: Use o resultado do Problema 11 da Seção 7.3 e o Problema 8 desta seção.
(b) Mostre que a expressão para a solução $\mathbf{z}(t)$ no item (a) é única, isto é, se $\mathbf{z}(t) = k_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \ldots + k_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$, então $k_1 = c_1, \ldots, k_n = c_n$.
Sugestão: Mostre que $(k_1 - c_1)\mathbf{x}^{(1)}(t) + \ldots + (k_n - c_n)\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{0}$ para todo t em $\alpha < t < \beta$ e use a independência linear de $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$.

7.5 Sistemas Lineares Homogêneos com Coeficientes Constantes

Vamos concentrar a maior parte da nossa atenção em sistemas de equações lineares homogêneas com coeficientes constantes— isto é, sistemas da forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{1}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz constante $n \times n$. A menos que se diga o contrário, suporemos que todos os elementos de $\mathbf{A}$ são números reais (e não complexos).

Se $n = 1$, o sistema se reduz a uma única equação de primeira ordem

$$\frac{dx}{dt} = ax, \tag{2}$$

cuja solução é $x = ce^{at}$. Observamos, na Seção 2.5, que $x = 0$ é a única solução de equilíbrio se $a \neq 0$. Outras soluções tendem a $x = 0$ se $a < 0$ e, nesse caso, dizemos que $x = 0$ é uma solução de equilíbrio assintoticamente estável. Por outro lado, se $a > 0$, então $x = 0$ é instável, já que as outras soluções se distanciam dessa. Para sistemas de ordem maior a situação é análoga, de certa forma, mas mais complicada. Soluções de equilíbrio são encontradas resolvendo-se $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Vamos supor que det $\mathbf{A} \neq 0$, de modo que a única solução de equilíbrio é $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Uma pergunta importante é se outras soluções se aproximam ou se afastam dessa quando t aumenta; em outras palavras, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é assintoticamente estável ou instável? Existem outras possibilidades?

O caso $n = 2$ é particularmente importante e permite visualização no plano x_1x_2, o **plano de fase**. Calculando $\mathbf{Ax}$ em um grande número de pontos e fazendo o gráfico dos vetores resultantes, obtemos um campo de direções de vetores tangentes a soluções do sistema de equações diferenciais. Pode-se obter, em geral, uma compreensão qualitativa do comportamento de soluções através de um campo de direções. Incluindo-se no gráfico algumas curvas soluções, ou trajetórias, pode-se obter informação mais precisa. Um gráfico que ilustra uma amostra representativa de trajetórias para um sistema dado é chamado **retrato de fase**. Veremos adiante, nesta seção, exemplos de campos de direções e retratos de fase.

Para construir a solução geral do sistema (1), procedemos por analogia com o tratamento de equações lineares de segunda ordem da Seção 3.1. Procuramos, então, soluções da Eq. (1) da forma

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}, \tag{3}$$

onde o expoente r e o vetor constante $\boldsymbol{\xi}$ devem ser determinados. Substituindo $\mathbf{x}$ dado pela Eq. (3) no sistema (1), obtemos

$$r\boldsymbol{\xi}e^{rt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}e^{rt}.$$

Cancelando o fator escalar não-nulo e^{rt}, obtemos $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = r\boldsymbol{\xi}$, ou

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}, \tag{4}$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade $n \times n$. Assim, para resolver o sistema de equações diferenciais (1), precisamos resolver o sistema de equações algébricas (4). Esse último problema é precisamente o que determina os autovalores e autovetores da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$. Portanto, o vetor $\mathbf{x}$ dado pela Eq. (3) é uma solução da Eq. (1), desde que r seja um autovalor e $\boldsymbol{\xi}$ seja um autovetor associado da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$.

Os dois exemplos a seguir ilustram o procedimento para se encontrar a solução no caso de matrizes de coeficientes 2×2. Vamos mostrar, também, como construir os retratos de fase correspondentes. Mais adiante, nesta seção, vamos discutir detalhadamente o sistema geral $n \times n$.

Exemplo 1

Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{5}$$

Faça um gráfico do campo de direções e determine o comportamento qualitativo das soluções. Depois encontre a solução geral e desenhe diversas trajetórias.

A Fig. 7.5.1 mostra um campo de direções para esse sistema. Dessa figura, é fácil ver que uma solução típica se afasta da vizinhança da origem e acaba tendo retas tangentes com coeficientes angulares de aproximadamente 2 no primeiro ou no terceiro quadrantes.

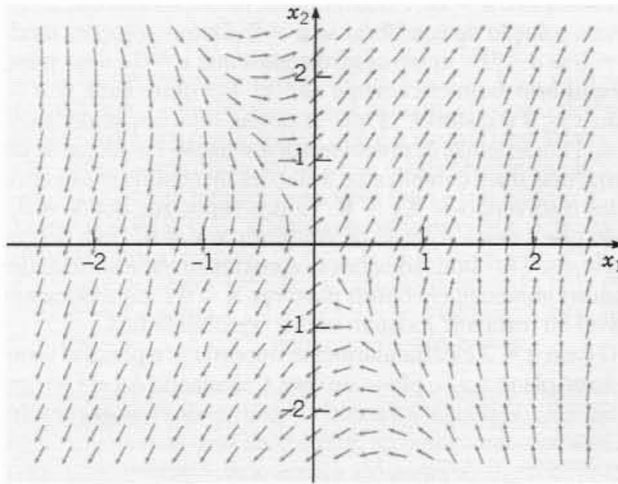


FIG. 7.5.1 Campo de direções para o sistema (5).

Para encontrar explicitamente soluções, vamos supor que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$ e substituir na Eq. (5). Somos levados ao sistema de equações algébricas

$$\begin{pmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

A Eq. (6) tem uma solução não-trivial se, e somente se, o determinante da matriz de coeficientes é zero. Logo, os valores permitidos para r são encontrados pela equação

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} = (1-r)^2 - 4$$
$$= r^2 - 2r - 3 = 0. \tag{7}$$

A Eq. (7) tem raízes $r_1 = 3$ e $r_2 = -1$; esses são os autovalores da matriz de coeficientes na Eq. (5). Se $r = 3$, o sistema (6) se reduz a uma única equação

$$-2\xi_1 + \xi_2 = 0. \tag{8}$$

Logo, $\xi_2 = 2\xi_1$ e o autovetor correspondente a r_1 pode ser escolhido como

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Analogamente, correspondendo a $r_2 = -1$, encontramos que $\xi_2 = -2\xi_1$, de modo que o autovetor é

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

As soluções correspondentes da equação diferencial são

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}. \tag{11}$$

O wronskiano dessas soluções é

$$W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}](t) = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{vmatrix} = -4e^{2t}, \tag{12}$$

que nunca se anula. Portanto, as soluções $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ formam um conjunto fundamental de soluções e a solução geral do sistema (5) é

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t)$$
$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}, \tag{13}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Para visualizar a solução (13), ajuda considerarmos seu gráfico no plano x_1x_2 para diversos valores das constantes c_1 e c_2. Começamos com $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t)$ ou, em forma escalar,

$$x_1 = c_1e^{3t}, \qquad x_2 = 2c_1e^{3t}.$$

Eliminando t nessas duas equações, vemos que essa solução pertence à reta $x_2 = 2x_1$; veja a Fig. 7.5.2*a*. Essa é a reta que contém a origem e tem a direção do autovetor $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$. Se olharmos a solução como a trajetória de uma partícula em movimento, então a partícula está no primeiro quadrante quando $c_1 > 0$ e no terceiro quando $c_1 < 0$. Em qualquer desses casos, a partícula se afasta da origem quando t aumenta. Considere agora $\mathbf{x} = c_2\mathbf{x}^{(2)}$, ou

$$x_1 = c_2e^{-t}, \qquad x_2 = -2c_2e^{-t}.$$

Essa solução pertence à reta $x_2 = -2x_1$, cuja direção é determinada pelo autovetor $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$. A solução está no quarto quadrante quando $c_2 > 0$ e no segundo quando $c_2 < 0$, como ilustrado na Fig. 7.5.2*a*. Em ambos os casos, a partícula se aproxima da origem quando t aumenta. A solução (13) é uma combinação de $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ e $\mathbf{x}^{(2)}(t)$. Para valores grandes de t, a parcela $c_1\mathbf{x}^{(1)}(t)$ é dominante e a parcela $c_2\mathbf{x}^{(2)}(t)$ torna-se desprezível. Logo, todas as soluções para as quais $c_1 \neq 0$ são assintóticas à reta $x_2 = 2x_1$ quando $t \to \infty$. Analogamente, todas as soluções para as quais $c_2 \neq 0$ são assintóticas à reta $x_2 = -2x_1$ quando $t \to -\infty$. A Fig. 7.5.2*a* mostra o gráfico de diversas soluções. O padrão de trajetórias nessa figura é típico de sistemas de segunda ordem $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ para os quais os autovalores são reais e têm sinais opostos. A origem é chamada de **ponto de sela** nesse caso. Pontos de sela são sempre instáveis porque quase todas as trajetórias se afastam dele quando t aumenta.

No parágrafo precedente descrevemos como desenhar manualmente um esboço qualitativamente correto das trajetórias de um sistema como na Eq. (5), uma vez determinados os autovalores e autovetores. No entanto, para produzir um desenho detalhado e preciso como na Fig. 7.5.2*a* e em outras figuras que aparecem mais adiante neste capítulo, um computador é extremamente útil, se não indispensável.

Como uma alternativa à Fig. 7.5.2*a*, pode-se, também, fazer o gráfico de x_1, ou de x_2, como função de t; alguns gráficos típicos de x_1 como função de t aparecem na Fig. 7.5.2*b* e os de x_2 em função de t são semelhantes. Para determinadas condições iniciais, $c_1 = 0$ na Eq. (13), de modo que $x_1 = c_2e^{-t}$ e $x_1 \to 0$ quando $t \to \infty$. A Fig. 7.5.2*b* mostra um desses gráficos, correspondente à trajetória que se aproxima da origem na Fig. 7.5.2*a*. Para a maior parte das condições iniciais, no entanto, $c_1 \neq 0$ e $x_1 = c_1e^{3t} + c_2e^{-t}$. A presença da parcela contendo uma exponencial positiva faz com que x_1 cresça exponencialmente em módulo quando t aumenta. A Fig. 7.5.2*b* mostra diversos gráficos desse tipo, correspondendo a trajetórias que se afastam da origem na Fig. 7.5.2*a*. É importante compreender a relação entre as partes (*a*) e (*b*) da Fig. 7.5.2 e de outras figuras semelhantes que aparecem mais adiante, já que pode-se querer visualizar soluções no plano x_1x_2 ou como funções da variável independente t.

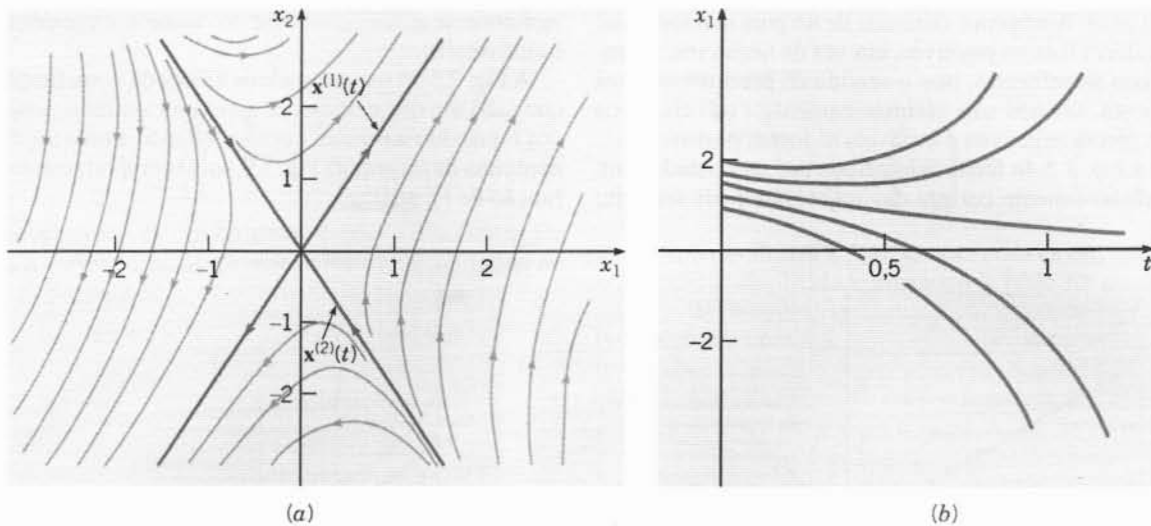


FIG. 7.5.2 (*a*) Trajetórias do sistema (5); a origem é um ponto de sela. (*b*) Gráficos de x_1 em função de t para o sistema (5).

Exemplo 2

Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \tag{14}$$

Desenhe um campo de direções para esse sistema; depois encontre a solução geral e faça o gráfico de diversas trajetórias no plano de fase.

O campo de direções para o sistema (14) na Fig. 7.5.3 mostra claramente que todas as soluções se aproximam da origem. Para encontrar soluções, supomos que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$; obtemos, então, o sistema algébrico

$$\begin{pmatrix} -3-r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Os autovalores satisfazem

$$\begin{aligned}(-3-r)(-2-r)-2 &= r^2+5r+4 \\ &= (r+1)(r+4) = 0,\end{aligned} \tag{16}$$

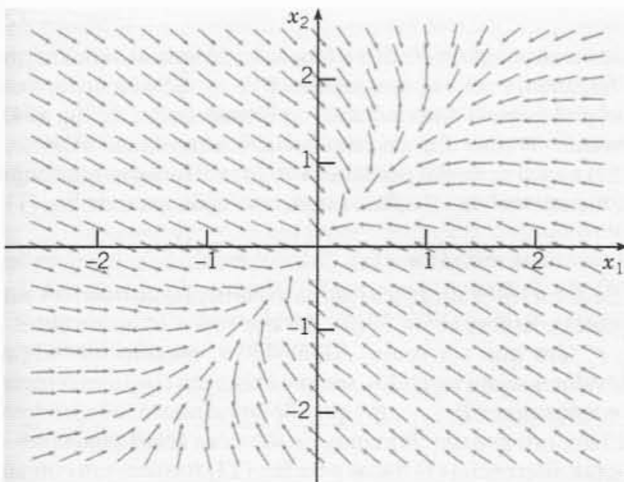


FIG. 7.5.3 Campo de direções para o sistema (14).

de modo que $r_1 = -1$ e $r_2 = -4$. Para $r = -1$, a Eq. (15) fica

$$\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Logo, $\xi_2 = \sqrt{2}\xi_1$ e o autovetor associado ao autovalor $r_1 = -1$ pode ser escolhido como

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Analogamente, correspondendo ao autovalor $r_2 = -4$, temos $\xi_1 = -\sqrt{2}\xi_2$, de modo que o autovetor é

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Portanto, um conjunto fundamental de soluções para o sistema (14) é

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}, \tag{20}$$

e a solução geral é

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} \tag{21}$$

A Fig. 7.5.4*a* mostra gráficos da solução (21) para diversos valores de c_1 e c_2. A solução $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ se aproxima da origem ao longo da reta $x_2 = \sqrt{2}x_1$ e a solução $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ se aproxima da origem ao longo da reta $x_1 = -\sqrt{2}x_2$. As direções dessas retas são determinadas pelos autovetores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, respectivamente. Temos, em geral, uma combinação dessas duas soluções fundamentais. Quando $t \to \infty$, $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ é desprezível em comparação com $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ de modo que, a menos que $c_1 = 0$, a solução (21) se aproxima da origem tangente à reta $x_2 = \sqrt{2}x_1$. O padrão de trajetórias ilustrado na Fig. 7.5.4*a* é típico de todos os sistemas de segunda ordem $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ para os quais os autovalores são reais, distintos

e de mesmo sinal. A origem é chamada de **nó** para tais sistemas. Se os autovalores fossem positivos, em vez de negativos, as trajetórias seriam semelhantes, mas o sentido de percurso seria na direção oposta. Os nós são assintoticamente estáveis se os autovalores forem negativos e instáveis se forem positivos.

Embora a Fig. 7.5.4*a* tenha sido gerada por computador, um esboço qualitativamente correto das trajetórias pode ser feito rapidamente à mão, com base no conhecimento dos autovalores e autovetores.

A Fig. 7.5.4*b* mostra gráficos típicos de x_1 em função de t. Note que cada um dos gráficos se aproxima assintoticamente do eixo dos t quando t aumenta, correspondendo a uma trajetória que se aproxima da origem na Fig. 7.5.4*a*. O comportamento de x_2 como função de t é análogo.

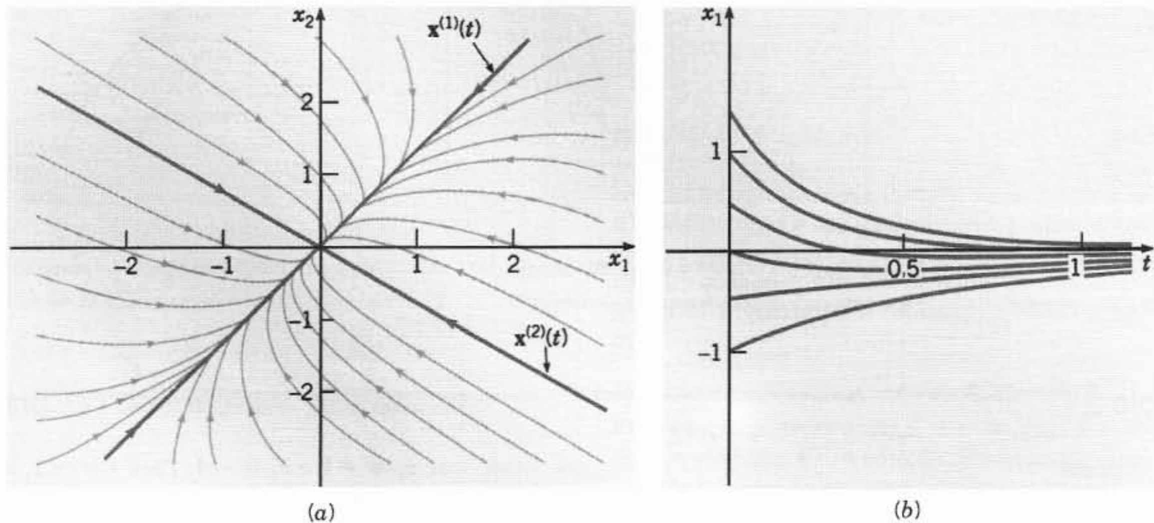


FIG. 7.5.4 (*a*) Trajetórias do sistema (14); a origem é um nó. (*b*) Gráficos de x_1 em função de t para o sistema (14).

Os dois exemplos precedentes ilustram os dois casos principais para um sistema 2×2 com autovalores reais distintos: os autovalores têm sinais opostos (Exemplo 1) ou o mesmo sinal (Exemplo 2). Outra possibilidade é zero ser um autovalor, mas, nesse caso, $\det \mathbf{A} = 0$, o que contradiz a hipótese feita no início desta seção.

Voltando ao sistema geral (1), procedemos como nos dois exemplos. Para encontrar soluções da equação diferencial (1), precisamos encontrar os autovalores e autovetores de $\mathbf{A}$ a partir do sistema algébrico (4). Os autovalores $r_1, \ldots, r_n$ (que não precisam ser distintos) são raízes da equação polinomial de grau n

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0. \tag{22}$$

A natureza dos autovalores e dos autovetores associados determina a natureza da solução geral do sistema (1). Se supusermos que $\mathbf{A}$ é uma matriz real, existem três possibilidades para os autovalores de $\mathbf{A}$:

1. Todos os autovalores são reais e distintos entre si.
2. Alguns autovalores ocorrem em pares conjugados.
3. Alguns autovalores são repetidos.

Se os autovalores forem reais e distintos, como nos dois exemplos precedentes, então existe um autovetor real $\boldsymbol{\xi}^{(i)}$ associado a cada autovalor r_i e os n autovetores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ são linearmente independentes. As soluções correspondentes do sistema diferencial (1) são

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(n)}e^{r_n t}. \tag{23}$$

Para mostrar que essas soluções formam um conjunto fundamental, calculamos seu wronskiano:

$$W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}](t) = \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)}e^{r_1 t} & \cdots & \xi_1^{(n)}e^{r_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)}e^{r_1 t} & \cdots & \xi_n^{(n)}e^{r_n t} \end{vmatrix} = e^{(r_1+\cdots+r_n)t} \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \cdots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \cdots & \xi_n^{(n)} \end{vmatrix}. \tag{24}$$

Em primeiro lugar, note que a função exponencial nunca se anula. Segundo, como os autovetores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ são linearmente independentes, o determinante no último termo da Eq. (24) é diferente de zero. Em conseqüência, o wronskiano $W[\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}](t)$ nunca se anula; portanto, $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$ formam um conjunto fundamental de soluções. Logo, a solução geral da Eq. (1) é

$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t} + \cdots + c_n\boldsymbol{\xi}^{(n)}e^{r_n t}. \tag{25}$$

Se $\mathbf{A}$ for real e simétrica (um caso particular de matrizes autoadjuntas), lembre-se da Seção 7.3 que todos os autovalores $r_1, \ldots, r_n$ têm que ser reais. Além disso, mesmo que alguns autovalores sejam repetidos, sempre existe um conjunto completo de n autovetores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ que são linearmente independentes (de fato, ortogonais). Portanto, as soluções correspondentes do sistema diferencial (1) dadas pela Eq. (23) formam um conjunto fundamental de soluções e a solução geral é dada, novamente, pela Eq. (25). Os exemplos a seguir ilustram esse caso.

Exemplo 3

Encontre a solução geral de

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \tag{26}$$

Note que a matriz de coeficientes é real e simétrica. Os autovalores e autovetores dessa matriz foram encontrados no Exemplo 5 da Seção 7.3:

$$r_1 = 2, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \tag{27}$$

$$r_2 = -1, \quad r_3 = -1; \ \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\xi}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Portanto, um conjunto fundamental de soluções da Eq. (26) é

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t},$$

$$\mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \tag{29}$$

e a solução geral é

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}. \tag{30}$$

Esse exemplo ilustra o fato de que, embora um autovalor ($r = -1$) tenha multiplicidade algébrica 2, pode ser possível encontrar dois autovetores linearmente independentes $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(3)}$ e, então, construir a solução geral (30).

O comportamento da solução (30) depende, de modo crítico, das condições iniciais. Para valores grandes de t, a primeira parcela na Eq. (30) é a dominante; logo, se $c_1 \neq 0$, todas as componentes de $\mathbf{x}$ tornam-se ilimitadas quando $t \to \infty$. Por outro lado, para determinadas condições iniciais, c_1 pode ser zero. Nesse caso, a solução só tem termos exponenciais com potências negativas e $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ quando $t \to \infty$. Os pontos iniciais que fazem com que c_1 seja nulo são exatamente aqueles que pertencem ao plano determinado pelos autovetores $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(3)}$ correspondendo aos dois autovalores negativos. Assim, soluções que começam nesse plano se aproximam da origem quando $t \to \infty$, enquanto as outras soluções se tornam ilimitadas.

Se alguns dos autovalores ocorrem em pares complexos conjugados, então ainda existem n soluções linearmente independentes da forma (23), desde que todos os autovalores sejam distintos. É claro que soluções vindas de autovalores complexos tomam valores complexos. No entanto, como na Seção 3.4, é possível obter um conjunto completo de soluções reais. Isso será discutido na Seção 7.6.

Dificuldades mais sérias podem ocorrer se um autovalor for repetido. Nessa eventualidade, o número de autovetores linearmente independentes pode ser menor do que a multiplicidade algébrica do autovalor. Se for esse o caso, o número de soluções linearmente independentes da forma $\boldsymbol{\xi}e^{rt}$ será menor do que n. Para construir um conjunto fundamental de soluções é necessário, então, procurar soluções adicionais de outra forma. A situação é um tanto análoga ao caso de uma equação linear de ordem n com coeficientes constantes; uma raiz repetida da equação diferencial fornecia soluções da forma e^{rt}, te^{rt}, t^2e^{rt} etc. O caso de autovalores repetidos será tratado na Seção 7.8.

Finalmente, se $\mathbf{A}$ for complexa, então os autovalores complexos não precisam aparecer em pares conjugados e os autovetores são, em geral, complexos, mesmo que o autovalor associado seja real. As soluções da equação diferencial (1) ainda são da forma (23), desde que os autovalores sejam distintos, mas, em geral, todas as soluções são complexas.

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, encontre a solução geral do sistema de equações dado e descreva o comportamento das soluções quando $t \to \infty$. Além disso, desenhe um campo de direções e faça o gráfico de algumas trajetórias do sistema.

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$
2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$
3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$
4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$
5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$
6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Nos Problemas 7 e 8, encontre a solução geral do sistema de equações dado. Além disso, desenhe um campo de direções e algumas das trajetórias. Em cada um desses problemas, a matriz de coeficientes tem um autovalor nulo. Como resultado, o padrão das trajetórias é diferente dos padrões nos exemplos do texto.

7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}$
8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Nos problemas de 9 a 14, encontre a solução geral do sistema de equações dado.

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$
10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 2+i \\ -1 & -1-i \end{pmatrix} \mathbf{x}$
11. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$
12. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$
13. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$
14. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Nos problemas de 15 a 18, resolva o problema de valor inicial dado. Descreva o comportamento da solução quando $t \to \infty$.

15. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

16. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

17. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

18. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

19. O sistema $t\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ é análogo à equação de Euler de segunda ordem (Seção 5.5). Suponha que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}t^r$, onde $\boldsymbol{\xi}$ é um vetor constante, e mostre que $\boldsymbol{\xi}$ e r têm que satisfazer $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ para se obter soluções não-triviais da equação diferencial dada.

Referindo-se ao Problema 19, resolva o sistema de equações dado em cada um dos problemas de 20 a 23.

20. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

21. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

22. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

23. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Nos problemas de 24 a 27, são dados os autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{A}$. Considere o sistema correspondente $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$.

(a) Esboce um retrato de fase do sistema.
(b) Esboce a trajetória que passa pelo ponto inicial (2, 3).
(c) Para a trajetória no item (b), esboce os gráficos de x_1 e de x_2 em função de t no mesmo conjunto de eixos.

24. $r_1 = -1, \quad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = -2, \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

25. $r_1 = 1, \quad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = -2, \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

26. $r_1 = -1, \quad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = 2, \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

27. $r_1 = 1, \quad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = 2, \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

28. Considere um sistema 2×2 $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$. Se supusermos que $r_1 \neq r_2$, a solução geral é $\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{r_2 t}$, desde que $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ sejam linearmente independentes. Neste problema, vamos estabelecer a independência linear de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ supondo que são linearmente dependentes e, depois, mostrando que isso nos leva a uma contradição.
(a) Note que $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ satisfaz a equação matricial $(\mathbf{A} - r_1\mathbf{I})\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{0}$; analogamente, $(\mathbf{A} - r_2\mathbf{I})\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \mathbf{0}$.
(b) Mostre que $(\mathbf{A} - r_2\mathbf{I})\boldsymbol{\xi}^{(1)} = (r_1 - r_2)\boldsymbol{\xi}^{(1)}$.
(c) Suponha que $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ são linearmente dependentes. Então, $c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \mathbf{0}$ e pelo menos um entre c_1 e c_2 é diferente de zero; suponha que $c_1 \neq 0$. Mostre que $(\mathbf{A} - r_2\mathbf{I})(c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}) = \mathbf{0}$ e que $(\mathbf{A} - r_2\mathbf{I})(c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}) = c_1(r_1 - r_2)\boldsymbol{\xi}^{(1)}$. Logo, $c_1 = 0$, uma contradição. Portanto, $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ são linearmente independentes.
(d) Modifique o argumento no item (c) se supusermos que $c_2 \neq 0$.
(e) Faça um argumento semelhante para o caso em que a ordem n é igual a 3; note que o procedimento pode ser estendido para um valor arbitrário de n.

29. Considere a equação

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad \text{(i)}$$

onde a, b e c são constantes com $a \neq 0$. Foi mostrado, no Cap. 3, que a solução geral depende das raízes da equação característica

$$ar^2 + br + c = 0. \qquad \text{(ii)}$$

(a) Transforme a Eq. (i) em um sistema de equações de primeira ordem fazendo $x_1 = y$, $x_2 = y'$. Encontre o sistema de equações $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ satisfeito por $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.
(b) Encontre a equação que determina os autovalores da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ no item (a). Note que essa equação é, simplesmente, a equação característica (ii) da Eq. (i).

30. O sistema de dois tanques do Problema 21 na Seção 7.1 nos leva ao problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -17 \\ -21 \end{pmatrix},$$

onde x_1 e x_2 são os desvios dos níveis de sal Q_1 e Q_2 dos seus respectivos pontos de equilíbrio.
(a) Encontre a solução do problema de valor inicial dado.
(b) Faça os gráficos de x_1 e x_2 em função de t no mesmo conjunto de eixos.
(c) Encontre o instante T tal que $|x_1(t)| \leq 0{,}5$ e $|x_2(t)| \leq 0{,}5$ para todo $t \geq T$.

31. Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\alpha & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

(a) Resolva o sistema para $\alpha = 0{,}5$. Quais são os autovalores da matriz de coeficientes? Classifique o ponto de equilíbrio na origem em relação ao tipo.
(b) Resolva o sistema para $\alpha = 2$. Quais são os autovalores da matriz de coeficientes? Classifique o ponto de equilíbrio na origem em relação ao tipo.
(c) As soluções encontradas em (a) e (b) exibem dois tipos de comportamento bem diferentes. Encontre os autovalores da matriz de coeficientes em função de α e determine o valor de α entre 0,5 e 2 onde ocorre a transição de um tipo de comportamento para outro.

Circuitos Elétricos. Os Problemas 32 e 33 tratam do circuito elétrico descrito pelo sistema de equações diferenciais dado no Problema 20 da Seção 7.1:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{R_1}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{CR_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}. \qquad \text{(i)}$$

32. (a) Encontre a solução geral da Eq. (i) se $R_1 = 1$ ohm, $R_2 = 3/5$ ohm, $L = 2$ henrys e $C = 2/3$ farad.
(b) Mostre que $I(t) \to 0$ e $V(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, independente dos valores iniciais $I(0)$ e $V(0)$.

33. Considere o sistema precedente de equações diferenciais (i).
(a) Encontre condições que R_1, R_2, C e L têm que satisfazer para que os autovalores da matriz de coeficientes sejam reais e distintos.
(b) Se as condições encontradas no item (a) são satisfeitas, mostre que ambos os autovalores são negativos. Depois, mostre que $I(t) \to 0$ e $V(t) \to 0$ quando $t \to \infty$, independentemente das condições iniciais.
(c) Se as condições encontradas no item (a) não forem satisfeitas, então os autovalores são complexos ou repetidos. Você

acredita que $I(t) \to 0$ e $V(t) \to 0$ quando $t \to \infty$ também nesse caso?

Sugestão: Uma abordagem possível para o item (c) é transformar o sistema (i) em uma única equação de segunda ordem. Vamos, também, discutir autovalores complexos e repetidos nas Seções 7.6 e 7.8.

7.6 Autovalores Complexos

Nesta seção, vamos considerar, novamente, um sistema de n equações lineares homogêneas com coeficientes constantes

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{1}$$

onde a matriz de coeficientes é real. Se procurarmos soluções da forma $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$, então, como na Seção 7.5, segue que r tem que ser um autovalor e $\boldsymbol{\xi}$ um autovetor associado da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$. Lembre-se que os autovalores $r_1, \ldots, r_n$ de $\mathbf{A}$ são as raízes da equação

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0, \tag{2}$$

e que os autovetores associados satisfazem

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Se $\mathbf{A}$ é real, então os coeficientes na equação polinomial (2) para r são reais e os autovalores complexos têm que aparecer em pares conjugados. Por exemplo, se $r_1 = \lambda + i\mu$, onde λ e μ são reais, é um autovalor de $\mathbf{A}$, então $r_2 = \lambda - i\mu$ também o é. Além disso, os autovetores associados $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ também são complexos conjugados. Para ver isso, suponha que r_1 e $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ satisfazem

$$(\mathbf{A} - r_1\mathbf{I})\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{0}. \tag{4}$$

Calculando a equação complexa conjugada dessa e observando que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{I}$ são reais, obtemos

$$(\mathbf{A} - \bar{r}_1\mathbf{I})\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} = \mathbf{0}, \tag{5}$$

onde $\bar{r}_1$ e $\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$ são os complexos conjugados de r_1 e de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$, respectivamente. Em outras palavras, $r_2 = \bar{r}_1$ é um autovalor e $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$ é um autovetor associado. As soluções correspondentes

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}e^{\bar{r}_1 t} \tag{6}$$

da equação diferencial (1) são, então, complexas conjugadas uma da outra. Portanto, como na Seção 3.4, podemos encontrar duas soluções reais da Eq. (1) correspondentes aos autovalores r_1 e r_2, a saber, as partes reais e imaginárias de $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ e de $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ dadas pela Eq. (6).

Vamos escrever $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, onde $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são reais; então,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(1)}(t) &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{(\lambda+i\mu)t}\\ &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{\lambda t}(\cos\mu t + i\,\text{sen}\,\mu t).\end{aligned} \tag{7}$$

Separando $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ em suas partes reais e imaginárias, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(1)}(t) &= e^{\lambda t}(\mathbf{a}\cos\mu t - \mathbf{b}\,\text{sen}\,\mu t)\\ &\quad + ie^{\lambda t}(\mathbf{a}\,\text{sen}\,\mu t + \mathbf{b}\cos\mu t).\end{aligned} \tag{8}$$

Se escrevermos $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$, então os vetores

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) &= e^{\lambda t}(\mathbf{a}\cos\mu t - \mathbf{b}\,\text{sen}\,\mu t),\\ \mathbf{v}(t) &= e^{\lambda t}(\mathbf{a}\,\text{sen}\,\mu t + \mathbf{b}\cos\mu t)\end{aligned} \tag{9}$$

são soluções reais da Eq. (1). É possível mostrar que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são soluções linearmente independentes (veja o Problema 27).

Por exemplo, suponha que $r_1 = \lambda + i\mu$ e que $r_3, \ldots, r_n$ são reais e distintas. Sejam $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$, $\boldsymbol{\xi}^{(3)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ os autovetores associados. Então, a solução geral da Eq. (1) é

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}(t) + c_2\mathbf{v}(t) + c_3\boldsymbol{\xi}^{(3)}e^{r_3 t} + \cdots + c_n\boldsymbol{\xi}^{(n)}e^{r_n t}, \tag{10}$$

onde $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são dados pela Eq. (9). Enfatizamos que essa análise se aplica apenas se a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ na Eq. (1) é real, pois só nesse caso os autovalores e autovetores complexos têm que aparecer em pares complexos conjugados.

Os exemplos a seguir ilustram o caso $n = 2$, tanto para simplificar os cálculos, quanto para permitir uma visualização fácil da solução no plano de fase.

Exemplo 1

Encontre um conjunto fundamental de soluções reais do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\mathbf{x} \tag{11}$$

e mostre-o graficamente.

A Fig. 7.6.1 mostra um campo de direções para o sistema (11). Esse gráfico sugere que as trajetórias no plano de fase são espirais aproximando-se na origem no sentido horário.

Para encontrar um conjunto fundamental de soluções, supomos que

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt} \tag{12}$$

e obtemos o conjunto de equações lineares algébricas

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - r & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} - r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

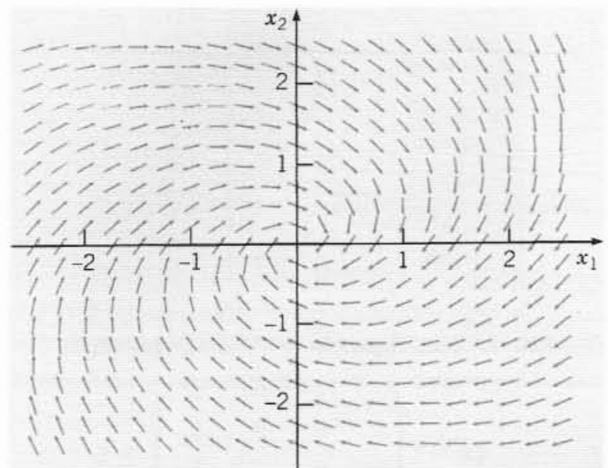


FIG. 7.6.1 Um campo de direções para o sistema (11).

para os autovalores e autovetores de $\mathbf{A}$. A equação característica é

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - r & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} - r \end{vmatrix} = r^2 + r + \tfrac{5}{4} = 0; \qquad (14)$$

portanto, os autovalores são $r_1 = -1/2 + i$ e $r_2 = -1/2 - i$. Um cálculo direto a partir da Eq. (13) mostra que os autovetores associados são

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Logo, um conjunto fundamental de soluções para o sistema (11) é

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-1/2+i)t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-1/2-i)t}. \quad (16)$$

Para obter um conjunto de soluções reais, precisamos encontrar as partes real e imaginária de $\mathbf{x}^{(1)}$ ou de $\mathbf{x}^{(2)}$. De fato,

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-t/2}(\cos t + i \operatorname{sen} t) = \begin{pmatrix} e^{-t/2}\cos t \\ -e^{-t/2}\operatorname{sen} t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{-t/2}\operatorname{sen} t \\ e^{-t/2}\cos t \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Portanto,

$$\mathbf{u}(t) = e^{-t/2}\begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}(t) = e^{-t/2}\begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} \qquad (18)$$

é um conjunto de soluções reais. Para verificar que $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são linearmente independentes, vamos calcular o wronskiano:

$$W(\mathbf{u}, \mathbf{v})(t) = \begin{vmatrix} e^{-t/2}\cos t & e^{-t/2}\operatorname{sen} t \\ -e^{-t/2}\operatorname{sen} t & e^{-t/2}\cos t \end{vmatrix} = e^{-t}(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) = e^{-t}.$$

Como o wronskiano nunca se anula, segue que $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ formam um conjunto fundamental de soluções (reais) do sistema (11).

Os gráficos das soluções $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ aparecem na Fig. 7.6.2*a*. Como

$$\mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

os gráficos de $\mathbf{u}(t)$ e de $\mathbf{v}(t)$ contêm os pontos (1, 0) e (0, 1), respectivamente. Outras soluções do sistema (11) são combinações lineares de $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$, e a Fig. 7.6.2*a* mostra, também, algumas dessas soluções. Cada trajetória se aproxima da origem ao longo de uma espiral quando $t \to \infty$, formando uma infinidade de caminhos em torno da origem; isso é devido ao fato de as soluções (18) serem produtos de uma exponencial decrescente com uma função seno ou co-seno. Alguns gráficos típicos de x_1 em função de t estão ilustrados na Fig. 7.6.2*b*; cada uma representa uma oscilação decrescente no tempo.

A Fig. 7.6.2*a* é típica de sistemas de segunda ordem $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ cujos autovalores são complexos com parte real negativa. A origem é chamada de **ponto espiral** e é assintoticamente estável, já que todas as trajetórias se aproximam dela quando t cresce. Para um sistema cujos autovalores têm parte real positiva, as trajetórias são análogas às da Fig. 7.6.2*a*, exceto que a direção do movimento é contrária, se afastando da origem, e as trajetórias são ilimitadas. Nesse caso, a origem é instável. Se a parte real dos autovalores é nula, então as trajetórias nem se aproximam da origem nem se tornam ilimitadas, mas, em vez disso, percorrem, repetidamente, uma curva fechada em torno da origem. Exemplos desse comportamento podem ser vistos nas Figs. 7.6.3*b* e 7.6.4*b* adiante. Nesse caso, a origem é chamada de **centro** e é também dita estável, mas não assintoticamente estável. Nos três casos, o sentido do movimento pode ser horário, como neste exemplo, ou trigonométrico, dependendo dos elementos na matriz de coeficientes $\mathbf{A}$.

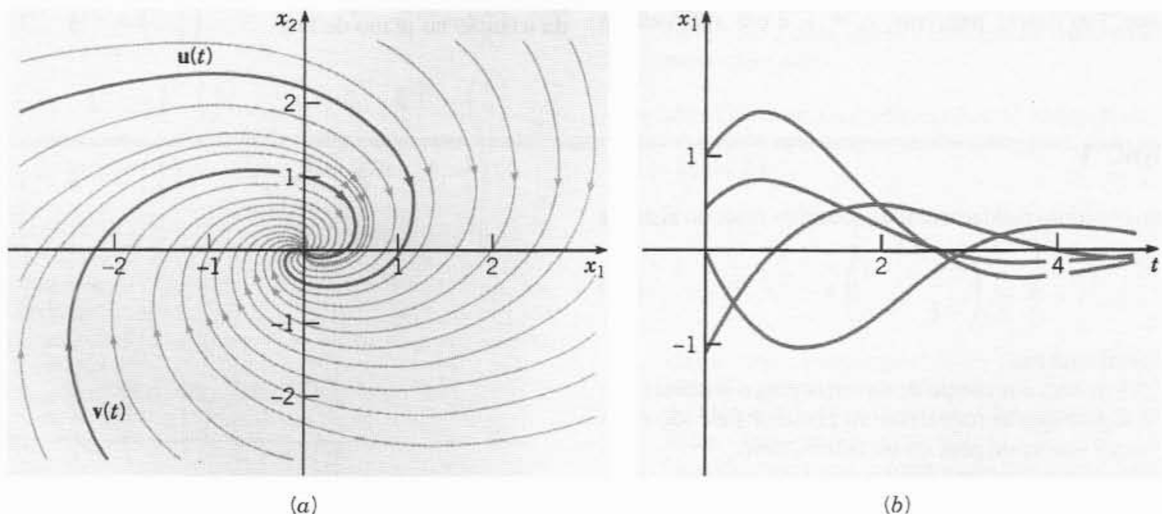


FIG. 7.6.2 (*a*) Trajetórias do sistema (11); a origem é um ponto espiral. (*b*) Gráficos de x_1 em função de t para o sistema (11).

Para sistemas de segunda ordem com coeficientes reais, completamos nossa descrição dos três casos principais que podem ocorrer.

1. Autovalores têm sinais opostos; $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um ponto de sela.
2. Autovalores têm o mesmo sinal, mas são distintos; $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um nó.
3. Autovalores são complexos com parte real não-nula; $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um ponto espiral.

As outras possibilidades são menos importantes e ocorrem como transição entre dois dos casos que acabamos de listar. Por exemplo, um autovalor nulo ocorre durante a transição entre um ponto de sela e um nó. Autovalores puramente imaginários ocorrem durante a transição entre pontos espirais assintoticamente estáveis e instáveis. Finalmente, autovalores reais e iguais aparecem durante a transição entre nós e pontos espirais.

Exemplo 2

O sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{19}$$

contém um parâmetro α. Descreva como as soluções dependem qualitativamente de α; em particular, encontre os valores críticos de α nos quais o comportamento qualitativo das trajetórias no plano de fase mudam drasticamente.

O comportamento das trajetórias é controlado pelos autovalores da matriz de coeficientes. A equação característica é

$$r^2 - \alpha r + 4 = 0, \tag{20}$$

de modo que os autovalores são

$$r = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 16}}{2}. \tag{21}$$

Da Eq. (21), segue que os autovalores são complexos conjugados para $-4 < \alpha < 4$ e reais nos outros casos. Assim, dois valores críticos são $\alpha = -4$ e $\alpha = 4$, onde os autovalores mudam de reais para complexos ou vice-versa. Para $\alpha < -4$, ambos os autovalores são negativos, de modo que todas as trajetórias se aproximam da origem, que é um nó assintoticamente estável. Para $\alpha > 4$, ambos os autovalores são positivos, de modo que a origem é, novamente, um nó, só que, dessa vez, instável; todas as trajetórias (exceto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$) tornam-se ilimitadas. No intervalo intermediário $-4 < \alpha < 4$, os autovalores são complexos e as trajetórias são espirais. No entanto, para $-4 < \alpha < 0$, a parte real dos autovalores é negativa, as espirais estão orientadas para dentro e a origem é assintoticamente estável, enquanto, para $0 < \alpha < 4$, a parte real dos autovalores é positiva e a origem é instável. Assim, $\alpha = 0$ também é um valor crítico, onde o sentido do movimento espiral muda de dentro para fora. Para esse valor de α, a origem é um centro e as trajetórias são curvas fechadas em torno da origem, correspondendo a soluções periódicas no tempo. Os outros valores críticos, $\alpha = \pm 4$, geram autovalores reais e iguais. Nesse caso a origem é, novamente, um nó, mas o retrato de fase é um pouco diferente dos da Seção 7.5. Vamos analisar esse caso na Seção 7.8.

Um Sistema Mola-Massa Múltiplo. Considere o sistema de duas massas e três molas ilustrado na Fig. 7.1.1, cujas equações de movimentos são dadas pelas Eqs. (1) da Seção 7.1. Se supusermos que não há forças externas, então $F_1(t) = 0$, $F_2(t) = 0$ e as equações resultantes são

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2, \\ m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} &= k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2. \end{aligned} \tag{22}$$

Essas equações podem ser resolvidas como um sistema de duas equações de segunda ordem (veja o Problema 29), mas, consistente com nossa abordagem neste capítulo, vamos transformá-los em um sistema de quatro equações de primeira ordem. Sejam $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_1'$ e $y_4 = x_2'$. Então

$$y_1' = y_3, \qquad y_2' = y_4, \tag{23}$$

e, das Eqs. (22),

$$\begin{aligned} m_1 y_3' &= -(k_1 + k_2)y_1 + k_2y_2, \\ m_2 y_4' &= k_2y_1 - (k_2 + k_3)y_2. \end{aligned} \tag{24}$$

O exemplo a seguir trata de um caso particular desse sistema com duas massas e três molas.

Exemplo 3

Suponha que $m_1 = 2$, $m_2 = 9/4$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ e $k_3 = 15/4$ nas Eqs. (23) e (24), de modo que essas equações ficam

$$\begin{aligned} y_1' &= y_3, \qquad y_2' = y_4, \\ y_3' &= -2y_1 + \tfrac{3}{2}y_2, \\ y_4' &= \tfrac{4}{3}y_1 - 3y_2. \end{aligned} \tag{25}$$

Analise os movimentos possíveis descritos pelas Eqs. (25) e desenhe gráficos mostrando comportamentos típicos.

Podemos escrever o sistema (25) em forma material como

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 4/3 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}. \tag{26}$$

Mantenha em mente que y_1 e y_2 são as posições das duas massas em relação às duas posições de equilíbrio e que y_3 e y_4 são suas velocidades. Supomos, como de hábito, que $\mathbf{y} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$, onde r tem que ser um autovalor da matriz **A** e $\boldsymbol{\xi}$ um autovetor associado. É possível, embora um tanto enfadonho, encontrar os autovalores e autovetores de **A** manualmente, mas é mais fácil usar um programa de computador apropriado. O polinômio característico de **A** é

$$r^4 + 5r^2 + 4 = (r^2 + 1)(r^2 + 4) \qquad (27)$$

de modo que os autovalores são $r_1 = i$, $r_2 = -i$, $r_3 = 2i$, e $r_4 = -2i$. Os autovetores associados são

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3i \\ 2i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3i \\ -2i \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{\xi}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6i \\ -8i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^{(4)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -6i \\ 8i \end{pmatrix}. \qquad (28)$$

As soluções complexas $\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{it}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{-it}$ são complexas conjugadas, de modo que é possível encontrar duas soluções reais encontrando as partes real e imaginária de qualquer uma delas. Por exemplo, temos

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{it} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3i \\ 2i \end{pmatrix}(\cos t + i \operatorname{sen} t)$$
$$= \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 2\cos t \\ -3\operatorname{sen} t \\ -2\operatorname{sen} t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 3\operatorname{sen} t \\ 2\operatorname{sen} t \\ 3\cos t \\ 2\cos t \end{pmatrix} = \mathbf{u}^{(1)}(t) + i\mathbf{v}^{(1)}(t). \qquad (29)$$

De maneira análoga, temos

$$\boldsymbol{\xi}^{(3)}e^{2it} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6i \\ -8i \end{pmatrix}(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t)$$
$$= \begin{pmatrix} 3\cos 2t \\ -4\cos 2t \\ -6\operatorname{sen} 2t \\ 8\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 3\operatorname{sen} 2t \\ -4\operatorname{sen} 2t \\ 6\cos 2t \\ -8\cos 2t \end{pmatrix} = \mathbf{u}^{(2)}(t) + i\mathbf{v}^{(2)}(t). \qquad (30)$$

Deixamos a seu cargo verificar que $\mathbf{u}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{u}^{(2)}$ e $\mathbf{v}^{(2)}$ são linearmente independentes e formam, portanto, um conjunto fundamental de solução. Logo a solução geral da Eq. (26) é

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 2\cos t \\ -3\operatorname{sen} t \\ -2\operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3\operatorname{sen} t \\ 2\operatorname{sen} t \\ 3\cos t \\ 2\cos t \end{pmatrix} +$$
$$+ c_3 \begin{pmatrix} 3\cos 2t \\ -4\cos 2t \\ -6\operatorname{sen} 2t \\ 8\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 3\operatorname{sen} 2t \\ -4\operatorname{sen} 2t \\ 6\cos 2t \\ -8\cos 2t \end{pmatrix}, \qquad (31)$$

onde c_1, c_2, c_3 e c_4 são constantes arbitrárias.

O espaço de fase para esse sistema tem dimensão quatro e cada solução, obtida por um conjunto particular de valores para $c_1, \ldots, c_4$ na Eq. (31), corresponde a uma trajetória nesse espaço. Como cada solução dada pela Eq. (31) é periódica com período 2π, cada trajetória é uma curva fechada. Não importa onde a trajetória começa em $t = 0$, ela sempre volta a esse ponto em $t = 2\pi$, $t = 4\pi$ e assim por diante, percorrendo, repetidamente, a mesma curva em cada intervalo de comprimento 2π. Não vamos tentar mostrar nenhuma dessas trajetórias de dimensão quatro aqui. Em vez disso, mostramos, nas figuras abaixo, projeções de determinadas trajetórias no plano y_1y_3 ou no plano y_2y_4 mostrando, assim, o movimento de cada massa separadamente.

As duas primeiras parcelas à direita do sinal de igualdade na Eq. (31) descrevem um movimento com freqüência 1 e período

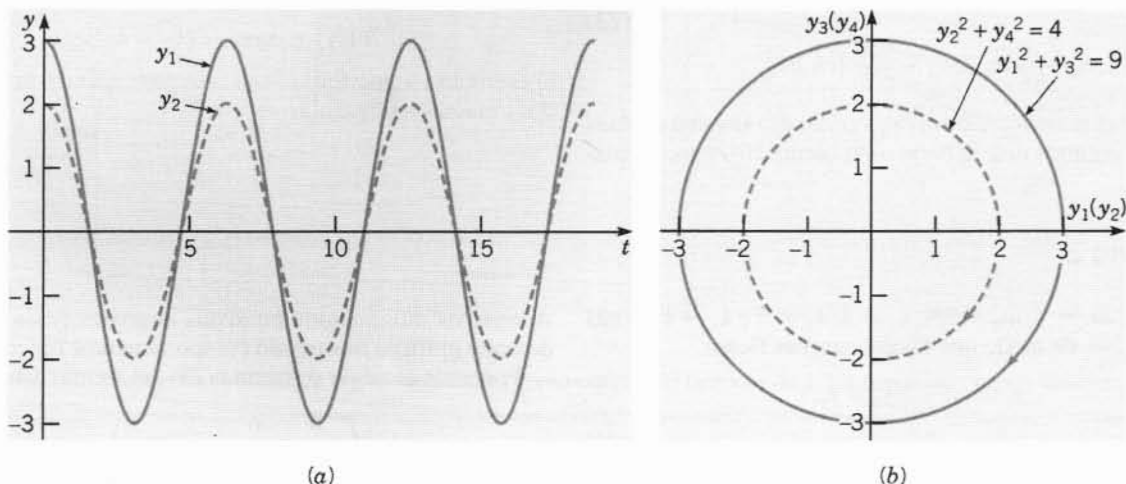


FIG. 7.6.3 (*a*) Gráficos de y_1 e de y_2 em função de t para a solução $\mathbf{u}^{(1)}(t)$. (*b*) Superposição de projeções das trajetórias nos planos y_1y_3 e y_2y_4 para a solução $\mathbf{u}^{(1)}(t)$.

2π. Note que $y_2 = (2/3)\,y_1$ nessas parcelas e que $y_4 = (2/3)\,y_3$. Isso significa que as duas massas se movem para a frente e para trás juntas, indo sempre na mesma direção, mas com a segunda massa percorrendo apenas dois terços da distância percorrida pela primeira. Se considerarmos a solução $\mathbf{u}^{(1)}t$ e fizermos os gráficos de y_1 e de y_2 em função de t no mesmo conjunto de eixos, obteremos os gráficos de co-senos com amplitude 3 e 2, respectivamente, ilustrados na Fig. 7.6.3*a*. A trajetória da primeira massa no plano y_1y_3 está contida no círculo de raio 3 ilustrado na Fig. 7.6.3*b*, percorrido no sentido horário começando no ponto (3, 0) e completando o circuito no instante 2π. Essa figura mostra, também, a trajetória da segunda massa no plano y_2y_4, que está contida no círculo de raio 2, também percorrido no sentido horário, começando em (2, 0) e completando, também, o circuito no instante 2π. A origem é um centro nos planos respectivos y_1y_3 e y_2y_4. Gráficos análogos (com um deslocamento apropriado no tempo são obtidos de $\mathbf{v}^{(1)}$ ou de uma combinação linear da $\mathbf{u}^{(1)}$ e de $\mathbf{v}^{(1)}$.

As parcelas restantes à direita do sinal de igualdade na Eq. (31) descrevem movimentos com freqüência 2 e período π. Note que nesse caso $y_2 = -(4/3)\,y_1$ e $y_4 = -(4/3)\,y_3$. Isso significa que as duas massas estão sempre se movendo em direções opostas e que a distância percorrida pela segunda massa é quatro terços da distância percorrida pela primeira. Se olharmos apenas para $\mathbf{u}^{(2)}(t)$ e fizermos os gráficos de y_1 e y_2 em função de t no mesmo conjunto de eixos, obteremos a Fig. 7.6 4*a*. Existe uma diferença de fase de π e a amplitude de y_2 é quatro terços da de y_1, confirmando as afirmações anteriores sobre os movimentos das massas. A Fig. 7.6.4*b* mostra uma superposição das trajetórias das duas massas em seus planos de fase respectivos. Ambos os gráficos são elipses, a interior correspondendo à primeira massa e a exterior, à segunda, A trajetória na elipse interna começa em (3, 0) e na elipse externa começa em (4, 0). Ambas são percorridas no sentido horário e completam o circuito em um tempo π. A origem é um centro nos planos respectivos y_1y_3 e y_2y_4. Mais uma vez, gráficos semelhantes podem ser obtidos de $\mathbf{v}^{(2)}$ ou de uma combinação linear de $\mathbf{u}^{(2)}$ e $\mathbf{v}^{(2)}$.

Os tipos de movimento descritos nos dois parágrafos precedentes são chamados de **modos fundamentais** de vibração para o sistema de duas massas. Cada um deles resulta de condições inicais bastante especiais. Por exemplo, para obter o modo fundamental de freqüência 1, ambas as constantes c_3 e c_4 na Eq. (31)

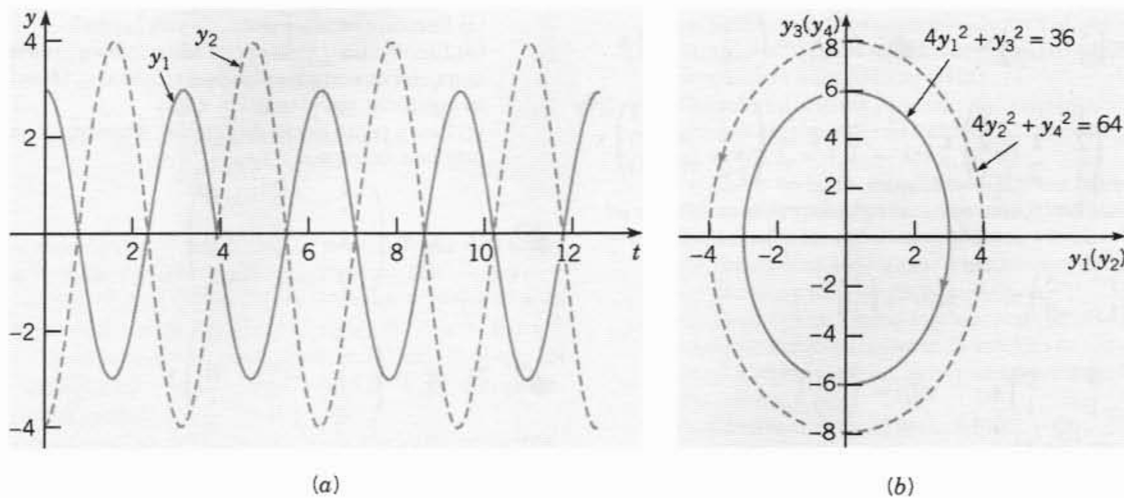


FIG. 7.6.4 (*a*) Gráficos de y_1 e de y_2 em função de t para a solução $\mathbf{u}^{(2)}(t)$. (*b*) Superposição de projeções das trajetórias nos planos y_1y_3 e y_2y_4 para a solução $\mathbf{u}^{(2)}(t)$.

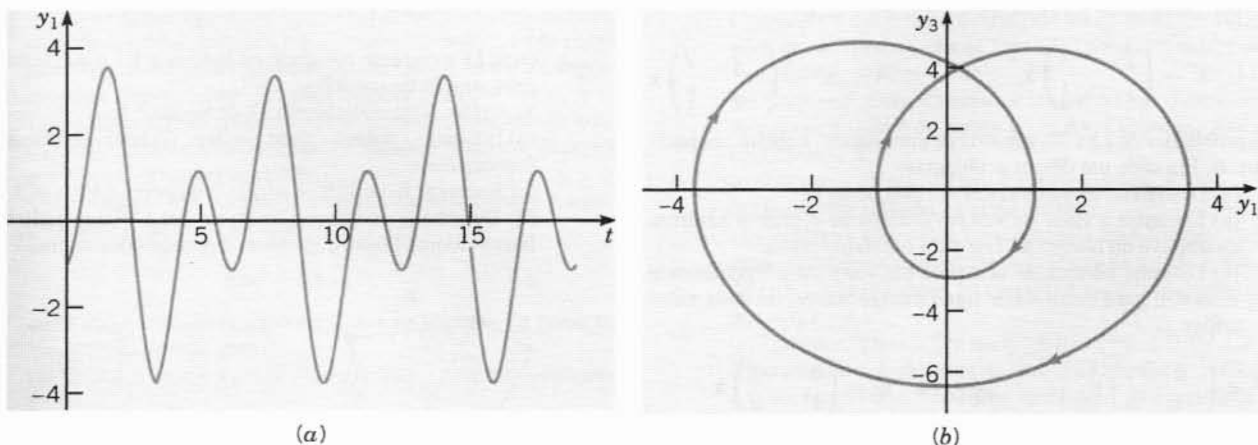


FIG. 7.6.5 Uma solução do sistema (22) satisfazendo a condição inicial $y(0) = (-1, 4, 1, 1)$. (*a*) Gráficos de y_1 em função de t. (*b*) A projeção da trajetória no plano y_1y_3.

têm que ser nulas. Isso só ocorre para condições iniciais nas quais $3y_2(0) = 2y_1(0)$ e $3y_4(0) = 2y_3(0)$. Analogamente, o modo fundamental de freqüência 2 só é obtido quando ambas as constantes c_1 e c_2 na Eq. (31) são nulas—isto é, quando as condições iniciais forem $3y_2(0) = -4y_1(0)$ e $3y_4(0) = -4y_3(0)$.

Para condições iniciais mais gerais, a solução é uma combinação dos dois modos fundamentais. A Fig. 7.6.5*a* mostra um gráfico de y_1 em função *t* para um caso típico e a projeção da trajetória correspondente no plano y_1y_3 está ilustrada na Fig. 7.6.5*b*. Observe que essa última pode ser mal interpretada porque mostra a projeção da trajetória se intersectando. Não pode haver interseção na trajetória em quatro dimensões,pois isso violaria o teorema de unicidade geral: não pode haver duas soluções diferentes começando do mesmo ponto inicial.

Problemas

Nos problemas de 1 a 8, expresse a solução geral do sistema de equações dado como combinação de funções reais. Nos problemas de 1 a 6, desenhe, também, um campo de direções, esboce algumas trajetórias e descreva o comportamento das soluções quando $t \to \infty$.

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{5} & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Nos Problemas 9 e 10, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Descreva o comportamento das soluções quando $t \to \infty$.

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Nos Problemas 11 e 12:

(a) Encontre os autovalores do sistema dado.
(b) Escolha um ponto inicial (diferente da origem) e desenhe a trajetória correspondente no plano x_1x_2.
(c) Para a sua trajetória encontrada em (b), desenhe os gráficos de x_1 e x_2 em função de *t*.
(d) Para a sua trajetória encontrada em (b), desenhe o gráfico correspondente no espaço tridimensional tx_1x_2.

11. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -2 \\ 1 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}\mathbf{x}$

12. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & 2 \\ -1 & \frac{6}{5} \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Nos problemas de 13 a 20, a matriz de coeficientes contém um parâmetro α. Em cada um desses problemas:

(a) Determine os autovalores em função de α.
(b) Encontre o valor ou valores críticos de α onde a natureza qualitativa do retrato de fase para o sistema muda.
(c) Desenhe retratos de fase para um valor de α ligeiramente menor, e para outro valor ligeiramente maior, de cada valor crítico.

13. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}\mathbf{x}$

14. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}\mathbf{x}$

15. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

16. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \alpha & \frac{5}{4} \end{pmatrix}\mathbf{x}$

17. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

18. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ -6 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

19. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \alpha & 10 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

20. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ 8 & -6 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Nos Problemas 21 e 22, resolva o sistema de equações dado pelo método do Problema 19 da Seção 7.5. Suponha que $t > 0$.

21. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

22. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Nos Problemas 23 e 24:

(a) Encontre os autovalores do sistema dado.
(b) Escolha um ponto inicial (diferente da origem) e desenhe as trajetórias correspondentes no plano x_1x_2. Desenhe, também, as trajetórias nos planos x_1x_3 e x_2x_3.
(c) Para o ponto inicial do item (b), desenhe a trajetória correspondente no espaço $x_1x_2x_3$.

23. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\mathbf{x}$

24. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}\mathbf{x}$

25. Considere o circuito elétrico ilustrado na Fig. 7.6.5. Suponha que $R_1 = R_2 = 4$ ohms, $C = 1/2$ farad e $L = 8$ henrys.
(a) Mostre que esse circuito é descrito pelo sistema de equações diferenciais

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}, \qquad \text{(i)}$$

onde *I* é a corrente passando no indutor e *V* é a queda de voltagem através do capacitor.
Sugestão: Veja o Problema 18 da Seção 7.1.
(b) Encontre a solução geral das Eqs. (i) como combinação de funções reais.
(c) Encontre $I(t)$ e $V(t)$ se $I(0) = 2$ ampères e $V(0) = 3$ volts.
(d) Determine os valores-limite de $I(t)$ e $V(t)$ quando $t \to \infty$. Esses valores-limite dependem das condições iniciais?

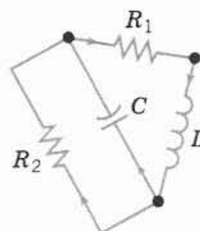


FIG. 7.6.6 O circuito do Problema 25.

26. O circuito elétrico ilustrado na Fig. 7.6.7 é descrito pelo sistema de equações diferenciais

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}, \qquad \text{(i)}$$

onde I é a corrente passando no indutor e V é a queda de voltagem através do capacitor. Essas equações diferenciais foram deduzidas no Problema 19 da Seção 7.1.
(a) Mostre que os autovalores da matriz de coeficientes são reais e distintos se $L > 4R^2C$ e que são complexos conjugados se $L < 4R^2C$.
(b) Suponha que $R = 1$ ohm, $C = 1/2$ farad e $L = 1$ henry. Encontre a solução geral do sistema (i) nesse caso.
(c) Encontre $I(t)$ e $V(t)$ se $I(0) = 2$ ampères e $V(0) = 1$ volt.
(d) Para o circuito no item (b), determine os valores-limite de $I(t)$ e $V(t)$ quando $t \to \infty$. Esses valores-limite dependem das condições iniciais?

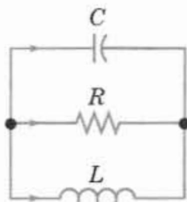


FIG. 7.6.7 O circuito do Problema 26.

27. Vamos indicar, neste problema, como mostrar que $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$, dados pela Eq. (9) são linearmente independentes. Sejam $r_1 = \lambda + i\mu$ e $\bar{r}_1 = \lambda - i\mu$ um par de autovalores conjugados da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ da Eq. (1); sejam $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ e $\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$ os autovetores correspondentes. Lembre-se que foi dito na Seção 7.3 que, se $r_1 \neq \bar{r}_1$, então $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$ são linearmente independentes.
(a) Vamos mostrar, primeiro, que $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são linearmente independentes. Considere a equação $c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Expresse $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ em função de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e de $\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)}$, e depois mostre que $(c_1 - ic_2)\boldsymbol{\xi}^{(1)} + (c_1 + ic_2)\bar{\boldsymbol{\xi}}^{(1)} = 0$.
(b) Mostre que $c_1 - ic_2 = 0$ e $c_1 + ic_2 = 0$, e que, portanto, $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$. Em conseqüência, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são linearmente independentes.
(c) Para mostrar que $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são linearmente independentes, considere a equação $c_1\mathbf{u}(t_0) + c_2\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{0}$, onde t_0 é um ponto arbitrário. Reescreva essa equação em termos de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ e depois prossiga como no item (b) para mostrar que $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$. Logo, $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são linearmente independentes no ponto arbitrário t_0. Portanto, são linearmente independentes em qualquer ponto e em qualquer intervalo.

28. Uma massa m em uma mola com constante k satisfaz a equação diferencial (veja a Seção 3.8)

$$mu'' + ku = 0,$$

onde $u(t)$ é o deslocamento da massa no instante t a partir de sua posição de equilíbrio.
(a) Sejam $x_1 = u$ e $x_2 = u'$; mostre que o sistema resultante é

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

(b) Encontre os autovalores da matriz para o sistema no item (a).
(c) Esboce diversas trajetórias do sistema. Escolha uma de suas trajetórias e esboce os gráficos correspondentes de x_1 e de x_2 em função de t. Esboce os dois gráficos no mesmo conjunto de eixos.
(d) Qual a relação entre os autovalores da matriz de coeficientes e a freqüência natural do sistema massa-mola?

29. Considere o sistema com duas massas e três molas do Exemplo 3 no texto. Em vez de transformar o problema em um sistema de quatro equações de primeira ordem, vamos indicar aqui como proceder diretamente das Eqs. (22).
(a) Mostre que as Eqs. (22) podem ser escritas na forma

$$\mathbf{x}'' = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 4/3 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \qquad \text{(i)}$$

(b) Suponha que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$ e mostre que

$$(\mathbf{A} - r^2\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}.$$

Note que r^2 (em vez de r) é um autovalor de $\mathbf{A}$ associado ao autovalor $\boldsymbol{\xi}$.
(c) Encontre os autovalores e autovetores de $\mathbf{A}$.
(d) Escreva expressões para x_1 e x_2. Deve haver quatro constantes arbitrárias nessas expressões.
(e) Diferenciando os resultados do item (d), escreva expressões para x_1' e x_2'. Seus resultados dos itens (d) e (e) devem estar de acordo com a Eq. (31) no texto.

30. Considere o sistema com duas massas e três molas cujas equações de movimento são as Eqs. (22) no texto. Sejam $m_1 = 1$, $m_2 = 4/3$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$, e $k_3 = 4/3$.
(a) Como no texto, transforme o sistema em quatro equações de primeira ordem da forma $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Determine a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$.
(b) Encontre os autovalores e autovetores de $\mathbf{A}$.
(c) Escreva a solução geral do sistema.
(d) Descreva os modos fundamentais de vibração. Para cada modo fundamental, desenhe os gráficos de y_1 e de y_2 em função de t. Desenhe, também, as trajetórias correspondentes nos planos y_1y_3 e y_2y_4.
(e) Considere a condição inicial $y(0) = (2, 1, 0, 0)^T$. Calcule as constantes na solução geral no item (c). Qual o período do movimento nesse caso? Desenhe gráficos de y_1 e de y_2 em função de t. Desenhe, também, as trajetórias correspondentes nos planos y_1y_3 e y_2y_4. Certifique-se de que você compreende como as trajetórias são percorridas durante um período completo.
(f) Considere outras condições iniciais de sua escolha e desenhe gráficos semelhantes aos pedidos no item (e).

31. Considere o sistema com duas massas e três molas cujas equações de movimento são as Eqs. (22) no texto. sejam $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.
(a) Como no texto, transforme o sistema em quatro equações de primeira ordem da forma $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Determine a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$.
(b) Encontre os autovalores e autovetores de $\mathbf{A}$.
(c) Escreva a solução geral do sistema.
(d) Descreva os modos fundamentais de vibração. Para cada modo fundamental, desenhe os gráficos de y_1 e de y_2 em função de t. Desenhe, também, as trajetórias correspondentes nos planos y_1y_3 e y_2y_4.
(e) Considere a condições inicial $y(0) = (-1, 3, 0, 0)^T$. Calcule as constantes na solução geral no item (c). Desenhe os gráficos de y_1 e y_2 em função de t. Você acha que a solução é periódica? Desenhe, também, as trajetórias correspondentes nos planos y_1y_3 e y_2y_4.
(f) Considere outras a condições iniciais de sua escolha e desenhe gráficos semelhantes aos pedidos no item (e).

7.7 Matrizes Fundamentais

A estrutura de soluções de um sistema de equações diferenciais lineares pode ficar mais clara pela introdução da idéia de matriz fundamental. Suponha que $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ formam um conjunto fundamental de soluções para a equação

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \tag{1}$$

em algum intervalo $\alpha < t < \beta$. Então, a matriz

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_1^{(n)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

cujas colunas são os vetores $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$, é dita uma **matriz fundamental** para o sistema (1). Note que uma matriz fundamental é invertível, já que suas colunas são vetores linearmente independentes.

Exemplo 1

Encontre uma matriz fundamental para o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{3}$$

No Exemplo 1 da Seção 7.5, vimos que

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

são soluções linearmente independentes da Eq. (3). Assim, uma matriz fundamental para o sistema (3) é

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

A solução de um problema de valor inicial pode ser escrita de maneira bem compacta em função de uma matriz fundamental. A solução geral da Eq. (1) é

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t) \tag{5}$$

ou, em termos de $\boldsymbol{\Psi}(t)$,

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi}(t)\mathbf{c}, \tag{6}$$

onde $\mathbf{c}$ é um vetor constante com componentes arbitrárias $c_1, \ldots, c_n$. Para um problema de valor inicial consistindo na equação diferencial (1) e na condição inicial

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \tag{7}$$

onde t_0 é um ponto dado em $\alpha < t < \beta$ e $\mathbf{x}^0$ é um vetor inicial dado, basta escolher o vetor $\mathbf{c}$ na Eq. (6) que satisfaça a condição inicial (7). Portanto, $\mathbf{c}$ tem que satisfazer

$$\boldsymbol{\Psi}(t_0)\mathbf{c} = \mathbf{x}^0. \tag{8}$$

Logo, como $\boldsymbol{\Psi}(t_0)$ é invertível,

$$\mathbf{c} = \boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0 \tag{9}$$

e

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0 \tag{10}$$

é a solução do problema de valor inicial (1), (7). Enfatizamos, no entanto, que, para resolver um problema de valor inicial dado, normalmente, resolvemos a Eq. (8) por redução de linhas e, depois, substituímos a solução $\mathbf{c}$ na Eq. (6), em vez de calcular $\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)$ e usar a Eq. (10).

Lembre-se de que cada coluna da matriz fundamental $\boldsymbol{\Psi}$ é uma solução da Eq. (1). Segue que $\boldsymbol{\Psi}$ satisfaz a equação diferencial matricial

$$\boldsymbol{\Psi}' = \mathbf{P}(t)\boldsymbol{\Psi}. \tag{11}$$

Essa relação é confirmada imediatamente comparando-se os dois lados da Eq. (11) coluna a coluna.

Algumas vezes é conveniente usar a matriz fundamental especial, denotada por $\boldsymbol{\Phi}(t)$, cujas colunas são os vetores $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$ dados no Teorema 7.4.4. Além da equação diferencial (1), esses vetores satisfazem as condições iniciais

$$\mathbf{x}^{(j)}(t_0) = \mathbf{e}^{(j)}, \tag{12}$$

onde $\mathbf{e}^{(j)}$ é o vetor unitário, definido no Teorema 7.4.4, com um na j-ésima posição e zeros em todas as outras componentes. Assim, $\boldsymbol{\Phi}(t)$ tem a propriedade

$$\boldsymbol{\Phi}(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}. \tag{13}$$

Vamos sempre reservar o símbolo $\boldsymbol{\Phi}$ para denotar a matriz fundamental que satisfaz a condição inicial (13) e usar $\boldsymbol{\Psi}$ quando se desejar uma matriz fundamental arbitrária. Em termos de $\boldsymbol{\Phi}(t)$, a solução do problema de valor inicial (1), (7) parece até mais simples; como $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t_0) = \mathbf{I}$, segue da Eq. (10) que

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{x}^0. \tag{14}$$

Embora a matriz fundamental $\boldsymbol{\Phi}(t)$ seja, muitas vezes, mais complicada do que $\boldsymbol{\Psi}(t)$, ela será particularmente útil se o mesmo sistema de equações diferenciais for resolvido repetidamente sujeito a condições iniciais diferentes. Isso corresponde a um sistema físico dado que pode começar em muitos estados iniciais diferentes. Se a matriz fundamental $\boldsymbol{\Phi}(t)$ tiver sido determinada, então a solução para cada conjunto de condições iniciais pode ser encontrada, simplesmente, através da multiplicação de matrizes, como indicado na Eq. (14). A matriz $\boldsymbol{\Phi}(t)$ representa, assim, uma transformação das condições iniciais $\mathbf{x}^0$ na solução $\mathbf{x}(t)$ em um instante arbitrário t. Comparando as Eqs. (10) e (14), é claro que $\boldsymbol{\Phi}(t) = \boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t)$.

Exemplo 2

Para o sistema (3),

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x},$$

no Exemplo 1, encontre a matriz fundamental $\mathbf{\Phi}$ tal que $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$.

As colunas de $\mathbf{\Phi}$ são as soluções da Eq. (3) que satisfazem as condições iniciais

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Como a solução geral da Eq. (3) é

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t},$$

podemos encontrar a solução que satisfaz o primeiro conjunto de condições iniciais escolhendo $c_1 = c_2 = 1/2$; analogamente, obtemos a solução que satisfaz o segundo conjunto de condições iniciais escolhendo $c_1 = 1/4$ e $c_2 = -1/4$. Logo,

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Note que os elementos de $\mathbf{\Phi}(t)$ são mais complicados dos que o da matriz fundamental $\mathbf{\Psi}(t)$ dada pela Eq. (4); no entanto, agora é fácil determinar a solução correspondente a qualquer conjunto de condições iniciais.

***A Matriz* exp(*At*).** Lembre-se que a solução do problema de valor inicial escalar

$$x' = ax, \qquad x(0) = x_0, \tag{17}$$

onde a é constante, é

$$x = x_0 \exp(at). \tag{18}$$

Considere, agora, o problema de valor inicial correspondente para um sistema $n \times n$, a saber,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \tag{19}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz constante. Aplicando os resultados desta seção ao problema (19), podemos escrever sua solução como

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}^0, \tag{20}$$

onde $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$. A comparação entre os Problemas (17) e (19) e suas soluções sugere que a matriz $\mathbf{\Phi}(t)$ pode ter um caráter exponencial. Vamos explorar essa possibilidade.

A função exponencial escalar $\exp(at)$ pode ser representada pela série de potências

$$\exp(at) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n t^n}{n!}, \tag{21}$$

que converge para todo t. Vamos, agora, substituir o escalar a pela matriz $n \times n$ constante $\mathbf{A}$ e considerar a série correspondente

$$\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} + \cdots. \tag{22}$$

Cada termo na série (22) é uma matriz $n \times n$. É possível mostrar que cada elemento dessa soma de matrizes converge para todo t quando $n \to \infty$. Logo, a série (22) define uma nova matriz como sua soma, que denotamos por $\exp(\mathbf{A}t)$, isto é,

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!}, \tag{23}$$

análoga à expansão (21) da função escalar $\exp(at)$.

Derivando a série (23) termo a termo, obtemos

$$\frac{d}{dt}[\exp(\mathbf{A}t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^{n-1}}{(n-1)!} = \mathbf{A}\left[\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!}\right] = \mathbf{A}\exp(\mathbf{A}t). \tag{24}$$

Assim, $\exp(\mathbf{A}t)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d}{dt}\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{A}\exp(\mathbf{A}t). \tag{25}$$

Além disso, quando $t = 0$, $\exp(\mathbf{A}t)$ satisfaz a condição inicial

$$\exp(\mathbf{A}t)\Big|_{t=0} = \mathbf{I}. \tag{26}$$

A matriz fundamental $\mathbf{\Phi}$ satisfaz o mesmo problema de valor inicial que $\exp(\mathbf{A}t)$, a saber,

$$\mathbf{\Phi}' = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}, \qquad \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}. \tag{27}$$

Então, pela unicidade no Teorema 7.12 (estendido para equações diferenciais matriciais), concluímos que $\exp(\mathbf{A}t)$ e a matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ são iguais. Logo podemos escrever a solução do problema de valor inicial (19) na forma

$$\mathbf{x} = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}^0, \tag{28}$$

que é análoga à solução (18) do problema de valor inicial (17).

Para justificar, definitivamente, a utilização de $\exp(\mathbf{A}t)$ para a soma da séries (22), deveríamos demonstrar que essa função matricial tem as propriedades que associamos à função exponencial usual. Um modo de fazer isso está esquematizado no Problema 15.

Matrizes Diagonalizáveis. A razão básica de por que um sistema linear (de equações algébricas ou diferenciais) apresenta alguma dificuldade é que as equações estão, em geral, *acopladas*. Em outras palavras, algumas das equações, ou todas elas, envolvem mais de uma das incógnitas (tipicamente, todas elas). Portanto, as equações em um sistema têm de ser resolvidas *simultaneamente*. Por outro lado, se cada equação dependesse de uma única variável, então cada equação poderia ser resolvida independente de todas as outras, o que é uma tarefa muito mais simples. Essa observação sugere que uma possível maneira de resolver um sistema de equações pode ser transformando-o em um sistema equivalente *desacoplado*, no qual cada equação contém uma única incógnita. Isso corresponde a transformar a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ em uma matriz *diagonal*.

Autovetores servem para se obter tal transformação. Suponha que a matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ tem um conjunto completo de n autovetores linearmente independentes. Lembre-se de que esse é certamente o caso quando os autovalores de $\mathbf{A}$ forem todos distintos ou quando $\mathbf{A}$ for auto-adjunta. Denotando por $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ esses autovetores e por $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ os autovalores associados, formamos

a matriz **T** cujas colunas são os autovetores, isto é,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} & \cdots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \cdots & \xi_n^{(n)} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Como as colunas de **T** são vetores linearmente independentes, det $\mathbf{T} \neq 0$; logo, **T** é invertível e $\mathbf{T}^{-1}$ existe. Um cálculo direto mostra que as colunas da matriz **AT** são, simplesmente, os vetores $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}^{(n)}$. Como $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}^{(k)} = \lambda_k\boldsymbol{\xi}^{(k)}$, segue que

$$\mathbf{AT} = \begin{pmatrix} \lambda_1\xi_1^{(1)} & \cdots & \lambda_n\xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1\xi_n^{(1)} & \cdots & \lambda_n\xi_n^{(n)} \end{pmatrix} = \mathbf{TD}, \quad (30)$$

onde

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (31)$$

é uma matriz diagonal, onde os elementos diagonais são os autovalores de **A**. Da Eq. (30), segue que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \mathbf{D}. \quad (32)$$

Assim, se os autovalores e autovetores de **A** são conhecidos, **A** pode ser transformada em uma matriz diagonal pela Eq. (32). Esse processo é conhecido como uma **semelhança**, e a Eq. (32) é descrita, em palavras, dizendo-se que **A** é **semelhante** à matriz diagonal **D**. Uma outra maneira é dizer que **A** é **diagonalizável**. Observe que uma semelhança não muda os autovalores de **A** e transforma seus autovetores nos vetores coordenados $\mathbf{e}^{(1)}, \ldots, \mathbf{e}^{(n)}$.

Se **A** for auto-adjunta, a determinação de $\mathbf{T}^{-1}$ é muito simples. Sabemos que os autovetores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ de **A** são ortogonais dois a dois, logo podemos escolhê-los de modo que estejam normalizados por $(\boldsymbol{\xi}^{(i)}, \boldsymbol{\xi}^{(i)}) = 1$ para cada i. Então, é fácil verificar que $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^*$; em outras palavras, a inversa de **T** é igual à sua adjunta (sua transposta conjugada).

Finalmente, observamos que, se **A** tiver menos do que n autovetores linearmente independentes, então não existe matriz **T** tal que $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \mathbf{D}$. Nesse caso, **A** não é semelhante a nenhuma matriz diagonal e não é diagonalizável.

Exemplo 3

Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Encontre uma matriz **T** que define uma semelhança e mostre que **A** é diagonalizável.

No Exemplo 1 da Seção 7.5, vimos que os autovalores e autovetores de **A** são

$$r_1 = 3, \quad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad r_2 = -1, \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Logo, a matriz de semelhança **T** e sua inversa $\mathbf{T}^{-1}$ são dadas por

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Portanto, você pode verificar que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{D}. \quad (36)$$

Vamos, agora, voltar para o sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}, \quad (37)$$

onde **A** é uma matriz constante. Nas Seções 7.5 e 7.6, descrevemos como resolver tal sistema partindo da hipótese de que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$. Vamos fornecer, agora, um outro ponto de vista baseado na diagonalização da matriz de coeficientes **A**.

De acordo com os resultados que acabamos de enunciar, é possível diagonalizar **A** sempre que **A** tiver um conjunto completo de n autovetores linearmente independentes. Sejam $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ os autovetores de **A** associados aos autovalores $r_1, \ldots, r_n$ e forme a matriz de semelhança **T** cujas colunas são $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$. Então, definindo uma nova variável dependente **y** pela relação

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ty}, \quad (38)$$

temos, da Eq. (37),

$$\mathbf{Ty}' = \mathbf{ATy}. \quad (39)$$

Multiplicando por $\mathbf{T}^{-1}$, obtemos

$$\mathbf{y}' = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT})\mathbf{y}, \quad (40)$$

ou, usando a Eq. (32),

$$\mathbf{y}' = \mathbf{Dy}. \quad (41)$$

Lembre-se que **D** é a matriz diagonal cujos elementos diagonais são os autovalores $r_1, \ldots, r_n$ de **A**. Uma matriz fundamental para o sistema (41) é a matriz diagonal (veja o Problema 16)

$$\mathbf{Q}(t) = \exp(\mathbf{D}t) = \begin{pmatrix} e^{r_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{r_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{r_n t} \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Uma matriz fundamental $\boldsymbol{\Psi}$ para o sistema (37) é formada, então, de **Q** através da transformação

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{TQ}; \quad (43)$$

isto é,

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)}e^{r_1 t} & \cdots & \xi_1^{(n)}e^{r_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)}e^{r_1 t} & \cdots & \xi_n^{(n)}e^{r_n t} \end{pmatrix}. \quad (44)$$

A Eq. (44) confirma o resultado obtido na Seção 7.5. Esse processo de diagonalização não tem nenhuma vantagem computacional em relação ao método da Seção 7.5, já que, em qualquer caso, é preciso calcular os autovalores e autovetores da matriz de coeficientes no sistema de equações diferenciais. Apesar disso, vale a pena observar que o problema de desacoplar um sistema de equações diferenciais e o problema de diagonalizar uma matriz são, do ponto de vista matemático, iguais.

Exemplo 4

Considere, mais uma vez, o sistema de equações diferenciais

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{45}$$

onde $\mathbf{A}$ é dada pela Eq. (33). Usando a transformação $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$, onde $\mathbf{T}$ é dada pela Eq. (35), você pode reduzir o sistema (45) ao sistema diagonal

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{y}. \tag{46}$$

Obtenha uma matriz fundamental para o sistema (46) e depois transforme-o para obter uma matriz fundamental para o sistema original (45).

Multiplicando, repetidamente, $\mathbf{D}$ por si mesma, vemos que

$$\mathbf{D}^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^3 = \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ldots. \tag{47}$$

Portanto, segue da Eq. (23) que $\exp(\mathbf{D}t)$ é uma matriz diagonal com elementos diagonais e^{3t} e e^{-t}, isto é,

$$e^{\mathbf{D}t} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Finalmente, obtemos a matriz fundamental desejada $\mathbf{\Psi}(t)$ multiplicando $\mathbf{T}$ por $\exp(\mathbf{D}t)$:

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Note que essa matriz fundamental é a encontrada no Exemplo 1.

Problemas

Nos problemas de 1 a 10, encontre uma matriz fundamental para o sistema de equações dado. Em cada caso, encontre, também, a matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ que satisfaz $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$.

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$
2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$
3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$
4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$
5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$
6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$
7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$
8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$
9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$
10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$
11. Resolva o problema de valor inicial
$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
usando a matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ encontrada no Problema 3.
12. Resolva o problema de valor inicial
$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
usando a matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ encontrada no Problema 6.
13. Mostre que $\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)$, onde $\mathbf{\Phi}(t)$ e $\mathbf{\Psi}(t)$ são como definidas nesta seção.
14. A matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ para o sistema (3) foi encontrada no Exemplo 2. Mostre que $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(s) = \mathbf{\Phi}(t + s)$ multiplicando $\mathbf{\Phi}(t)$ e $\mathbf{\Phi}(s)$.
15. Seja $\mathbf{\Phi}(t)$ a matriz fundamental satisfazendo $\mathbf{\Phi}' = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$. No texto, denotamos essa matriz também por $\exp(\mathbf{A}t)$. Neste problema vamos mostrar que $\mathbf{\Phi}$ tem, de fato, as propriedades algébricas principais associadas à função exponencial.
(a) Mostre que $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(s) = \mathbf{\Phi}(t + s)$, isto é, mostre que $\exp(\mathbf{A}t)\exp(\mathbf{A}s) = \exp[\mathbf{A}(t + s)]$.
Sugestão: Mostre que, se s é fixo e t variável, então ambas $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(s)$ e $\mathbf{\Phi}(t + s)$ satisfazem o problema de valor inicial $\mathbf{Z}' = \mathbf{A}\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{\Phi}(s)$.
(b) Mostre que $\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(-t) = \mathbf{I}$, isto é, $\exp(\mathbf{A}t)\exp[\mathbf{A}(-t)] = \mathbf{I}$. Depois, mostre que $\mathbf{\Phi}(-t) = \mathbf{\Phi}^{-1}(t)$.
(c) Mostre que $\mathbf{\Phi}(t - s) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(s)$.
16. Mostre que, se $\mathbf{A}$ é uma matriz diagonal com elementos diagonais $a_1, \ldots, a_n$, então $\exp(\mathbf{A}t)$ é também uma matriz diagonal com elementos diagonais $\exp(a_1t), \ldots, \exp(a_nt)$.
17. Considere um oscilador satisfazendo o problema de valor inicial
$$u'' + \omega^2 u = 0, \qquad u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0. \tag{i}$$
(a) Sejam $x_1 = u$, $x_2 = u'$ e escreva as Eqs. (i) na forma
$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0. \tag{ii}$$
(b) Usando a série (23), mostre que
$$\exp \mathbf{A}t = \mathbf{I}\cos\omega t + \mathbf{A}\frac{\operatorname{sen}\omega t}{\omega}. \tag{iii}$$
(c) Encontre a solução do problema de valor inicial (ii).
18. O método de aproximações sucessivas (veja a Seção 2.8) também pode ser aplicado a sistemas de equações. Por exemplo, considere o problema de valor inicial
$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \tag{i}$$
onde $\mathbf{A}$ é uma matriz constante e $\mathbf{x}^0$ um vetor dado.
(a) Suponha que existe uma solução $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ e mostre que ela tem que satisfazer a equação integral
$$\boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{x}^0 + \int_0^t \mathbf{A}\boldsymbol{\phi}(s)\, ds. \tag{ii}$$
(b) Comece com a aproximação inicial $\boldsymbol{\phi}^{(0)}(t) = \mathbf{x}^0$. Substitua $\boldsymbol{\phi}(s)$ no lado direito da Eq. (ii) por essa expressão e obtenha

uma nova aproximação $\phi^{(1)}(t)$. Mostre que

$$\phi^{(1)}(t) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t)\mathbf{x}^0. \quad \text{(iii)}$$

(c) Repita esse processo obtendo, assim, uma seqüência de aproximações $\phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \ldots, \phi^{(n)}, \ldots$. Use um argumento indutivo para mostrar que

$$\phi^{(n)}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + \mathbf{A}^n\frac{t^n}{n!}\right)\mathbf{x}^0. \quad \text{(iv)}$$

(d) Faça $n \to \infty$ e mostre que a solução do problema de valor inicial (i) é

$$\phi(t) = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}^0. \quad \text{(v)}$$

7.8 Autovalores Repetidos

Concluiremos nossa discussão do sistema linear homogêneo com coeficientes constantes

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1)$$

considerando o caso em que a matriz $\mathbf{A}$ tem autovalores repetidos. Lembre-se de que observamos, na Seção 7.3, que um autovalor repetido com multiplicidade algébrica $k \geq 2$ pode ter multiplicidade geométrica menor do que k. Em outras palavras, podem existir menos do que k autovetores linearmente independentes associados a esse autovalor. O exemplo a seguir ilustra essa possibilidade.

Exemplo 1

Encontre os autovalores e autovetores da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Os autovalores r e os autovetores $\boldsymbol{\xi}$ satisfazem a equação $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, ou

$$\begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Os autovalores são as raízes da equação

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = r^2 - 4r + 4 = 0. \quad (4)$$

Logo, os dois autovalores são $r_1 = 2$ e $r_2 = 2$, isto é, o autovalor 2 tem multiplicidade algébrica 2.

Para determinar os autovetores associados, precisamos voltar para a Eq. (3) e usar o valor 2 para r. Isso nos dá

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Obtemos, portanto, uma única condição $\xi_1 + \xi_2 = 0$, o que determina ξ_2 em função de ξ_1, ou vice-versa. Então, um autovetor associado ao autovalor $r = 2$ é

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

ou qualquer múltiplo não-nulo desse vetor. Note que existe apenas um autovetor linearmente independente associado a esse autovalor duplo.

Voltando para o sistema (1), suponha que $r = \rho$ é uma raiz de multiplicidade k da equação

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0. \quad (7)$$

Então ρ é um autovalor de multiplicidade algébrica k da matriz $\mathbf{A}$. Nesse caso, existem duas possibilidades: ou existem k vetores linearmente independentes associados ao autovalor ρ ou existem menos do que k desses vetores.

No primeiro caso, sejam $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(k)}$ os k autovetores linearmente independentes associados ao autovalor ρ de multiplicidade algébrica k. Então, $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{\rho t}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(k)}e^{\rho t}$ são k soluções linearmente independentes da Eq. (1). Assim, nesse caso, não faz diferença que o autovalor $r = \rho$ seja repetido: ainda existe um conjunto fundamental de soluções da Eq. (1) da forma $\boldsymbol{\xi}e^{rt}$. Esse caso sempre ocorre se a matriz de coeficientes for auto-adjunta.

No entanto, se a matriz de coeficientes não for auto-adjunta, então podem existir menos do que k vetores linearmente independentes associados ao autovalor ρ de multiplicidade algébrica k e, se for esse o caso, haverá menos que k soluções da Eq. (1) da forma $\boldsymbol{\xi}e^{\rho t}$ associadas a esse autovalor. Portanto, para construir a solução geral da Eq. (1), é preciso encontrar outras soluções de forma diferente. Por analogia com resultados anteriores para equações lineares de ordem n, é natural procurar outras soluções envolvendo produtos de funções polinomiais e exponenciais. Vamos primeiro considerar um exemplo.

Exemplo 2

Encontre um conjunto fundamental de soluções para

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x} \quad (8)$$

e desenhe um retrato de fase para esse sistema.

A Fig. 7.8.1 mostra um campo de direções para o sistema (8). Nessa figura, parece que todas as soluções não-nulas se afastam da origem.

Para resolver esse sistema, note que a matriz de coeficientes é igual à matriz no Exemplo 1. Sabemos, então, que $r = 2$ é um autovalor duplo que tem um único autovetor correspondente linearmente independente, que podemos escolher como $\boldsymbol{\xi}^T = (1, -1)$. Logo, uma solução do sistema (8) é

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t}, \quad (9)$$

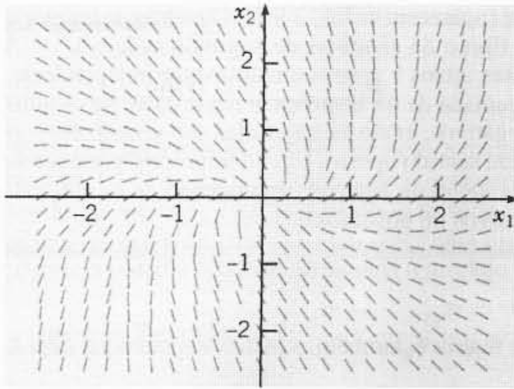


FIG. 7.8.1 Um campo de direções para o sistema (8).

mas não existe uma segunda solução da forma $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$.

Baseado no procedimento usado para equações lineares de segunda ordem na Seção 3.5, parece natural tentar encontrar uma segunda solução do sistema (8) da forma

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} t e^{2t}, \tag{10}$$

onde $\boldsymbol{\xi}$ é um vetor constante a ser determinado. Substituindo $\mathbf{x}$ na Eq. (8), obtemos

$$2\boldsymbol{\xi} t e^{2t} + \boldsymbol{\xi} e^{2t} - \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} t e^{2t} = \mathbf{0}. \tag{11}$$

Para que a Eq. (11) seja satisfeita para todo t, é necessário que ambos os coeficientes de te^{2t} e de e^{2t} sejam nulos. Igualando a zero o coeficiente de e^{2t}, vemos que

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}. \tag{12}$$

Logo, não existe solução não-nula do sistema (8) da forma (10).

Como a Eq. (11) contém termos em te^{2t} e e^{2t}, parece que, além de $\boldsymbol{\xi} te^{2t}$, a segunda solução tem de conter, também, um termo da forma $\boldsymbol{\eta} e^{2t}$; em outras palavras, precisamos supor que

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} t e^{2t} + \boldsymbol{\eta} e^{2t}, \tag{13}$$

onde $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$ são vetores constantes. Substituindo $\mathbf{x}$ na Eq. (8) por essa expressão, obtemos

$$2\boldsymbol{\xi} t e^{2t} + (\boldsymbol{\xi} + 2\boldsymbol{\eta}) e^{2t} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi} t e^{2t} + \boldsymbol{\eta} e^{2t}). \tag{14}$$

Igualando os coeficientes de te^{2t} e de e^{2t} de cada lado da Eq. (14), encontramos as condições

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \tag{15}$$

e

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} \tag{16}$$

para $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$. A Eq. (15) será satisfeita se $\boldsymbol{\xi}$ for um autovetor de $\mathbf{A}$ associado ao autovalor $r = 2$, isto é, $\boldsymbol{\xi}^T = (1, -1)$. Como det($\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$) é nulo, poderíamos esperar que a Eq. (16) não tivesse solução. No entanto, isso não é necessariamente verdade, já que, para alguns vetores $\boldsymbol{\xi}$, é possível resolver a Eq. (16). De fato, a matriz aumentada para a Eq. (16) é

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

A segunda linha dessa matriz é proporcional à primeira, de modo que o sistema é solúvel. Temos

$$-\eta_1 - \eta_2 = 1,$$

de modo que, se $\eta_1 = k$, onde k é arbitrário, então $\eta_2 = -k - 1$. Se escrevermos

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} k \\ -1-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

então, substituindo $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$ na Eq. (13), obtemos

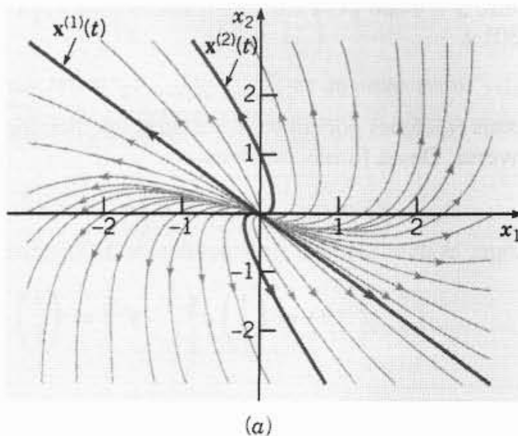
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}. \tag{18}$$

O último termo na Eq. (18) é, simplesmente, um múltiplo da primeira solução $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ e pode ser ignorado, mas os dois primeiros termos constituem uma nova solução:

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}. \tag{19}$$

Um cálculo elementar mostra que $W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}](t) = -e^{4t}$ e, portanto, $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ formam um conjunto fundamental de soluções para o sistema (8). A solução geral é

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) \\ &= c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}\right]. \end{aligned} \tag{20}$$



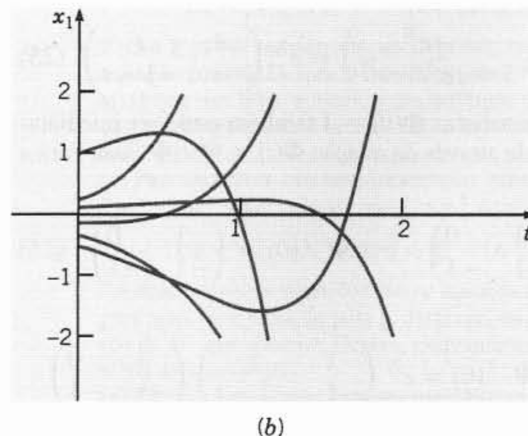


FIG. 7.8.2 (*a*) Trajetórias do sistema (8); a origem é um nó impróprio. (*b*) Gráficos de x_1 em função de t para o sistema (8).

O gráfico da solução (20) é um pouco mais difícil de analisar do que em alguns dos exemplos anteriores. É claro que **x** se torna ilimitada quando $t \to \infty$ e que $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ quando $t \to -\infty$. É possível mostrar que, quando $t \to -\infty$, todas as soluções se aproximam da origem tangentes à reta $x_2 = -x_1$ determinada pelo autovetor. Analogamente, quando $t \to \infty$, cada trajetória é assintótica a uma reta com coeficiente angular -1. As trajetórias do sistema (8) aparecem na Fig. 7.8.2*a*, e alguns gráficos típicos de x_1 em função de t aparecem na Fig. 7.8.2*b*. O padrão de trajetórias nessa figura é típico de sistemas de segunda ordem $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ com autovalores iguais e apenas um autovetor independente. A origem é chamada de **nó impróprio** nesse caso. Se os autovalores forem negativos, então as trajetórias são semelhantes, mas orientadas em sentido oposto. Um nó impróprio pode ser assintoticamente estável ou instável, dependendo de os autovalores serem negativos ou positivos.

Uma diferença entre um sistema de duas equações de primeira ordem e uma única equação de segunda ordem é evidente no exemplo precedente. Lembre-se de que, para uma equação linear de segunda ordem cuja equação característica tem uma raiz repetida r_1, não é necessário um termo da forma $ce^{r_1 t}$ na segunda solução, já que isso é um múltiplo da primeira solução. Por outro lado, para um sistema com duas equações de primeira ordem, o termo $\boldsymbol{\eta}e^{r_1 t}$ da Eq. (13) com $r_1 = 2$ não é um múltiplo da primeira solução $\boldsymbol{\xi}e^{r_1 t}$, de modo que o termo $\boldsymbol{\eta}e^{r_1 t}$ precisa ser mantido.

O Exemplo 2 é típico do caso geral quando existe um autovalor duplo e um único autovetor associado independente. Considere, novamente, o sistema (1) e suponha que $r = \rho$ é um autovalor duplo de **A**, mas que existe apenas um autovetor associado independente $\boldsymbol{\xi}$. Então uma solução [semelhante à Eq. (9)] é

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}e^{\rho t}, \qquad (21)$$

onde $\boldsymbol{\xi}$ satisfaz

$$(\mathbf{A} - \rho\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}. \qquad (22)$$

Procedendo como no Exemplo 2, vemos que uma segunda solução [semelhante à Eq. (19)] é

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \boldsymbol{\xi}te^{\rho t} + \boldsymbol{\eta}e^{\rho t}, \qquad (23)$$

onde $\boldsymbol{\xi}$ satisfaz as Eqs. (22) e $\boldsymbol{\eta}$ é determinado de

$$(\mathbf{A} - \rho\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}. \qquad (24)$$

Embora $\det(\mathbf{A} - \rho\mathbf{I}) = 0$, pode-se mostrar que é sempre possível resolver a Eq. (24) para $\boldsymbol{\eta}$. O vetor $\boldsymbol{\eta}$ é chamado de **autovetor generalizado** associado ao autovalor ρ.

Matrizes Fundamentais. Como explicado na Seção 7.7, matrizes fundamentais são formadas colocando-se soluções linearmente independentes em colunas. Assim, por exemplo, pode-se formar uma matriz fundamental para o sistema (8) usando-se as soluções $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ e $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ dadas nas Eqs. (9) e (19), respectivamente:

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & -te^{2t} - e^{2t} \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & -1-t \end{pmatrix}. \qquad (25)$$

A matriz $\boldsymbol{\Phi}$ que satisfaz $\boldsymbol{\Phi}(0) = \mathbf{I}$ também pode ser imediatamente encontrada através da relação $\boldsymbol{\Phi}(t) = \boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(0)$. Para a Eq. (8), temos

$$\boldsymbol{\Psi}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Psi}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (26)$$

e, portanto,

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(0) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & -1-t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= e^{2t}\begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}. \qquad (27)$$

A última matriz é, também, a matriz exponencial $\exp(\mathbf{A}t)$.

Formas de Jordan. Como vimos na Seção 7.7, uma matriz **A** $n \times n$ só pode ser diagonalizada se tiver um conjunto completo de n autovetores linearmente independentes. Se existem menos autovetores (devido a autovalores repetidos), então **A** sempre pode ser transformada em uma matriz quase diagonal, denominada de sua forma canônica de Jordan,[8] que tem os autovalores de **A** em sua diagonal, um em determinadas posições acima da diagonal principal e zeros em todos os outros lugares.

Considere, novamente, a matriz **A** dada pela Eq. (2). Forme a matriz de semelhança **T** com o único autovetor $\boldsymbol{\xi}$ dado pela Eq. (6) em sua primeira coluna e com o autovetor generalizado $\boldsymbol{\eta}$ dado pela Eq. (17) com $k = 0$ na segunda coluna. Então, **T** e sua inversa são dados por

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (28)$$

Como você pode verificar, segue que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{J}. \qquad (29)$$

A matriz **J** na Eq. (29) é a forma canônica de Jordan de **A**. Ela é típica de todas as formas de Jordan por ter um 1 acima da diagonal principal na coluna correspondente ao autovetor que está faltando (e é substituído em **T** pelo autovetor generalizado).

Se começarmos de novo da Eq. (1),

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax},$$

a transformação $\mathbf{x} = \mathbf{Ty}$, onde **T** é dado pela Eq. (28), produz o sistema

$$\mathbf{y}' = \mathbf{Jy}, \qquad (30)$$

onde **J** é dado pela Eq. (29). Em forma escalar, o sistema (30) é

$$y_1' = 2y_1 + y_2, \quad y_2' = 2y_2. \qquad (31)$$

Essas equações podem ser resolvidas imediatamente em ordem inversa. Dessa forma, obtemos

$$y_2 = c_1e^{2t}, \quad y_1 = c_1te^{2t} + c_2e^{2t}. \qquad (32)$$

Logo, as duas soluções independentes do sistema (30) são

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t}, \quad \mathbf{y}^{(2)} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t} \qquad (33)$$

[8]Camille Jordan (1838-1921), professor da École Polytechnique e do Collège de France, fez contribuições importantes à analise, à topologia e, especialmente, à álgebra. A forma de Jordan de uma matriz apareceu em seu livro influente, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, publicado em 1870.

e a matriz fundamental correspondente é

$$\widehat{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Como $\hat{\Psi}(0) = \mathbf{I}$, podemos identificar, também, a matriz na Eq. (34) como $\exp(\mathbf{J}t)$. O mesmo resultado pode ser encontrado calculando-se as potências de $\mathbf{J}$ e substituindo-as na série exponencial (veja os problemas de 19 a 21). Para obter uma matriz fundamental para o sistema original, formamos o produto

$$\Psi(t) = \mathbf{T}\exp(\mathbf{J}t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & -e^{2t} - te^{2t} \end{pmatrix}, \quad (35)$$

que é igual à matriz fundamental dada na Eq. (25).

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, encontre a solução geral do sistema dado. Em cada um dos problemas de 1 a 4, desenhe, também, um campo de direções, esboce algumas trajetórias e descreva como as soluções se comportam quando $t \to \infty$.

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\mathbf{x}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Nos problemas de 7 a 10, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Desenhe a trajetória da solução no plano x_1x_2 e desenhe, também, o gráfico de x_1 em função de t.

7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Nos Problemas 11 e 12, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Desenhe a trajetória correspondente no espaço $x_1x_2x_3$ e desenhe, também, o gráfico de x_1 em função de t.

11. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -30 \end{pmatrix}$

12. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Nos Problemas 13 e 14, resolva o sistema de equações dado pelo método do Problema 19 da Seção 7.5. Suponha que $t > 0$.

13. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

14. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

15. Mostre que todas as soluções do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\mathbf{x}$$

tendem a zero quando $t \to \infty$ se, e somente se, $a + d < 0$ e $ad - bc > 0$. Compare esse resultado com o do Problema 38 na Seção 3.5.

16. Considere, novamente, o circuito elétrico no Problema 26 da Seção 7.6. Esse circuito é descrito pelo sistema de equações diferenciais

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}.$$

(a) Mostre que os autovalores são reais e iguais se $L = 4R^2C$.
(b) Suponha que $R = 1$ ohm, $C = 1$ farad e $L = 4$ henrys. Suponha, também, que $I(0) = 1$ ampère e $V(0) = 2$ volts. Encontre $I(t)$ e $V(t)$.

Autovalores de Multiplicidade 3. Se a matriz $\mathbf{A}$ tem um autovalor de multiplicidade 3, então podem existir um, dois ou três autovetores correspondentes linearmente independentes. A solução geral do sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ é diferente, dependendo do número de autovetores independentes associados ao autovalor triplo. Como observado no texto, não há dificuldade se existem três autovetores, já que, nesse caso, existem três soluções independentes da forma $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$. Os dois problemas a seguir ilustram o procedimento para se encontrar a solução no caso de um autovalor triplo com um ou dois autovetores independentes, respectivamente.

17. Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \quad \text{(i)}$$

(a) Mostre que $r = 2$ é um autovalor de multiplicidade algébrica 3 da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ e que existe apenas um autovetor associado independente, a saber,

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Usando a informação do item (a), escreva uma solução $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ do sistema (i). Não existe outra solução da forma puramente exponencial $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$.
(c) Para encontrar uma segunda solução, suponha que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}te^{2t} + \boldsymbol{\eta}e^{2t}$. Mostre que $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$ satisfazem as equações

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}, \qquad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}.$$

Como $\boldsymbol{\xi}$ já foi encontrado no item (a), resolva a segunda equação para $\boldsymbol{\eta}$. Despreze o múltiplo de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ que aparece em $\boldsymbol{\eta}$, já que nos leva, apenas, a um múltiplo da primeira solução $\mathbf{x}^{(1)}$. Depois, escreva uma segunda solução $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ do sistema (i).
(d) Para encontrar uma terceira solução, suponha que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}(t^2/2)e^{2t} + \boldsymbol{\eta}te^{2t} + \boldsymbol{\zeta}e^{2t}$. Mostre que $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\zeta}$ satisfazem as equações

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}, \quad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\eta}.$$

As duas primeiras equações são as mesmas do item (c), logo, para resolver a equação para $\boldsymbol{\zeta}$, despreze, novamente, o múltiplo de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ que aparece. Depois, escreva uma terceira solução $\mathbf{x}^{(3)}(t)$ do sistema (i).
(e) Escreva uma matriz fundamental $\Psi(t)$ para o sistema (i).
(f) Forme a matriz $\mathbf{T}$ com o autovetor $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ na primeira coluna e os autovetores generalizados $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\zeta}$ nas segunda e terceira colunas. Depois, encontre $\mathbf{T}^{-1}$ e forme o produto $\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$. A matriz $\mathbf{J}$ é a forma canônica de Jordan de $\mathbf{A}$.

18. Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \qquad \text{(i)}$$

(a) Mostre que $r = 1$ é um autovetor triplo da matriz de coeficientes **A** e que existem dois autovetores associados linearmente independentes, que podemos escolher como

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}. \qquad \text{(ii)}$$

Encontre duas soluções linearmente independentes $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ e $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ da Eq. (i).

(b) Para encontrar uma terceira solução, suponha que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} te^t + \boldsymbol{\eta} e^t$; mostre que, então, $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$ têm de satisfazer

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}, \qquad \text{(iii)}$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}. \qquad \text{(iv)}$$

(c) Mostre que $\boldsymbol{\xi} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, é a solução mais geral da Eq. (iii). Mostre que, para resolver a Eq. (iv), é necessário que $c_1 = c_2$.

(d) É conveniente escolher $c_1 = c_2 = 2$. Para essa escolha, mostre que

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(v)}$$

onde retiramos os múltiplos de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ que aparecem em $\boldsymbol{\eta}$. Use os resultados dados nas Eqs. (v) para encontrar uma terceira solução linearmente independente $\mathbf{x}^{(3)}(t)$ da Eq. (i).

(e) Escreva uma matriz fundamental $\boldsymbol{\Psi}(t)$ para o sistema (i).

(f) Forme a matriz **T** com o autovetor $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ na primeira coluna e com o autovetor $\boldsymbol{\xi}$ e o autovetor generalizado $\boldsymbol{\eta}$, dados pelas Eqs. (v), nas duas últimas colunas. Encontre $\mathbf{T}^{-1}$ e forme o produto $\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$. A matriz **J** é a forma canônica de Jordan de **A**.

19. Seja $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, onde λ é um número real arbitrário.

(a) Encontre $\mathbf{J}^2$, $\mathbf{J}^3$ e $\mathbf{J}^4$.

(b) Use um argumento por indução para mostrar que $\mathbf{J}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$

(c) Determine $\exp(\mathbf{J}t)$.

(d) Use $\exp(\mathbf{J}t)$ para resolver o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{Jx}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$.

20. Seja

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

onde λ é um número real arbitrário.

(a) Encontre $\mathbf{J}^2$, $\mathbf{J}^3$ e $\mathbf{J}^4$.

(b) Use um argumento indutivo para mostrar que

$$\mathbf{J}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

(c) Determine $\exp(\mathbf{J}t)$.

(d) Observe que, se você escolher $\lambda = 1$, então a matriz **J** nesse problema é igual à matriz **J** no Problema 18(f). Usando a matriz **T** do Problema 18(f), forme o produto $\mathbf{T}\exp(\mathbf{J}t)$ com $\lambda = 1$. A matriz resultante é a mesma que a matriz fundamental $\boldsymbol{\Psi}(t)$ no Problema 18(e)? Se não for, explique a discrepância.

21. Seja

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

onde λ é um número real arbitrário.

(a) Encontre $\mathbf{J}^2$, $\mathbf{J}^3$ e $\mathbf{J}^4$.

(b) Use um argumento indutivo para mostrar que

$$\mathbf{J}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & [n(n-1)/2]\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

(c) Determine $\exp(\mathbf{J}t)$.

(d) Observe que, se você escolher $\lambda = 2$, então a matriz **J** neste problema é igual à matriz **J** no Problema 17(f). Usando a matriz **T** do Problema 17(f), forme o produto $\mathbf{T}\exp(\mathbf{J}t)$ com $\lambda = 2$. Observe que a matriz resultante é a mesma que a matriz fundamental $\boldsymbol{\Psi}(t)$ no Problema 17(e).

7.9 Sistemas Lineares Não-Homogêneos

Nesta seção, vamos considerar o sistema não-homogêneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \qquad (1)$$

onde a matriz $n \times n$ $\mathbf{P}(t)$ e o vetor $n \times 1$ $\mathbf{g}(t)$ são contínuos em $\alpha < t < \beta$. Pelo mesmo argumento usado na Seção 3.6 (veja, também, o Problema 16 nesta seção), a solução geral da Eq. (1) pode ser expressa na forma

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t) + \mathbf{v}(t), \qquad (2)$$

onde $c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \ldots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t)$ é a solução geral do sistema homogêneo $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ e $\mathbf{v}(t)$ é uma solução particular do sistema não-homogêneo (1). Vamos descrever, rapidamente, diversos métodos para se encontrar $\mathbf{v}(t)$.

Diagonalização. Começamos com um sistema da forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Ax} + \mathbf{g}(t), \qquad (3)$$

onde **A** é uma matriz $n \times n$ constante diagonalizável. Diagonalizando a matriz de coeficientes **A** como indicado na Seção 7.7, podemos transformar a Eq. (3) em um sistema de equações facilmente solúvel.

Seja **T** a matriz cujas colunas são os autovetores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ de **A** e defina uma variável dependente nova **y** por

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ty}. \qquad (4)$$

Então, substituindo **x** na Eq. (3) pela expressão acima, obtemos

$$\mathbf{Ty}' = \mathbf{ATy} + \mathbf{g}(t).$$

Multiplicando por $\mathbf{T}^{-1}$, segue que

$$\mathbf{y}' = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT})\mathbf{y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t) = \mathbf{Dy} + \mathbf{h}(t), \qquad (5)$$

onde $\mathbf{h}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t)$ e **D** é a matriz diagonal cujos elementos diagonais são os autovalores $r_1, \ldots, r_n$ de **A**, arrumados na mesma ordem que os autovetores correspondentes $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ que aparecem como colunas de **T**. A Eq. (5) é um sistema de n equações *desacopladas* para $y_1(t), \ldots, y_n(t)$; em conseqüência, as equações podem ser resolvidas separadamente. Em forma escalar, a Eq. (5) fica

$$y_j'(t) = r_j y_j(t) + h_j(t), \qquad j = 1, \ldots, n, \qquad (6)$$

onde $h_j(t)$ é uma determinada combinação linear de $g_1(t), \ldots, g_n(t)$.

A Eq. (6) é uma equação linear de primeira ordem e pode ser resolvida pelos métodos da Seção 2.1. De fato, temos

$$y_j(t) = e^{r_j t}\int_{t_0}^{t} e^{-r_j s}h_j(s)\,ds + c_j e^{r_j t}, \quad j = 1, \ldots, n, \quad (7)$$

onde os c_j são constantes arbitrárias. Finalmente, a solução $\mathbf{x}$ da Eq. (3) é obtida da Eq. (4). Ao ser multiplicado pela matriz de semelhança $\mathbf{T}$, o segundo termo do lado direito do sinal de igualdade na Eq. (7) fornece a solução geral da equação homogênea $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, enquanto o primeiro termo fornece uma solução particular da Eq. (3).

Exemplo 1

Encontre a solução geral do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \quad (8)$$

Procedendo como na Seção 7.5, vemos que os autovalores da matriz de coeficientes são $r_1 = -3$ e $r_2 = -1$, e os autovetores correspondentes são

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Logo, a solução geral da equação homogênea é

$$\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}. \quad (10)$$

Antes de escrever a matriz $\mathbf{T}$ de autovetores, lembre-se que vamos precisar encontrar $\mathbf{T}^{-1}$. A matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ é real e simétrica, logo podemos usar o resultado enunciado no final da Seção 7.3: $\mathbf{T}^{-1}$ é simplesmente a adjunta ou (como $\mathbf{T}$ é real) a transposta de $\mathbf{T}$, desde que os autovetores de $\mathbf{A}$ estejam normalizados de modo que $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}) = 1$. Portanto, normalizando $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, temos

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Fazendo $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$ e substituindo na Eq. (8), obtemos o seguinte sistema de equações para a variável dependente nova $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{y} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2e^{-t} - 3t \\ 2e^{-t} + 3t \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_1' + 3y_1 &= \sqrt{2}e^{-t} - \frac{3}{\sqrt{2}}t, \\ y_2' + y_2 &= \sqrt{2}e^{-t} + \frac{3}{\sqrt{2}}t. \end{aligned} \quad (13)$$

Cada uma das Eqs. (13) é uma equação linear de primeira ordem e, portanto, pode ser resolvida pelos métodos da Seção 2.1. Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t} - \frac{3}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{t}{3}\right) - \frac{1}{9}\right] + c_1 e^{-3t}, \\ y_2 &= \sqrt{2}te^{-t} + \frac{3}{\sqrt{2}}(t-1) + c_2 e^{-t}. \end{aligned} \quad (14)$$

Finalmente, escrevemos a solução em função das variáveis originais:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (c_1/\sqrt{2})e^{-3t} + [(c_2/\sqrt{2}) + \frac{1}{2}]e^{-t} + t - \frac{4}{3} + te^{-t} \\ -(c_1/\sqrt{2})e^{-3t} + [(c_2/\sqrt{2}) - \frac{1}{2}]e^{-t} + 2t - \frac{5}{3} + te^{-t} \end{pmatrix} \\ &= k_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^{-t} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (15)$$

onde $k_1 = c_1/\sqrt{2}$ e $k_2 = c_2/\sqrt{2}$. Os dois primeiros termos à direita do sinal de igualdade na Eq. (15) formam a solução geral do sistema homogêneo correspondente à Eq. (8). Os termos restantes formam uma solução particular do sistema não-homogêneo.

Se a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ na Eq. (3) não for diagonalizável (por causa de autovalores repetidos e falta de autovetores), pode, de qualquer jeito, ser reduzida à sua forma canônica de Jordan $\mathbf{J}$ através de uma matriz de semelhança apropriada $\mathbf{T}$, envolvendo tanto autovetores quanto autovetores generalizados. Nesse caso, a equação diferencial para $y_1, \ldots, y_n$ não é totalmente desacoplada, já que algumas linhas de $\mathbf{J}$ têm dois elementos não-nulos, um autovalor na posição diagonal e um 1 na posição adjacente à direita. No entanto, as equações para $y_1, \ldots, y_n$ ainda podem ser resolvidas consecutivamente, começando com y_n. Então, a solução do sistema original (3) pode ser encontrada pela relação $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$.

Coeficientes Indeterminados. Uma segunda maneira de se encontrar uma solução particular do sistema não-homogêneo (1) é o método dos coeficientes indeterminados. Para usar esse método, supomos que a solução tem determinada forma com alguns ou todos os coeficientes indeterminados e depois procuramos esses coeficientes de modo a satisfazer a equação diferencial. Do ponto de vista prático, esse método só é aplicável se a matriz de coeficientes $\mathbf{P}$ for constante e se as componentes de $\mathbf{g}$ forem funções polinomiais, exponenciais, senoidais ou produtos dessas funções. Nesse caso, a forma correta da solução pode ser prevista de maneira simples e sistemática. O procedimento para escolher a forma da solução é, essencialmente, o mesmo que o dado na Seção 3.6 para equações lineares de segunda ordem. A principal diferença é ilustrada pelo caso de um termo não-homogêneo da forma $\mathbf{u}e^{\lambda t}$, onde λ é uma raiz simples da equação característica. Nessa situação, em vez de supor uma solução da forma $\mathbf{a}te^{\lambda t}$, é preciso usar $\mathbf{a}te^{\lambda t} + \mathbf{b}e^{\lambda t}$, onde $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são determinados substituindo-se a expressão na equação diferencial.

Exemplo 2

Use o método dos coeficientes indeterminados para encontrar uma solução particular de

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \quad (16)$$

Esse é o mesmo sistema de equações que no Exemplo 1. Para usar o método dos coeficientes a determinar, escrevemos $\mathbf{g}(t)$ na forma

$$\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} t. \quad (17)$$

Vamos supor, então, que

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}(t) = \mathbf{a}te^{-t} + \mathbf{b}e^{-t} + \mathbf{c}t + \mathbf{d}, \quad (18)$$

onde **a**, **b**, **c** e **d** são vetores a serem determinados. Note que $r = -1$ é um autovalor da matriz de coeficientes e, portanto, temos que incluir tanto $\mathbf{a}te^{-t}$ quanto $\mathbf{b}e^{-t}$ na solução proposta. Substituindo a Eq. (18) na Eq. (16) e juntando os termos, obtemos as seguintes equações algébricas para **a**, **b**, **c** e **d**:

$$\mathbf{A}\mathbf{a} = -\mathbf{a},$$

$$\mathbf{A}\mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{c}.$$

Da primeira das Eqs. (19), vemos que **a** é um autovetor de **A** correspondendo ao autovalor $r = -1$. Logo, $\mathbf{a}^T = (\alpha, \alpha)$, onde α é qualquer constante diferente de zero. Note que a segunda das Eqs. (19) só pode ser resolvida se $\alpha = 1$ e, nesse caso, temos

$$\mathbf{b} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

para qualquer constante k. A escolha mais simples é $k = 0$, donde $\mathbf{b}^T = (0, -1)$. As terceira e quarta equações em (19) fornecem, então, $\mathbf{c}^T = (1, 2)$ e $\mathbf{d}^T = (-4/3, -5/3)$, respectivamente. Finalmente, da Eq. (18), obtemos a solução particular

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

A solução particular (21) não é idêntica à contida na Eq. (15) do Exemplo 1 porque o termo contendo e^{-t} é diferente. No entanto, se escolhermos $k = 1/2$ na Eq. (20), teremos $\mathbf{b}^T = (1/2, -1/2)$ e as duas soluções particulares ficarão idênticas.

Variação dos Parâmetros. Vamos considerar, agora, problemas mais gerais onde a matriz de coeficientes não é constante ou não é diagonalizável. Seja

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad (22)$$

onde $\mathbf{P}(t)$ e $\mathbf{g}(t)$ são contínuas em $\alpha < t < \beta$. Suponha que já foi encontrada uma matriz fundamental $\mathbf{\Psi}(t)$ para o sistema homogêneo correspondente

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \quad (23)$$

Vamos usar o método de variação dos parâmetros para construir uma solução particular e, portanto, a solução geral, do sistema não-homogêneo (22).

Como a solução geral do sistema homogêneo (23) é $\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c}$, é natural proceder como na Seção 3.7 e buscar uma solução do sistema não-homogêneo (22) substituindo-se o vetor constante **c** por uma função vetorial $\mathbf{u}(t)$. Assim, supomos que

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t), \quad (24)$$

onde $\mathbf{u}(t)$ é um vetor a ser encontrado. Diferenciando **x** dado pela Eq. (24) e impondo a Eq. (22), obtemos

$$\mathbf{\Psi}'(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(t). \quad (25)$$

Como $\mathbf{\Psi}(t)$ é uma matriz fundamental, $\mathbf{\Psi}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{\Psi}(t)$; logo, a Eq. (25) se reduz a

$$\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t). \quad (26)$$

Lembre-se que $\mathbf{\Psi}(t)$ é invertível em qualquer intervalo onde **P** é contínua. Então, $\mathbf{\Psi}^{-1}(t)$ existe e temos

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{g}(t). \quad (27)$$

Logo, podemos selecionar como $\mathbf{u}(t)$ qualquer vetor na classe de vetores que satisfazem a Eq. (27); esses vetores estão determinados a menos de uma constante (vetorial) aditiva; portanto denotamos $\mathbf{u}(t)$ por

$$\mathbf{u}(t) = \int \mathbf{\Psi}^{-1}(t)\mathbf{g}(t)\,dt + \mathbf{c}, \quad (28)$$

onde o vetor constante **c** é arbitrário. Se as integrais na Eq. (28) puderem ser calculadas, então a solução geral do sistema (22) é encontrada substituindo-se $\mathbf{u}(t)$ da Eq. (28) na Eq. (24). No entanto, mesmo que as integrais não possam ser calculadas, ainda podemos escrever a solução geral da Eq. (22) na forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c} + \mathbf{\Psi}(t)\int_{t_1}^{t} \mathbf{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds, \quad (29)$$

onde t_1 é qualquer ponto no intervalo (α, β). Observe que a primeira parcela à direita do sinal de integral na Eq. (29) é a solução geral do sistema homogêneo associado (23) e a segunda parcela é uma solução particular de (22).

Vamos considerar, agora, o problema de valor inicial consistindo na equação diferencial (22) e na condição inicial

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0. \quad (30)$$

Podemos encontrar a solução desse problema de maneira conveniente se escolhermos o limite inferior de integração na Eq. (29) como sendo o ponto inicial t_0. Então, a solução geral da equação diferencial fica na forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{c} + \mathbf{\Psi}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds. \quad (31)$$

Para $t = t_0$ a integral na Eq. (31) é nula, logo a condição inicial (30) pode também ser satisfeita se escolhermos

$$\mathbf{c} = \mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0. \quad (32)$$

Portanto,

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0 + \mathbf{\Psi}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Psi}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds \quad (33)$$

é a solução do problema de valor inicial dado. Mais uma vez, embora seja útil usar $\mathbf{\Psi}^{-1}$ para escrever as soluções (29) e (33), em geral é melhor, em casos particulares, resolver as equações necessárias por redução de linhas em vez de calcular $\mathbf{\Psi}^{-1}$ e substituir nas Eqs. (29) e (33).

A solução (33) fica em uma forma ligeiramente mais simples se usarmos a matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ que satisfaz $\mathbf{\Phi}(t_0) = \mathbf{I}$. Nesse caso, temos

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}^0 + \mathbf{\Phi}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{g}(s)\,ds. \quad (34)$$

A Eq. (34) pode ser ainda mais simplificada se a matriz de coeficientes $\mathbf{P}(t)$ for constante (veja o Problema 17).

Exemplo 3

Use o método de variação dos parâmetros para encontrar a solução geral do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \quad (35)$$

Esse é o mesmo sistema de equações dos Exemplos 1 e 2.

A solução geral do sistema homogêneo correspondente foi dada na Eq. (10). Assim,

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix} \quad (36)$$

é uma matriz fundamental. Então, a solução $\mathbf{x}$ da Eq. (35) é dada por $\mathbf{x} = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t)$, onde $\mathbf{u}(t)$ satisfaz $\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t)$, ou

$$\begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Resolvendo a Eq. (37) por redução de linhas, obtemos

$$u_1' = e^{2t} - \tfrac{3}{2}te^{3t},$$
$$u_2' = 1 + \tfrac{3}{2}te^{t}.$$

Logo,

$$u_1(t) = \tfrac{1}{2}e^{2t} - \tfrac{1}{2}te^{3t} + \tfrac{1}{6}e^{3t} + c_1,$$
$$u_2(t) = t + \tfrac{3}{2}te^{t} - \tfrac{3}{2}e^{t} + c_2,$$

e

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{u}(t)$$
$$= c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^{-t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t}$$
$$+ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

que é a mesma solução obtida anteriormente.

Transformadas de Laplace. Usamos a transformada de Laplace no Cap. 6 para resolver equações lineares de ordem arbitrária. Ela também pode ser usada praticamente da mesma maneira para resolver sistemas de equações. Como a transformada é uma integral, a transformada de um vetor é calculada componente a componente. Logo $\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\}$ é o vetor cujos componentes são as transformadas dos componentes respectivas de $\mathbf{x}(t)$ e analogamente para $\mathcal{L}\{\mathbf{x}'(t)\}$. Vamos denotar $\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\}$ por $\mathbf{X}(s)$. Então, por uma extensão do Teorema 6.2.1 para vetores, também temos

$$\mathcal{L}\{\mathbf{x}'(t)\} = s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0). \quad (39)$$

Exemplo 4

Use o método da transformada de Laplace para resolver o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \quad (40)$$

Esse é o mesmo sistema de equações que nos Exemplos de 1 a 3.

Vamos calcular a transformada de Laplace de cada termo na Eq. (40), obtendo

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{G}(s), \quad (41)$$

onde $\mathbf{G}(s)$ é a transformada de $\mathbf{g}(t)$. A transformada $\mathbf{G}(s)$ é dada por

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} 2/(s+1) \\ 3/s^2 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Vamos simplificar os cálculos que faltam supondo que $\mathbf{x}(t)$ satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Então a Eq. (41) fica

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}(s), \quad (43)$$

onde, como de hábito, $\mathbf{I}$ é a matriz identidade. Em conseqüência, $\mathbf{X}(s)$ é dado por

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{G}(s). \quad (44)$$

A matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ é chamada de **matriz de transferência** porque a multiplicação dela pelo vetor de entrada $\mathbf{g}(t)$ fornece a transformada do vetor de saída $\mathbf{x}(t)$. Neste exemplo temos

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{pmatrix}, \quad (45)$$

e obtemos, por um cálculo direto,

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix}. \qquad (46)$$

Então, substituindo as Eqs. (42) e (46) na Eq. (440) e efetuando as multiplicações indicadas, encontramos

$$\mathbf{X}(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{2(s+2)}{(s+1)^2(s+3)} + \dfrac{3}{s^2(s+1)(s+3)} \\ \dfrac{2}{(s+1)^2(s+3)} + \dfrac{3(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)} \end{pmatrix}. \qquad (47)$$

Finalmente, precisamos obter a solução $\mathbf{x}(t)$ da sua transformada $\mathbf{X}(s)$. Isso pode ser feito espandindo-se as expressões na Eq. (47) em frações parciais e usando a Tabela 6.2.1, ou (mais eficientemente) usando um programa computacional apropriado. De qualquer modo, depois de algumas simplificações, o resultado é

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + $$

$$+ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}. \qquad (48)$$

A Eq. (48) fornece a solução particular do sistema (40) que satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Ela difere ligeiramente das soluções particulares obtidas nos três exemplos precedentes. Para obter a solução geral da Eq. (40), você precisa somar à expressão na Eq. (48) a solução (10) do sistema homogêneo associado à Eq. (40).

Cada um dos métodos para se resolver equações não-homogêneas tem vantagens e desvantagens. O método dos coeficientes indeterminados não precisa de integração, mas tem escopo limitado e pode levar a diversos conjuntos de equações algébricas. O método de diagonalização requer que se encontre a inversa da matriz de semelhança e a solução de um conjunto de equações lineares de primeira ordem desacopladas, seguida de uma multiplicação de matrizes. Sua principal vantagem é que, para matrizes de coeficiente auto-adjuntas, a inversa da matriz de semelhança pode ser encontrada sem cálculos — uma característica muito importante para sistemas grandes. O método de transformada de Laplace envolve o cálculo da inversa de uma matriz para se encontrar a matriz de transferência, seguido de uma multiplicação e, finalmente, da determinação da transformada inversa de cada termo na expressão resultante. Ele é particularmente útil em problemas com forçamentos que envolvem termos descontínuos ou impulsos. O método de variação dos parâmetros é o mais geral. Por outro lado, envolve a solução de um conjunto de equações lineares algébricas com coeficientes variáveis, seguido de uma integração e de uma multiplicação de matrizes, de modo que também é o mais complicado do ponto de vista computacional. Para muitos sistemas pequenos com coeficientes constantes, tais como os dos exemplos desta seção, todos esses métodos funcionam bem e pode ser praticamente irrelevante escolher um ou outro.

Problemas

Nos problemas de 1 a 12, encontre a solução geral do sistema de equações dados.

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$
2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ \sqrt{3}e^{-t} \end{pmatrix}$
3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$
4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^t \end{pmatrix}$
5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}, \qquad t > 0$
6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^{-1} \\ 2t^{-1} + 4 \end{pmatrix}, \qquad t > 0$
7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$
8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$
9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix}$
10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$
11. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}, \qquad 0 < t < \pi$
12. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \csc t \\ \sec t \end{pmatrix}, \qquad \frac{\pi}{2} < t < \pi$
13. O circuito elétrico mostrado na Fig. 7.9.1 é descrito pelo sistema de equações diferenciais

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} I(t), \qquad \text{(i)}$$

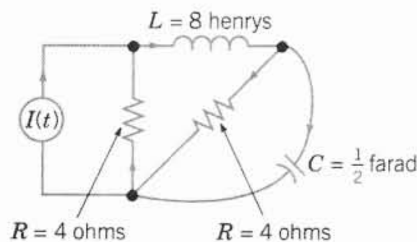


FIG. 7.9.1 O circuito do Problema 13.

onde x_1 é a corrente através do indutor, x_2 é a queda de voltagem através do capacitor e $I(t)$ é a corrente fornecida pela fonte externa.
(a) Determine uma matriz fundamental $\mathbf{\Psi}(t)$ para o sistema homogêneo correspondente à Eq. (i). Veja o Problema 25 da Seção 7.6.
(b) Se $I(t) = e^{-t/2}$, determine a solução do sistema (i) que satisfaz a condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$.

Nos Problemas 14 e 15, verifique que o vetor dado é a solução geral do sistema homogêneo correspondente e depois resolva o sistema não-homogêneo. Suponha que $t > 0$.

14. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}^{(c)} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}t + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}t^{-1}$

15. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2t \\ t^4-1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}^{(c)} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t^{-1} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}t^2$

16. Seja $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ a solução geral de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ e seja $\mathbf{x} = \mathbf{v}(t)$ uma solução particular do mesmo sistema. Considerando a diferença $\boldsymbol{\phi}(t) - \mathbf{v}(t)$, mostre que $\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$, onde $\mathbf{u}(t)$ é a solução geral do sistema homogêneo $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$.

17. Considere o problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0.$$

(a) Depois de olhar o Problema 15(c) na Seção 7.7, mostre que

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{x}^0 + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-s)\mathbf{g}(s)\,ds.$$

(b) Mostre, também, que

$$\mathbf{x} = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}^0 + \int_0^t \exp[\mathbf{A}(t-s)]\mathbf{g}(s)\,ds.$$

Compare esses resultados com os do Problema 27 na Seção 3.7.

REFERÊNCIAS[9]

Mais informações sobre matrizes e álgebra linear estão disponíveis em qualquer livro introdutório sobre o assunto. A lista a seguir é uma amostra representativa:

Anton, H., and Rorres, C., *Elementary Linear Algebra* (8th ed.) (New York: Wiley, 2000).

Johnson, L. W., Riess, R. D., and Arnold, J. T., *Introduction to Linear Algebra* (5th ed.) (Reading, MA: Addison-Wesley, 2001).

Kolman, B., *Elementary Linear Algebra* (8th ed.) (Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2003).

Leon, S. J., *Linear Algebra with Applications* (6th ed.) (New York: Macmillan, 2002).

Strang, G., *Linear Algebra and Its Applications* (4th ed.) (New York: Academic Press, 1998).

[9]Os livros de Kolman e de Leon foram traduzidos para o português pelas editores Prentice-Hall do Brasil e LTC, respectivamente. (*N.T.*)

CAPÍTULO 8

Métodos Numéricos

Até agora, discutimos métodos para resolver equações diferenciais usando técnicas analíticas como integração ou expansão em séries. Em geral, a ênfase era encontrar uma expressão exata para a solução. Infelizmente, existem muitos problemas importantes em engenharia e ciência, especialmente problemas não-lineares, nos quais esses métodos ou não se aplicam, ou são muito complicados para se usar. Neste capítulo, vamos usar uma abordagem alternativa, a utilização de métodos numéricos aproximados para obter uma aproximação precisa da solução de um problema de valor inicial. Vamos apresentar esses métodos no contexto mais simples possível, a saber, uma única equação escalar de primeira ordem. No entanto, esses métodos podem ser imediatamente estendidos para sistemas de equações de primeira ordem e essa extensão está esquematizada na Seção 8.6. Os procedimentos aqui descritos podem ser executados, facilmente, em computadores pessoais e, também, em algumas calculadoras.

8.1 O Método de Euler ou Método da Reta Tangente

Para discutir o desenvolvimento e a utilização de procedimentos numéricos, vamos nos concentrar, principalmente, em problemas de valor inicial para equações de primeira ordem consistindo na equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{1}$$

e na condição inicial

$$y(t_0) = y_0. \tag{2}$$

Vamos supor que as funções f e f_y são contínuas em algum retângulo no plano ty contendo o ponto (t_0, y_0). Então, pelo Teorema 2.4.2, existe uma única solução $y = \phi(t)$ do problema dado em algum intervalo em torno de t_0. Se a Eq. (1) for não-linear, então o intervalo de existência da solução pode ser difícil de ser determinado e pode não ter uma relação simples com a função f. No entanto, vamos supor, em todas as nossas discussões, que existe uma única solução do problema de valor inicial (1), (2) no intervalo de interesse.

Na Seção 2.7, descrevemos o método de aproximação numérica mais antigo e mais simples, a saber, o método de Euler, ou método da reta tangente. Esse método é expresso pela equação

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)(t_{n+1} - t_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3}$$

Se o tamanho do passo tiver valor uniforme h e se denotarmos $f(t_n, y_n)$ por f_n, então a Eq. (3) fica na forma

$$y_{n+1} = y_n + f_n h, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

O método de Euler consiste em calcular, repetidamente, a Eq. (3) ou (4), usando o resultado de cada passo para executar o próximo passo. Dessa maneira, você obtém uma seqüência de valores $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ que aproximam o valor da solução $\phi(t)$ nos pontos $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$.

Na Seção 2.7, observamos que um programa de computador para o método de Euler tem a estrutura dada a seguir. As instruções específicas podem ser escritas em qualquer linguagem de programação conveniente.

O Método de Euler

Passo 1. **defina** $f(t, y)$
Passo 2. **alimente** os valores iniciais $t0$ e $y0$
Passo 3. **alimente** o tamanho do passo h e o número de passos n
Passo 4. **escreva** $t0$ e $y0$
Passo 5. **para** j de 1 até n **calcule**
Passo 6. $k1 = f(t, y)$
$y = y + h * k1$
$t = t + h$
Passo 7. **escreva** t e y
Passo 8. **fim**

Alguns exemplos do método de Euler aparecem na Seção 2.7. Como outro exemplo, considere o problema de valor inicial

$$y' = 1 - t + 4y, \tag{5}$$

$$y(0) = 1. \tag{6}$$

A Eq. (5) é uma equação linear de primeira ordem e pode-se verificar facilmente que a solução que satisfaz as condições iniciais é

$$y = \phi(t) = \tfrac{1}{4}t - \tfrac{3}{16} + \tfrac{19}{16}e^{4t}. \qquad (7)$$

Como a solução exata é conhecida, não precisamos de métodos numéricos para resolver o problema de valor inicial (5), (6). Por outro lado, a disponibilidade da solução exata torna fácil determinar a precisão de qualquer procedimento numérico utilizado nesse problema. Usaremos esse problema ao longo do capítulo para ilustrar e comparar os métodos numéricos diferentes. As soluções da Eq. (5) divergem rapidamente umas das outras, de modo que deveríamos esperar uma dificuldade razoável em aproximar bem a solução (7) em qualquer intervalo considerável. De fato, essa é a razão da escolha desse problema particular; será relativamente fácil observar as vantagens de se usar métodos mais precisos.

Exemplo 1

Usando a fórmula de Euler (4) e tamanho de passo $h = 0{,}05$; $0{,}025$; $0{,}01$ e $0{,}001$, determine valores aproximados da solução $y = \phi(t)$ do problema (5), (6) no intervalo $0 \le t \le 2$.

Os cálculos indicados foram feitos em um computador, e a Tabela 8.1.1 mostra alguns resultados. A precisão não impressiona muito. Para $h = 0{,}01$, o erro percentual é de 3,85% em $t = 0{,}5$, 7,49% em $t = 1{,}0$ e 14,4% em $t = 2{,}0$. Os erros percentuais correspondentes para $h = 0{,}001$ são de 0,40%, 0,79% e 1,58%, respectivamente. Note que, se $h = 0{,}001$, precisamos de 2.000 passos para atravessar o intervalo de $t = 0$ até $t = 2$. Assim, é necessária uma quantidade considerável de cálculos para se obter mesmo uma precisão razoavelmente boa para esse problema usando-se o método de Euler. Quando discutirmos outros métodos numéricos mais adiante neste capítulo, veremos que é possível obter precisão comparável, ou até melhor, com tamanhos de passos muito maiores e muito menos passos computacionais.

TABELA 8.1.1 Uma Comparação dos Resultados da Solução Numérica de $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$, Usando o Método de Euler para Tamanhos de Passos Diferentes h

t	$h = 0{,}05$	$h = 0{,}025$	$h = 0{,}01$	$h = 0{,}001$	Exata
0,0	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
0,1	1,5475000	1,5761188	1,5952901	1,6076289	1,6090418
0,2	2,3249000	2,4080117	2,4644587	2,5011159	2,5053299
0,3	3,4333560	3,6143837	3,7390345	3,8207130	3,8301388
0,4	5,0185326	5,3690304	5,6137120	5,7754845	5,7942260
0,5	7,2901870	7,9264062	8,3766865	8,6770692	8,7120041
1,0	45,588400	53,807866	60,037126	64,382558	64,897803
1,5	282,07187	361,75945	426,40818	473,55979	479,25919
2,0	1745,6662	2432,7878	3029,3279	3484,1608	3540,2001

Para se começar a investigar os erros na utilização de aproximações numéricas e sugerir, também, maneiras de se construir algoritmos mais precisos, ajuda mencionar algumas maneiras alternativas de se olhar o método de Euler.

Primeiro, vamos escrever a equação diferencial (1) no ponto $t = t_n$ na forma

$$\frac{d\phi}{dt}(t_n) = f[t_n, \phi(t_n)]. \qquad (8)$$

Então, aproximamos a derivada na Eq. (8) pelo quociente de diferenças (direto, ou para a frente), obtendo

$$\frac{\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \cong f[t_n, \phi(t_n)]. \qquad (9)$$

Finalmente, se substituirmos $\phi(t_{n+1})$ e $\phi(t_n)$ pelos seus valores aproximados y_{n+1} e y_n, respectivamente, e resolvermos para y_{n+1}, obteremos a fórmula de Euler (3).

Outra maneira é escrever o problema como uma equação integral. Como $y = \phi(t)$ é uma solução do problema de valor inicial (1), (2), integrando-se de t_n até t_{n+1}, obtemos

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi'(t)\,dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[t, \phi(t)]\,dt$$

ou

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[t, \phi(t)]\,dt. \qquad (10)$$

A integral na Eq. (10) representa, geometricamente, a área sob a curva na Fig. 8.1.1 entre $t = t_n$ e $t = t_{n+1}$. Se aproximarmos a integral substituindo $f[t, \phi(t)]$ por seu valor $f[t_n, \phi(t_n)]$ em $t = t_n$, estaremos aproximando a área real pela área do retângulo sombreado. Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned}\phi(t_{n+1}) &\cong \phi(t_n) + f[t_n, \phi(t_n)](t_{n+1} - t_n)\\ &= \phi(t_n) + hf[t_n, \phi(t_n)]. \qquad (11)\end{aligned}$$

Finalmente, para obter uma aproximação y_{n+1} para $\phi(t_{n+1})$, fazemos uma segunda aproximação substituindo $\phi(t_n)$ pelo seu valor aproximado y_n na Eq. (11). Isso nos dá a fórmula de Euler $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$. Um algoritmo mais preciso pode ser obtido através de uma aproximação mais precisa da integral. Isso será discutido na Seção 8.2.

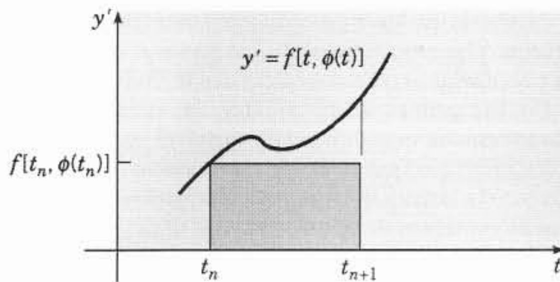


FIG. 8.1.1 Dedução integral do método de Euler.

Uma terceira abordagem é supor que a solução $y = \phi(t)$ tem uma série de Taylor em torno do ponto t_n. Então,

$$\phi(t_n + h) = \phi(t_n) + \phi'(t_n)h + \phi''(t_n)\frac{h^2}{2!} + \cdots$$

ou

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + f[t_n, \phi(t_n)]h + \phi''(t_n)\frac{h^2}{2!} + \cdots. \quad (12)$$

Se a série é truncada depois dos dois primeiros termos, e $\phi(t_{n+1})$ e $\phi(t_n)$ são substituídos por seus valores aproximados y_{n+1} e y_n, novamente obtemos a fórmula de Euler (4). Se forem usados mais termos na série, obtém-se uma fórmula mais precisa. Além disso, usando uma série de Taylor com resto, é possível estimar o tamanho do erro na fórmula. Isso será discutido mais adiante nesta seção.

A Fórmula de Euler Inversa. Pode-se obter uma variante da fórmula de Euler aproximando-se a derivada na Eq. (8) pelo quociente de diferenças inverso (ou para trás) $[\phi(t_n) - \phi(t_{n-1})]/h$ em vez do quociente de diferenças direto usado na Eq. (9). Obtemos, assim,

$$\phi(t_n) - \phi(t_{n-1}) \cong hf(t_n, y_n)$$

ou

$$y_n = y_{n-1} + hf(t_n, y_n).$$

Variando o índice de n para $n + 1$, obtemos a fórmula de Euler inversa

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}). \quad (13)$$

Supondo y_n conhecido e y_{n+1} a ser calculado, note que a Eq. (13) não fornece uma fórmula explícita para y_{n+1}. Em vez disso, é uma equação que define implicitamente y_{n+1} e precisa ser resolvida para se determinar o valor de y_{n+1}. O quão isso é difícil depende, exclusivamente, da natureza da função f.

Exemplo 2

Use a fórmula de Euler inversa (13) e tamanhos de passos $h = 0{,}05$; 0,025; 0,01 e 0,001 para encontrar valores aproximados da solução do problema de valor inicial (5), (6) no intervalo $0 \le t \le 2$.

Para esse problema, a fórmula de Euler inversa (13) fica

$$y_{n+1} = y_n + h(1 - t_{n+1} + 4y_{n+1}).$$

Vamos mostrar os dois primeiros passos em detalhe, de modo a tornar claro como o método funciona. No primeiro passo, temos

$$y_1 = y_0 + h(1 - t_1 + 4y_1) = 1 + (0{,}05)(1 - 0{,}05 + 4y_1).$$

Resolvendo essa equação para y_1, obtemos

$$y_1 = 1{,}0475/0{,}8 = 1{,}309375.$$

Note que, como a equação diferencial é linear, a equação implícita para y_1 também é linear e, portanto, fácil de resolver. A seguir,

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + h(1 - t_2 + 4y_2) \\ &= 1{,}309375 + (0{,}05)(1 - 0{,}1 + 4y_2), \end{aligned}$$

o que leva a

$$y_2 = 1{,}354375/0.8 = 1{,}69296875.$$

Continuando os cálculos em um computador, obtemos os resultados ilustrados na Tabela 8.1.2. Os valores dados pela fórmula de Euler inversa são, uniformemente, muito grandes para esse problema, enquanto os valores obtidos pelo método de Euler eram muito pequenos. Nesse problema, os erros são um pouco maiores para a fórmula de Euler inversa do que para o método de Euler, embora, para valores pequenos de h, a diferença seja insignificante. Como o método de Euler inverso parece ser menos preciso do que o direito e é um pouco mais complicado, é natural perguntar por que mencioná-lo. A resposta é que ele é o exemplo mais simples de uma classe de métodos conhecidos como fórmulas inversas de diferenciação que são muito úteis para certos tipos de equações diferenciais. Voltaremos a essa questão mais adiante neste capítulo.

TABELA 8.1.2 Uma Comparação entre Resultados da Solução Numérica de $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$, Usando o Método de Euler Inverso para Tamanhos de Passos Diferentes h

t	$h = 0{,}05$	$h = 0{,}025$	$h = 0{,}01$	$h = 0{,}001$	Exata
0	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
0,1	1,6929688	1,6474375	1,6236638	1,6104634	1,6090418
0,2	2,7616699	2,6211306	2,5491368	2,5095731	2,5053299
0,3	4,4174530	4,0920886	3,9285724	3,8396379	3,8301388
0,4	6,9905516	6,3209569	5,9908303	5,8131282	5,7942260
0,5	10,996956	9,7050002	9,0801473	8,7472667	8,7120041
1,0	103,06171	80,402761	70,452395	65,419964	64,897803
1,5	959,44236	661,00731	542,12432	485,05825	479,25919
2,0	8934,0696	5435,7294	4172,7228	3597,4478	3540,2001

Erros em Aproximações Numéricas. A utilização de um procedimento numérico, como a fórmula de Euler, para resolver um problema de valor inicial levanta uma série de questões que precisam ser respondidas antes de se aceitar a solução numérica aproximada como satisfatória. Uma dessas é a questão da **convergência**, isto é, quando o tamanho da passos h tende a zero, os valores da solução numérica $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ tendem ao valor correspondente da solução exata? Mesmo supondo que a resposta seja afirmativa, resta o problema prático importante de quão rápida a aproximação numérica converge para a solução. Em outras palavras, quão pequeno o tamanho dos passos tem que ser para garantir um determinado nível de precisão? Queremos usar um tamanho de passos que seja suficientemente pequeno para garantir a precisão necessária, mas que não seja pequeno demais. Um tamanho de passos desnecessariamente pequeno torna os cálculos mais lentos, mais caros e, em alguns casos, pode até causar perda de precisão.

Existem duas fontes fundamentais de erro ao se resolver um problema de valor inicial numericamente. Vamos supor, primeiro, que nosso computador é tal que podemos efetuar todos os cálculos com precisão absoluta, isto é, mantendo um número infinito de casas decimais. A diferença E_n entre a solução $y = \phi(t)$ do problema de valor inicial (1), (2) e sua aproximação numérica é dada por

$$E_n = \phi(t_n) - y_n, \tag{14}$$

e é conhecida como **erro de truncamento global**. Ele tem duas causas: primeiro, em cada passo usamos uma fórmula aproximada para determinar y_{n+1}; segundo, os dados de entrada em cada etapa estão apenas aproximadamente corretos, já que, em geral, $\phi(t_n)$ não é igual a y_n. Se supusermos que $y_n = \phi(t_n)$, então o único erro efetuado em cada passo é devido ao uso de uma fórmula aproximada. Esse erro é conhecido como **erro de truncamento local** e_n.

A segunda fonte fundamental de erro é que efetuamos os cálculos em aritmética com apenas um número finito de dígitos. Isso nos leva a um **erro de arredondamento** R_n definido por

$$R_n = y_n - Y_n, \tag{15}$$

onde Y_n é o valor *computado de fato* pelo método numérico dado.

O valor absoluto do erro total em se calcular $\phi(t_n)$ é dado por

$$|\phi(t_n) - Y_n| = |\phi(t_n) - y_n + y_n - Y_n|. \tag{16}$$

Usando a desigualdade triangular, $|a + b| \le |a| + |b|$, obtemos, da Eq. (16),

$$\begin{aligned} |\phi(t_n) - Y_n| &\le |\phi(t_n) - y_n| + |y_n - Y_n| \\ &\le |E_n| + |R_n|. \end{aligned} \tag{17}$$

Logo, o erro total é limitado pela soma dos valores absolutos dos erros de truncamento e de arredondamento. Para os procedimentos numéricos discutidos neste livro, é possível obter estimativas úteis do erro de truncamento. No entanto, limitamos nossa discussão basicamente ao erro de truncamento local, que é um pouco mais simples. O erro de arredondamento é, claramente, de natureza mais aleatória. Depende do tipo de computador utilizado, da ordem em que os cálculos são efetuados, do método de arredondamento, e assim por diante. Uma análise do erro de arredondamento está além do escopo deste livro, mas é possível dizer mais do que se poderia esperar à primeira vista (veja, por exemplo, Henrici). Alguns dos perigos do erro de arredondamento são discutidos nos problemas de 25 a 27 e na Seção 8.5.

Erro de Truncamento Local para o Método de Euler. Vamos supor que a solução $y = \phi(t)$ do problema de valor inicial (1), (2) tem derivada segunda contínua no intervalo de interesse. Para garantir isso, podemos supor que f, f_t e f_y são contínuas. Observe que, se f tem essas propriedades e se ϕ é uma solução do problema de valor inicial (1), (2), então

$$\phi'(t) = f[t, \phi(t)],$$

e, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \phi''(t) &= f_t[t, \phi(t)] + f_y[t, \phi(t)]\phi'(t) \\ &= f_t[t, \phi(t)] + f_y[t, \phi(t)]f[t, \phi(t)]. \end{aligned} \tag{18}$$

Como a expressão à direita do sinal de igualdade nessa equação é contínua, ϕ'' também é contínua.

Usando, então, um polinômio de Taylor com resto para expandir ϕ em torno de t_n, obtemos

$$\phi(t_n + h) = \phi(t_n) + \phi'(t_n)h + \tfrac{1}{2}\phi''(\bar{t}_n)h^2, \tag{19}$$

onde $\bar{t}_n$ é algum ponto no intervalo $t_n < \bar{t}_n < t_n + h$. Subtraindo a Eq. (4) da Eq. (19) e observando que $\phi(t_n + h) = \phi(t_{n+1})$ e $\phi'(t_n) = f[t_n, \phi(t_n)]$, vemos que

$$\begin{aligned} \phi(t_{n+1}) - y_{n+1} = [\phi(t_n) - y_n] + h\{f[t_n, \phi(t_n)] \\ - f(t_n, y_n)\} + \tfrac{1}{2}\phi''(\bar{t}_n)h^2. \end{aligned} \tag{20}$$

Para calcular o erro de truncamento local, aplicamos a Eq. (20) à solução exata $\phi(t)$; isto é, tomamos y_n como sendo $\phi(t_n)$. Então, vemos imediatamente da Eq. (20) que o erro de truncamento local e_{n+1} é

$$e_{n+1} = \phi(t_{n+1}) - y_{n+1} = \tfrac{1}{2}\phi''(\bar{t}_n)h^2. \tag{21}$$

Assim, o erro de truncamento local para o método de Euler é proporcional ao quadrado do tamanho do passo h e o fator de proporcionalidade depende da derivada segunda da solução ϕ. A expressão dada pela Eq. (21) depende de n e, em geral, é diferente para cada passo. Uma cota uniforme, válida em um intervalo $[a, b]$, é dada por

$$|e_n| \le Mh^2/2, \tag{22}$$

onde M é o máximo de $|\phi''(t)|$ no intervalo $[a, b]$. Como a Eq. (22) é baseada no pior caso possível – isto é, o maior valor possível de $|\phi''(t)|$ – essa pode ser uma estimativa bem maior do que o erro de truncamento local em certas partes do intervalo $[a, b]$. Um dos usos da Eq. (22) é escolher um tamanho de passo que resultará em um erro de truncamento local que não ultrapasse um nível de tolerância dado. Por exemplo, se o erro de truncamento local não pode ser maior do que ϵ, então, da Eq. (22), temos

$$h \le \sqrt{2\epsilon/M}. \tag{23}$$

A dificuldade básica em se usar qualquer das Eqs. (21), (22) ou (23) reside na estimativa de $|\phi''(t)|$, ou M. No entanto, o fato central expresso por essas equações é que o erro de truncamento local é proporcional a h^2. Logo, se h for reduzido por um fator de 1/2, então o erro é reduzido por um fator de 1/4, e assim por diante.

O erro de truncamento global E_n é mais importante do que o erro de truncamento local. A análise para se estimar E_n é mais difícil do que a para e_n. Entretanto, conhecendo o erro de truncamento local, podemos fazer uma estimativa *intuitiva* do erro de truncamento global em um ponto fixo $T > t_0$ como segue. Suponha que levamos n passos para ir de t_0 até $T = t_0 + nh$. Em cada passo, o erro é, no máximo, $Mh^2/2$; logo, o erro em n passos é, no máximo, $nMh^2/2$. Notando que $n = (T - t_0)/h$, vemos que o erro de truncamento global para o método de Euler ao se ir de t_0 até $\bar{t}$ é limitado por

$$n\frac{Mh^2}{2} = (T - t_0)\frac{Mh}{2}. \tag{24}$$

Esse argumento não está completo, pois não leva em consideração o efeito de um erro em um passo sobre os passos seguintes.

De qualquer jeito, pode-se mostrar que o erro de truncamento global ao se usar o método de Euler em um intervalo finito não é maior do que uma constante vezes h; veja o Problema 23 para mais detalhes. O método de Euler é chamado de método de primeira ordem porque seu erro de truncamento global é proporcional à primeira potência do tamanho do passo.

Por ser mais acessível, vamos usar, daqui para a frente, o erro de truncamento local como nossa medida principal da precisão de um método numérico e para comparar métodos diferentes. Se tivermos uma informação *a priori* sobre a solução do problema de valor inicial dado, podemos usar o resultado (21) para obter informação mais precisa sobre como o erro de truncamento local varia com t. Como exemplo, considere o problema ilustrativo

$$y' = 1 - t + 4y, \qquad y(0) = 1 \tag{25}$$

no intervalo $0 \le t \le 2$. Seja $y = \phi(t)$ a solução do problema de valor inicial (25). Então, como observado anteriormente,

$$\phi(t) = (4t - 3 + 19e^{4t})/16$$

e, portanto,

$$\phi''(t) = 19e^{4t}.$$

A Eq. (21) diz, então, que

$$e_{n+1} = \frac{19e^{4\bar{t}_n}h^2}{2}, \qquad t_n < \bar{t}_n < t_n + h. \tag{26}$$

O aparecimento do fator 19 e o crescimento rápido de e^{4t} explicam por que os resultados desta seção com $h = 0{,}05$ não foram muito precisos.

Por exemplo, o erro no primeiro passo é

$$e_1 = \phi(t_1) - y_1 = \frac{19e^{4\bar{t}_0}(0{,}0025)}{2}, \qquad 0 < \bar{t}_0 < 0{,}05.$$

É claro que e_1 é positivo e, como $e^{4\bar{t}_0} < e^{0,2}$, temos

$$e_1 \le \frac{19e^{0,2}(0.0025)}{2} \cong 0.02901. \tag{27}$$

Note, também, que $e^{4\bar{t}_0} > 1$; logo, $e_1 > 19(0{,}0025)/2 = 0{,}02375$. O erro é, de fato, 0,02542. Segue da Eq. (26) que o erro piora progressivamente quando t aumenta; isso também é claro nos resultados que aparecem na Tabela 8.1.1. Cálculos semelhantes para cotas do erro de truncamento local dão

$$1.0617 \cong \frac{19e^{3.8}(0.0025)}{2} \le e_{20} \le \frac{19e^{4}(0.0025)}{2} \cong 1.2967 \tag{28}$$

para se ir de 0,95 para 1,0 e

$$57.96 \cong \frac{19e^{7.8}(0.0025)}{2} \le e_{40} \le \frac{19e^{8}(0.0025)}{2} \cong 70.80 \tag{29}$$

para se ir de 1,95 para 2,0.

Esses resultados indicam que, para esse problema, o erro de truncamento local é em torno de 2500 vezes maior perto de $t = 2$ do que próximo a $t = 0$. Assim, para reduzir o erro de truncamento local a um nível aceitável em todo o intervalo $0 \le t \le 2$, é preciso escolher um tamanho de passo baseado na análise em uma vizinhança de $t = 2$. É claro que esse tamanho de passo será muito maior do que o necessário próximo a $t = 0$. Por exemplo, para se obter um erro de truncamento local de 0,01 para esse problema, precisamos de um tamanho de passo de, aproximadamente, 0,00059 próximo a $t = 2$ e de 0,032 perto de $t = 0$. A utilização de um tamanho de passo uniforme que é menor do que o necessário em boa parte do intervalo resulta em mais cálculos do que o necessário, mais tempo consumido e, possivelmente, mais perigo de erros de arredondamento inaceitáveis.

Uma outra abordagem é manter o erro de truncamento local aproximadamente constante ao longo do intervalo reduzindo, gradualmente, o tamanho do passo à medida que t aumenta. No problema do exemplo, precisaríamos reduzir h por um fator de mais ou menos 50 ao ir de $t = 0$ para $t = 2$. Um método onde se varia o tamanho do passo é dito **adaptativo**. Todos os códigos computacionais modernos para se resolver equações diferenciais têm a capacidade de ajustar o tamanho do passo quando necessário. Voltaremos a essa questão na próxima seção.

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, encontre valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em t = 0,1; 0,2; 0,3 e 0,4.

(a) Use o método de Euler com h = 0,05.
(b) Use o método de Euler com h = 0,025.
(c) Use o método de Euler inverso com h = 0,05.
(d) Use o método de Euler inverso com h = 0,025.

1. $y' = 3 + t - y, \quad y(0) = 1$
2. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
3. $y' = 2y - 3t, \quad y(0) = 1$
4. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$
5. $y' = \dfrac{y^2 + 2ty}{3 + t^2}, \quad y(0) = 0.5$
6. $y' = (t^2 - y^2)\,\text{sen}\, y, \quad y(0) = -1$

Nos problemas de 7 a 12, encontre valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em t = 0,5; 1,0; 1,5 e 2,0.

(a) Use o método de Euler com h = 0,025.
(b) Use o método de Euler com h = 0,0125.
(c) Use o método de Euler inverso com h = 0,025.
(d) Use o método de Euler inverso com h = 0,0125.

7. $y' = 0{,}5 - t + 2y, \quad y(0) = 1$
8. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
9. $y' = \sqrt{t + y}, \quad y(0) = 3$
10. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$
11. $y' = (4 - ty)/(1 + y^2), \quad y(0) = -2$
12. $y' = (y^2 + 2ty)/(3 + t^2), \quad y(0) = 0{,}5$
13. Complete os cálculos que levam aos elementos nas colunas três e quatro da Tabela 8.1.1.
14. Complete os cálculos que levam aos elementos nas colunas três e quatro da Tabela 8.1.2.
15. Usando três termos da série de Taylor dada na Eq. (12) e fazendo h = 0,1, determine valores aproximados da solução do exemplo ilustrativo $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$ em t = 0,1 e 0,2. Compare os resultados com os do método de Euler e com os valores exatos.
Sugestão: Se $y' = f(t, y)$, o que é y''?

Nos Problemas 16 e 17, estime o erro de truncamento local para o método de Euler em termos da solução $y = \phi(t)$. Obtenha uma cota para e_{n+1} em termos de t e de $\phi(t)$ que seja válida no intervalo $0 \le t \le 1$. Usando uma fórmula para a solução, obtenha uma cota mais

precisa para e_{n+1}. Para $h = 0{,}1$, calcule uma cota para e_1 e compare-a com o erro exato em $t = 0{,}1$. Calcule, também, uma cota para o erro e_4 no quarto passo.

16. $y' = 2y - 1, \quad y(0) = 1$ 17. $y' = \frac{1}{2} - t + 2y, \quad y(0) = 1$

Nos problemas de 18 a 21, obtenha uma fórmula para o erro de truncamento local para o método de Euler em termos de t e da solução ϕ.

18. $y' = t^2 + y^2, \quad y(0) = 1$
19. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
20. $y' = \sqrt{t + y}, \quad y(1) = 3$
21. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$
22. Considere o problema de valor inicial

$$y' = \cos 5\pi t, \qquad y(0) = 1.$$

(a) Determine a solução $y = \phi(t)$ e desenhe o gráfico de $y = \phi(t)$ para $0 \le t \le 1$.
(b) Determine valores aproximados para $\phi(t)$ em $t = 0{,}2$; $0{,}4$ e $0{,}6$ usando o método de Euler com $h = 0{,}2$. Desenhe um gráfico com segmentos de reta para a solução aproximada e compare-o com o gráfico da solução exata.
(c) Repita o cálculo do item (b) para $9 \le t \le 0{,}4$, mas com $h = 0{,}1$.
(d) Mostre, através do cálculo do erro de truncamento local, que nenhum desses tamanhos de passos é suficientemente pequeno. Determine um valor de h que garanta que o erro de truncamento local seja menor do que $0{,}05$ ao longo do intervalo $0 \le t \le 1$. O fato de ser necessário um valor tão pequeno de h é conseqüência de o $\max|\phi''(t)|$ ser tão grande.

23. Vamos discutir, neste problema, o erro de truncamento global associado ao método de Euler para o problema de valor inicial $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$. Supondo que as funções f e f_y são contínuas em uma região R fechada e limitada no plano ty que inclui o ponto (t_0, y_0), pode-se mostrar que existe uma constante L tal que $|f(t, y) - f(t, \tilde{y})| < L|y - \tilde{y}|$, onde (t, y) e $(t, \tilde{y})$ são dois pontos quaisquer em R com a mesma coordenada t (veja o Problema 15 da Seção 2.8). Além disso, vamos supor que f_t é contínua, de modo que a solução ϕ tem derivada segunda contínua.
(a) Usando a Eq. (20), mostre que

$$|E_{n+1}| \le |E_n| + h|f[t_n, \phi(t_n)] - f(t_n, y_n)| + \tfrac{1}{2}h^2|\phi''(\bar{t}_n)| \le \alpha|E_n| + \beta h^2, \qquad \text{(i)}$$

onde $\alpha = 1 + hL$ e $\beta = \max|\phi''(t)|/2$ em $t_0 \le t \le t_n$.
(b) Aceitando, sem demonstração, o fato de que, se $E_0 = 0$ e se $|E_n|$ satisfaz a Eq. (i), então $|E_n| \le \beta h^2(\alpha^n - 1)/(\alpha - 1)$ para $\alpha \ne 1$, mostre que

$$|E_n| \le \frac{(1 + hL)^n - 1}{L}\beta h. \qquad \text{(ii)}$$

A Eq. (ii) fornece uma cota para $|E_n|$ em termos de h, L, n e β. Note que, para um h fixo, essa cota cresce quando n cresce, isto é, o erro aumenta com a distância do ponto inicial t_0.
(c) Mostre que $(1 + hL)^n \le e^{nhL}$; portanto,

$$|E_n| \le \frac{e^{nhL} - 1}{L}\beta h = \frac{e^{(t_n - t_0)L} - 1}{L}\beta h.$$

Para um ponto fixo $T = t_0 + nh$ [isto é, nh é constante e $h = (T - t_0)/n$], essa cota para o erro é da forma de uma constante vezes h e tende a zero quando $h \to 0$. Note também que, para $nhL = (T - t_0)L$ pequeno, o lado à direita do sinal de igualdade na equação precedente é aproximadamente igual a $nh^2\beta = (T - t_0)\beta h$, que foi obtido na Eq. (24) por um argumento intuitivo.

24. Deduza uma expressão análoga à Eq. (21) para o erro de truncamento local para a fórmula de Euler inversa. *Sugestão*: Construa uma aproximação de Taylor apropriada de $\phi(t)$ em torno de $t = t_{n+1}$.
25. Usando um tamanho de passo $h = 0{,}05$ e o método de Euler, mas mantendo apenas três dígitos ao longo dos cálculos, determine valores aproximados para a solução em $t = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$ e $0{,}4$ para cada um dos problemas de valor inicial a seguir.
(a) $y' = 1 - t + 4y, \quad y(0) = 1$
(b) $y' = 3 + t - y, \quad y(0) = 1$
(c) $y' = 2y - 3t, \quad y(0) = 1$
Compare os resultados com os obtidos no Exemplo 1 e nos Problemas 1 e 3. As pequenas diferenças entre alguns dos resultados arredondados para três dígitos e os resultados atuais são devidas ao erro de arredondamento. O erro de arredondamento tornar-se-ia importante se os cálculos exigissem muitos passos.
26. O problema a seguir ilustra um perigo que ocorre devido ao erro de arredondamento quando números quase iguais são subtraídos e a diferença é multiplicada, então, por um número muito grande. Calcule a quantidade

$$1000 \cdot \begin{vmatrix} 6{,}010 & 18{,}04 \\ 2{,}004 & 6{,}000 \end{vmatrix}$$

das maneiras a seguir:
(a) Arredonde primeiro cada elemento no determinante para dois dígitos.
(b) Arredonde primeiro cada elemento no determinante para três dígitos.
(c) Retenha todos os quatro dígitos. Compare esse valor com os resultados dos itens (a) e (b).
27. A distributividade $a(b - c) = ab - ac$ não vale, em geral, se os produtos são arredondados para um número menor de dígitos. Para mostrar isso em um caso específico, faça $a = 0{,}22$, $b = 3{,}19$ e $c = 2{,}17$. Depois de cada multiplicação, arredonde retirando o último dígito.

8.2 Aprimoramentos no Método de Euler

Como, para muitos problemas, o método de Euler precisa de um tamanho de passo muito pequeno para se obter resultados suficientemente precisos, houve um grande esforço para se desenvolver métodos mais eficientes. Nas três seções seguintes vamos discutir alguns desses métodos. Considere o problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0 \qquad (1)$$

e denote por $y = \phi(t)$ sua solução. Lembre da Eq. (10) da Seção 8.1 que, ao integrar uma equação diferencial dada de t_n até t_{n+1}, obtemos

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[t, \phi(t)]\, dt. \qquad (2)$$

A fórmula

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \qquad (3)$$

é obtida substituindo-se $f[t, \phi(t)]$ na Eq. (2) por seu valor aproximado $f(t_n, y_n)$ no extremo esquerdo do intervalo de integração.

Fórmula de Euler Aprimorada. Uma fórmula de aproximação melhor pode ser obtida se o integrando na Eq. (2) é aproximado de modo mais preciso. Um modo de fazer isso é aproximar o integrando pela média de seus valores nas duas extremidades, a saber, $\{f[t_n, \phi(t_n)] + f[t_{n+1}, \phi(t_{n+1})]\}/2$. Isso é equivalente a aproximar a área embaixo da curva na Fig. 8.2.1 entre $t = t_n$ e $t = t_{n+1}$ pela área do trapézio sombreado. Além disso, substituímos $\phi(t_n)$ e $\phi(t_{n+1})$ pelos seus valores aproximados respectivos y_n e y_{n+1}. Assim, obtemos, da Eq. (2),

$$y_{n+1} = y_n + \frac{f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})}{2}h. \qquad (4)$$

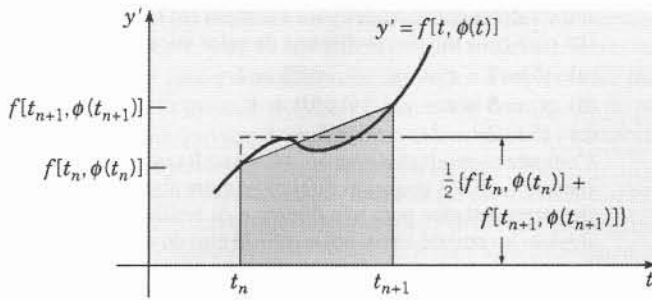


FIG. 8.2.1 Dedução do método de Euler aprimorado.

Como a incógnita y_{n+1} aparece como um dos argumentos de f à direita do sinal de igualdade na Eq. (4), essa equação define y_{n+1} implicitamente, em vez de explicitamente. Dependendo da natureza da função f, pode ser bem difícil resolver a Eq. (4) para y_{n+1}. Essa dificuldade pode ser sanada substituindo-se y_{n+1} à direita do sinal de igualdade na Eq. (4) pelo valor obtido usando-se a fórmula de Euler (3). Então,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{f(t_n, y_n) + f[t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n)]}{2} h \\ &= y_n + \frac{f_n + f(t_n + h, y_n + hf_n)}{2} h, \end{aligned} \tag{5}$$

onde t_{n+1} foi substituído por $t_n + h$.

A Eq. (5) nos dá uma fórmula explícita para calcular y_{n+1}, o valor aproximado de $\phi(t_{n+1})$, em função dos dados em t_n. Essa fórmula é conhecida como **fórmula de Euler aprimorada** ou **fórmula de Heun**. A fórmula de Euler aprimorada é um exemplo de um método em duas etapas: primeiro calculamos $y_n + hf_n$ da fórmula de Euler e, depois, usamos esse resultado para calcular y_{n+1} da Eq. (5). A fórmula de Euler aprimorada (5) não representa uma melhoria sobre a fórmula (3), já que o erro de truncamento local ao se usar a Eq. (5) é proporcional a h^3, enquanto para o método de Euler é proporcional a h^2. Essa estimativa para o erro na fórmula de Euler aprimorada está provada no Problema 14. Pode-se mostrar, também, que, para um intervalo finito, o erro de truncamento global para a fórmula de Euler aprimorada é limitado por uma constante vezes h^2, de modo que esse método é de segunda ordem. Note que essa precisão maior é obtida à custa de mais trabalho computacional, já que agora é necessário calcular $f(t, y)$ duas vezes para se ir de t_n a t_{n+1}.

Se $f(t, y)$ depende apenas de t e não de y, então a resolução da equação diferencial $y' = f(t, y)$ se reduz a integrar $f(t)$. Nesse caso, a fórmula de Euler aprimorada (5) fica

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}[f(t_n) + f(t_n + h)], \tag{6}$$

que é, simplesmente, a regra do trapézio para integração numérica.

Exemplo 1

Use a fórmula de Euler aprimorada (5) para calcular valores aproximados da solução do problema de valor inicial

$$y' = 1 - t + 4y, \qquad y(0) = 1. \tag{7}$$

Para tornar claro exatamente que cálculos são necessários, vamos mostrar alguns passos em detalhes. Para esse problema, $f(t, y) = 1 - t + 4y$; logo,

$$f_n = 1 - t_n + 4y_n$$

e

$$f(t_n + h, y_n + hf_n) = 1 - (t_n + h) + 4(y_n + hf_n).$$

Além disso, $t_0 = 0$, $y_0 = 1$ e $f_0 = 1 - t_0 + 4y_0 = 5$. Se $h = 0{,}025$, então

$$\begin{aligned} f(t_0 + h, y_0 + hf_0) &= 1 - 0{,}025 + 4[1 + (0{,}025)(5)] \\ &= 5{,}475. \end{aligned}$$

Portanto, da Eq. (5), temos

$$y_1 = 1 + (0{,}5)(5 + 5{,}475)(0{,}025) = 1{,}1309375. \tag{8}$$

No segundo passo, precisamos calcular

$$f_1 = 1 - 0{,}025 + 4(1{,}1309375) = 5{,}49875,$$

$$y_1 + hf_1 = 1{,}1309375 + (0{,}025)(5{,}49875) = 1{,}26840625,$$

e

$$f(t_2, y_1 + hf_1) = 1 - 0{,}05 + 4(1{,}26840625) = 6{,}023625.$$

Logo, da Eq. (5),

$$\begin{aligned} y_2 &= 1{,}1309375 + (0{,}5)(5{,}49875 + 6{,}023625)(0{,}025) \\ &= 1{,}2749671875. \end{aligned} \tag{9}$$

A Tabela 8.2.1 mostra outros resultados para $0 \leq t \leq 2$ obtidos usando-se o método de Euler aprimorado com $h = 0{,}025$ e $h = 0{,}01$. Para comparar os resultados do método de Euler aprimorado com os do método de Euler, note que o método de Euler aprimorado precisa de dois cálculos dos valores de f em cada passo, enquanto o método de Euler precisa só de um. Isso é importante, já que, tipicamente, a maior parte do tempo computacional de cada passo é gasto calculando-se os valores de f, de modo que contar essas operações é uma maneira razoável de se estimar o esforço computacional total. Então, para um tamanho de passo dado h, o método de Euler aprimorado precisa do dobro dos cálculos de valores de f do método de Euler. De outro ponto de vista, o método de Euler aprimorado com tamanho de passo h necessita do mesmo número de cálculos de valores de f que o método de Euler com passo $h/2$.

Olhando a Tabela 8.2.1, você pode ver que o método de Euler aprimorado com $h = 0{,}025$ dá resultados muito melhores do que o método de Euler com $h = 0{,}01$. Note que, para alcançar $t = 2$ com esses tamanhos de passos, o método de Euler aprimorado precisa de 160 cálculos de valores de f, enquanto o método de Euler precisa de 200. Mais importante de se notar é que o método de Euler aprimorado com $h = 0{,}025$ é ligeiramente mais preciso do que o método de Euler com $h = 0{,}001$ (2000 cálculos de valores de f). Em outras palavras, com algo da ordem de um doze avos do esforço computacional, o método de Euler aprimorado fornece resultados, para esse problema, comparáveis a, ou um pouco melhores do que, os gerados pelo método de Euler. Isso ilustra o fato de que, comparado ao método de Euler, o método de Euler aprimorado é claramente mais eficiente, gerando resultados substancialmente melhores,

TABELA 8.2.1 Uma Comparação dos Resultados Usando os Métodos de Euler e de Euler Aprimorado para o Problema de Valor Inicial $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$

	Euler		Euler Aprimorado		
t	$h = 0{,}01$	$h = 0{,}001$	$h = 0{,}025$	$h = 0{,}01$	Exata
0	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
0,1	1,5952901	1,6076289	1,6079462	1,6088585	1,6090418
0,2	2,4644587	2,5011159	2,5020618	2,5047827	2,5053299
0,3	3,7390345	3,8207130	3,8228282	3,8289146	3,8301388
0,4	5,6137120	5,7754845	5,7796888	5,7917911	5,7942260
0,5	8,3766865	8,6770692	8,6849039	8,7074637	8,7120041
1,0	60,037126	64,382558	64,497931	64,830722	64,897803
1,5	426,40818	473,55979	474,83402	478,51588	479,25919
2,0	3029,3279	3484,1608	3496,6702	3532,8789	3540,2001

ou precisando de muito menos esforço computacional total, ou ambos.

Os erros percentuais em $t = 2$ para o método de Euler aprimorado são de 1,23% para $h = 0{,}025$ e de 0,21% para $h = 0{,}01$.

Um programa de computador para o método de Euler pode ser imediatamente modificado para implementar o método de Euler aprimorado. Basta substituir o Passo 6 no algoritmo da Seção 8.1 pelo seguinte:

Passo 6. $k1 = f(t, y)$
$k2 = f(t + h, y + h * k1)$
$y = y + (h/2) * (k1 + k2)$
$t = t + h$

Variação no Tamanho dos Passos. Mencionamos, na Seção 8.1, a possibilidade de ajustar o tamanho dos passos à medida que os cálculos prosseguem, de modo a manter o erro de truncamento local em um nível mais ou menos constante. O objetivo é não usar mais passos do que o necessário e, ao mesmo tempo, manter algum controle sobre a precisão das aproximações. Vamos descrever aqui como isso pode ser feito. Suponha que, após n passos, chegamos ao ponto (t_n, y_n). Escolhemos um tamanho de passo h e calculamos y_{n+1}. A seguir, estimamos o erro que fizemos ao calcular y_{n+1}. Sem conhecer a solução exata, o melhor que podemos fazer é usar um método mais preciso e repetir os cálculos a partir de (t_n, y_n). Por exemplo, se usamos o método de Euler para o cálculo original, poderíamos repetir com o método de Euler aprimorado. Então, a diferença entre os dois valores calculados é uma estimativa e_{n+1}^{est} do erro ao se usar o método original. Se o erro estimado é diferente da tolerância de erro ϵ, então ajustamos o tamanho do passo e repetimos o cálculo. A chave em fazer esse ajuste eficientemente é saber como o erro de truncamento local e_{n+1} depende do tamanho do passo h. Para o método de Euler, o erro de truncamento local é proporcional a h^2, de modo que, para trazer o erro estimado (diminuindo ou aumentando) ao nível de tolerância ϵ, precisamos multiplicar o tamanho do passo original pelo fator $\sqrt{\epsilon / e_{n+1}^{\text{est}}}$.

Para ilustrar esse procedimento, vamos considerar o problema (7) do exemplo,

$$y' = 1 - t + 4y, \qquad y(0) = 1.$$

Você pode verificar que, após um passo com $h = 0{,}1$, obtemos os valores 1,5 e 1,595 com os métodos de Euler e de Euler aprimorado, respectivamente. Logo, o erro estimado para o método de Euler é 0,095. Se tivermos escolhido uma tolerância de 0,05 para o erro, por exemplo, precisaríamos diminuir o tamanho do passo multiplicando-o pelo fator $\sqrt{0{,}05/0{,}095} \cong 0{,}73$. Arredondando para baixo para ser conservador, vamos escolher o tamanho de passo ajustado como sendo $h = 0{,}07$. Obtemos, então, da fórmula de Euler,

$$y_1 = 1 + (0{,}07)f(0; 1) = 1{,}35 \cong \phi(0{,}07).$$

Usando a fórmula de Euler aprimorada, obtemos $y_1 = 1{,}39655$, de modo que o erro estimado ao se usar a fórmula de Euler é 0,04655, que é ligeiramente menor do que a tolerância especificada. O erro de fato, baseado em uma comparação com a solução exata, é um pouco maior, a saber, 0,05122.

Podemos seguir o mesmo procedimento em cada passo dos cálculos, mantendo, assim, o erro de truncamento local aproximadamente constante ao longo de todo o processo. Códigos modernos adaptativos para a resolução de equações diferenciais ajustam o tamanho do passo à medida que prosseguem de maneira bem semelhante a essa, embora usem, em geral, fórmulas mais precisas do que as de Euler e de Euler aprimorada. Em conseqüência, são, ao mesmo tempo, eficientes e precisas, usando passos muito pequenos apenas onde é realmente necessário.

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, encontre valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0{,}1$; 0,2; 0,3 e 0,4. Compare os resultados com os obtidos pelo método de Euler e pelo método de Euler inverso na Seção 8.1 e com a solução exata (se disponível).

(a) Use o método de Euler aprimorado com $h = 0{,}05$.
(b) Use o método de Euler aprimorado com $h = 0{,}025$.
(c) Use o método de Euler aprimorado com $h = 0{,}0125$.

1. $y' = 3 + t - y, \quad y(0) = 1$
2. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
3. $y' = 2y - 3t, \quad y(0) = 1$
4. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$
5. $y' = \dfrac{y^2 + 2ty}{3 + t^2}, \quad y(0) = 0{,}5$
6. $y' = (t^2 - y^2)\,\mathrm{sen}\,y, \quad y(0) = -1$

Nos problemas de 7 a 12, encontre valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0{,}5$; $1{,}0$; $1{,}5$ e $2{,}0$.
(a) Use o método de Euler aprimorado com $h = 0{,}025$.
(b) Use o método de Euler aprimorado com $h = 0{,}0125$.

7. $y' = 0{,}5 - t + 2y, \qquad y(0) = 1$
8. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \qquad y(0) = 2$
9. $y' = \sqrt{t + y}, \qquad y(0) = 3$
10. $y' = 2t + e^{-ty}, \qquad y(0) = 1$
11. $y' = (4 - ty)/(1 + y^2), \qquad y(0) = -2$
12. $y' = (y^2 + 2ty)/(3 + t^2), \qquad y(0) = 0{,}5$
13. Complete os cálculos necessários para se obter os elementos nas colunas quatro e cinco da Tabela 8.2.1.
14. Neste problema, vamos provar que o erro de truncamento local para a fórmula de Euler aprimorada é proporcional a h^3. Se supusermos que a solução ϕ do problema de valor inicial $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ tem derivadas contínuas até a terceira ordem (f tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas), segue que

$$\phi(t_n + h) = \phi(t_n) + \phi'(t_n)h + \frac{\phi''(t_n)}{2!}h^2 + \frac{\phi'''(\bar{t}_n)}{3!}h^3,$$

onde $t_n < \bar{t}_n < t_n + h$. Suponha que $y_n = \phi(t_n)$.
(a) Mostre que, para y_{n+1} dado pela Eq. (5),

$$e_{n+1} = \phi(t_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{\phi''(t_n)h - \{f[t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n)] - f(t_n, y_n)\}}{2!}h + \frac{\phi'''(\bar{t}_n)h^3}{3!}. \qquad \text{(i)}$$

(b) Usando os fatos de que $\phi''(t) = f_t[t, \phi(t)] + f_y[t, \phi(t)]\phi'(t)$ e a aproximação de Taylor com resto para uma função $F(t, y)$ de duas variáveis é da forma

$$F(a+h, b+k) = F(a, b) + F_t(a, b)h + F_y(a, b)k + \frac{1}{2!}(h^2F_{tt} + 2hkF_{ty} + k^2F_{yy})\Big|_{x=\xi, y=\eta}$$

onde ξ está entre a e $a + h$ e η está entre b e $b + k$, mostre que o primeiro termo à direita do sinal de igualdade na Eq. (i) é proporcional a h^3 mais termos de ordem maior. Esse é o resultado desejado.
(c) Mostre que, se $f(t, y)$ é linear em t e y, então $e_{n+1} = \phi'''(\bar{t}_n)h^3/6$, onde $t_n < \bar{t}_n < t_{n+1}$. *Sugestão*: O que são f_{tt}, f_{ty} e f_{yy}?
15. Considere o método de Euler aprimorado para resolver o problema de valor inicial ilustrativo $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$. Usando o resultado do Problema 14(c) e a solução exata do problema de valor inicial, determine e_{n+1} e uma cota para o erro em qualquer passo em $0 \le t \le 1$. Compare esse erro com o obtido na Eq. (26) da Seção 8.1 usando o método de Euler. Obtenha, também, uma cota para e_1 com $h = 0{,}05$ e compare com a Eq. (27) da Seção 8.1.

Nos Problemas 16 e 17, use a solução exata $\phi(t)$ para determinar e_{n+1} e uma cota para e_{n+1} em qualquer passo no intervalo $0 \le t \le 1$ para o método de Euler aprimorado para o problema de valor inicial dado. Obtenha, também, uma cota para e_1 com $h = 0{,}1$ e compare com a estimativa semelhante para o método de Euler e com o erro exato usando o método de Euler aprimorado.

16. $y' = 2y - 1, \qquad y(0) = 1$
17. $y' = 0{,}5 - t + 2y, \qquad y(0) = 1$

Nos problemas de 18 a 21, efetue um passo do método de Euler e do método de Euler aprimorado usando o tamanho de passo $h = 0{,}1$. Suponha que se deseja um erro de truncamento local não maior do que 0,0025. Estime o tamanho de passo necessário para o método de Euler satisfazer essa condição no primeiro passo.

18. $y' = 0{,}5 - t + 2y, \qquad y(0) = 1$
19. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \qquad y(0) = 2$
20. $y' = \sqrt{t + y}, \qquad y(0) = 3$
21. $y' = (y^2 + 2ty)/(3 + t^2), \qquad y(0) = 0{,}5$
22. A **fórmula de Euler modificada** para o problema de valor inicial $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, é dada por

$$y_{n+1} = y_n + hf[t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hf(t_n, y_n)].$$

Seguindo o procedimento esquematizado no Problema 14, mostre que o erro de truncamento local na fórmula de Euler modificada é proporcional a h^3.

Nos problemas de 23 a 26, use a fórmula de Euler modificada do Problema 22 com $h = 0{,}05$ para calcular valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0{,}1$; $0{,}2$; $0{,}3$ e $0{,}4$. Compare os resultados com os obtidos nos problemas de 1 a 4.

23. $y' = 3 + t - y, \qquad y(0) = 1$
24. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \qquad y(0) = 2$
25. $y' = 2y - 3t, \qquad y(0) = 1$
26. $y' = 2t + e^{-ty}, \qquad y(0) = 1$
27. Mostre que a fórmula de Euler modificada do Problema 22 é idêntica à fórmula de Euler aprimorada da Eq. (5) para $y' = f(t, y)$ se f é linear em ambos t e y.

8.3 O Método de Runge-Kutta

Introduzimos, nas seções anteriores, a fórmula de Euler, a fórmula de Euler inversa e a fórmula de Euler aprimorada como maneiras de resolver o problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0 \qquad (1)$$

numericamente. Os erros de truncamento locais para esses métodos são proporcionais a h^2, h^2 e h^3, respectivamente. Os métodos de Euler e de Euler aprimorado pertencem ao que é conhecida hoje como classe de métodos de Runge-Kutta.[1]

Nesta seção, vamos discutir o método desenvolvido, originalmente, por Runge e Kutta. Esse método é chamado, atualmente, de método clássico de Runge-Kutta de quarta ordem em quatro estágios, mas, na prática, as pessoas se referem a ele como, simplesmente, *o* método de Runge-Kutta e seguiremos essa prática. Esse método tem um erro de truncamento local proporcional a h^5. Assim, é duas ordens de grandeza mais preciso do que o método de Euler aprimorado e três ordens de grandeza mais preciso do que o método de Euler. Ele é relativamente simples de usar e é suficientemente preciso para tratar muitos problemas de maneira eficiente. Isso é particularmente verdadeiro para os métodos de Runge-Kutta adaptativos, nos quais pode-se variar o tamanho dos passos quando necessário. Voltaremos a esse assunto no final desta seção.

[1] Carl David Runge (1856-1927), matemático e físico alemão, trabalhou muitos anos em espectroscopia. A análise de dados o levou a considerar problemas em computação numérica, e o método de Runge-Kutta tem origem em seu artigo sobre soluções numéricas de equações diferenciais de 1895. O método foi estendido para sistemas de equações em 1901 por M. Wilhelm Kutta (1867-1944). Kutta era um matemático alemão que trabalhava com aerodinâmica e é, também, muito conhecido por suas contribuições importantes à teoria clássica de aerofólio.

A fórmula de Runge-Kutta envolve uma média ponderada de valores de $f(t, y)$ em pontos diferentes no intervalo $t_n \leq t \leq t_{n+1}$. É dada por

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}}{6}\right), \qquad (2)$$

onde

$$\begin{aligned} k_{n1} &= f(t_n, y_n) \\ k_{n2} &= f(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_{n1}), \\ k_{n3} &= f(t_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_{n2}), \\ k_{n4} &= f(t_n + h, y_n + hk_{n3}). \end{aligned} \qquad (3)$$

A soma $(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4})/6$ também pode ser interpretada como um coeficiente angular médio. Note que k_{n1} é o coeficiente angular no extremo esquerdo do intervalo, k_{n2} é o coeficiente angular no ponto médio usando-se a fórmula de Euler para ir de t_n até $t_n + h/2$, k_{n3} é a segunda aproximação do coeficiente angular no ponto médio e, k_{n4} é o coeficiente angular em $t_n + h$ usando a fórmula de Euler e o coeficiente angular k_{n3} para ir de t_n a $t_n + h$.

Embora, em princípio, não seja difícil mostrar que a Eq. (2) difere da expansão de Taylor da solução ϕ por termos proporcionais a h^5, os cálculos algébricos são bem longos.[2] Vamos, simplesmente, aceitar, então, o fato de que o erro de truncamento local ao se usar a Eq. (2) é proporcional a h^5 e que, para um intervalo finito, o erro de truncamento global é, no máximo, uma constante vezes h^4. A descrição anterior desse método como um método de quarta ordem em quatro estágios reflete os fatos de que o erro de truncamento global é de quarta ordem no tamanho do passo h e existem quatro estágios intermediários no cálculo (os cálculos de $k_{n1}, \ldots, k_{n4}$).

É claro que as fórmulas de Runge-Kutta, Eqs. (2) e (3), são mais complicadas que qualquer das fórmulas discutidas até agora. Isso não é muito importante, no entanto, já que não é difícil escrever um programa de computador que implemente esse método. Um tal programa tem a mesma estrutura que o algoritmo para o método de Euler esquematizado na Seção 8.1. Especificamente, as linhas no Passo 6 no algoritmo de Euler têm que ser substituídas pelas seguintes:

Passo 6. $k1 = f(t, y)$
$k2 = f(t + 0{,}5 * h, y + 0{,}5 * h * k1)$
$k3 = f(t + 0{,}5 * h, y + 0{,}5 * h * k2)$
$k4 = f(t + h, y + h * k3)$
$y = y + (h/6) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)$
$t = t + h$

Note que, se f não depende de y, então

$$k_{n1} = f(t_n), \qquad k_{n2} = k_{n3} = f(t_n + h/2), \qquad k_{n4} = f(t_n + h), \qquad (4)$$

e a Eq. (2) se reduz a

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{6}[f(t_n) + 4f(t_n + h/2) + f(t_n + h)]. \qquad (5)$$

A Eq. (5) pode ser identificada com a regra de Simpson[3] para o cálculo aproximado da integral de $y' = f(t)$. O fato de que a regra de Simpson tem um erro proporcional a h^5 é consistente com o erro de truncamento local na fórmula de Runge-Kutta.

Exemplo 1

Use o método de Runge-Kutta para calcular valores aproximados da solução $y = \phi(t)$ do problema de valor inicial

$$y' = 1 - t + 4y, \qquad y(0) = 1. \qquad (6)$$

Fazendo $h = 0{,}2$, temos

$$\begin{aligned} k_{01} &= f(0; 1) = 5; & hk_{01} &= 1{,}0, \\ k_{02} &= f(0 + 0{,}1; 1 + 0{,}5) = 6{,}9; & hk_{02} &= 1{,}38, \\ k_{03} &= f(0 + 0{,}1; 1 + 0{,}69) = 7{,}66; & hk_{03} &= 1{,}532, \\ k_{04} &= f(0 + 0{,}2; 1 + 1{,}532) = 10{,}928. \end{aligned}$$

TABELA 8.3.1 Uma Comparação dos Resultados para a Solução Numérica do Problema de Valor Inicial $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$

	Euler Aprimorado	Runge-Kutta			
t	$h = 0{,}025$	$h = 0{,}2$	$h = 0{,}1$	$h = 0{,}05$	Exata
0	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
0,1	1,6079462		1,6089333	1,6090338	1,6090418
0,2	2,5020619	2,5016000	2,5050062	2,5053060	2,5053299
0,3	3,8228282		3,8294145	3,8300854	3,8301388
0,4	5,7796888	5,7776358	5,7927853	5,7941198	5,7942260
0,5	8,6849039		8,7093175	8,7118060	8,7120041
1,0	64,497931	64,441579	64,858107	64,894875	64,897803
1,5	474,83402		478,81928	479,22674	479,25919
2,0	3496,6702	3490,5574	3535,8667	3539,8804	3540,2001

[2] Veja, por exemplo, o Cap. 3 do livro de Henrici, listado nas referências.

[3] O nome regra de Simpson é em homenagem a Thomas Simpson (1710 - 1761), um matemático inglês e autor de livros-texto, que publicou esse resultado em 1743.

Logo,

$$y_1 = 1 + \frac{0.2}{6}[5 + 2(6.9) + 2(7.66) + 10.928]$$
$$= 1 + 1.5016 = 2.5016.$$

A Tabela 8.3.1 mostra outros resultados obtidos pelo método de Runge-Kutta com $h = 0,2$, $h = 0,1$ e $h = 0,05$. Note que o método fornece um valor em $t = 2$ que difere da solução exata por apenas 0,122%, se o tamanho do passo é $h = 0,1$, e por apenas 0,00903% se $h = 0,05$. No último caso, o erro é menor do que 1 em dez mil, e o valor calculado em $t = 2$ está correto até quatro dígitos.

Para efeitos de comparação, note que ambos os métodos de Runge-Kutta com $h = 0,05$ e o de Euler aprimorado com $h =$ 0,025 precisam de 160 cálculos de valores de f para chegar a $t =$ 2. O método de Euler aprimorado fornece um resultado em $t =$ 2 com erro de 1,23%. Embora esse erro possa ser aceitável para alguns fins, é mais de 135 vezes o erro feito pelo método de Runge-Kutta com esforço computacional comparável. Note, também, que o método de Runge-Kutta com $h = 0,2$, ou 40 cálculos de valores de f, produz um valor em $t = 2$ com erro de 1,40%, que é ligeiramente maior do que o erro no método de Euler aprimorado com $h = 0,025$, que calcula 160 valores de f. Assim, vemos, de novo, que um algoritmo mais preciso é mais eficiente; produz melhores resultados com esforço semelhante ou resultados análogos com menos esforço.

O método de Runge-Kutta clássico tem o mesmo defeito que os outros métodos com tamanho de passo fixo para problemas nos quais o erro de truncamento local varia muito no intervalo de interesse. Em outras palavras, um tamanho de passo suficientemente pequeno para se obter precisão satisfatória em algumas partes do intervalo pode ser muito menor do que o necessário em outras partes do intervalo. Isso estimulou o desenvolvimento de métodos de Runge-Kutta adaptativos que modificam o tamanho do passo automaticamente ao longo dos cálculos, de modo a manter o erro de truncamento local próximo de, ou menor do que, um nível de tolerância especificado. Como explicado na Seção 8.2, isso requer a estimativa do erro de truncamento local em cada passo. Um modo de fazer isso é repetir os cálculos com um método de quinta ordem — que tem um erro de truncamento local proporcional a h^6 — e depois usar a diferença entre os resultados como uma estimativa do erro. Se isso for feito de um modo direto (não sofisticado), então a utilização do método de quinta ordem precisa de, pelo menos, mais cinco cálculos de f em cada passo, além dos originalmente necessários para o método de quarta ordem. No entanto, se escolhermos apropriadamente os pontos intermediários e os coeficientes nas expressões para k_{n1}, ... em determinado método de Runge-Kutta de quarta ordem, então essas expressões podem ser usadas novamente, junto com um estágio adicional, em um método de quinta ordem correspondente. Isso resulta em um aumento substancial de eficiência. Acontece que isso pode ser feito de mais de uma maneira[4]. Os métodos de Runge-Kutta adaptativos resultantes são muito poderosos e fornecem meios eficientes de se aproximar numericamente as soluções de uma classe enorme de problemas de valores iniciais. Implementações específicas de um ou mais desses métodos estão amplamente disponíveis em pacotes comerciais de programas para computadores.

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, encontre valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0,1; 0,2; 0,3$ e $0,4$. Compare os resultados com os obtidos usando outros métodos e com a solução exata (se disponível).

(a) Use o método de Runge-Kutta com $h = 0,1$.
(b) Use o método de Runge-Kutta com $h = 0,05$.

1. $y' = 3 + t - y, \quad y(0) = 1$
2. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
3. $y' = 2y - 3t, \quad y(0) = 1$
4. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$
5. $y' = \dfrac{y^2 + 2ty}{3 + t^2}, \quad y(0) = 0,5$
6. $y' = (t^2 - y^2)\operatorname{sen} y, \quad y(0) = -1$

Nos problemas de 7 a 12, encontre valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0,5; 1,0; 1,5$ e $2,0$. Compare os resultados com os obtidos usando outros métodos.

(a) Use o método de Runge-Kutta com $h = 0,1$.
(b) Use o método de Runge-Kutta com $h = 0,05$.

7. $y' = 0,5 - t + 2y, \quad y(0) = 1$
8. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
9. $y' = \sqrt{t + y}, \quad y(0) = 3$
10. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$
11. $y' = (4 - ty)/(1 + y^2), \quad y(0) = -2$
12. $y' = (y^2 + 2ty)/(3 + t^2), \quad y(0) = 0,5$
13. Confirme os resultados na Tabela 8.3.1 efetuando os cálculos indicados.
14. Considere o problema de valor inicial
$$y' = t^2 + y^2, \qquad y(0) = 1.$$
(a) Desenhe um campo de direções para essa equação.
(b) Use o método de Runge-Kutta ou outro método para encontrar valores aproximados da solução em $t = 0,8; 0,9$ e $0,95$. Escolha um tamanho de passo suficientemente pequeno de modo que você acredite que seus resultados tenham precisão de, pelo menos, quatro dígitos.
(c) Tente estender os cálculos no item (b) para obter uma aproximação precisa da solução em $t = 1$. Se encontrar dificuldade em fazer isso, explique por que você acha que isso acontece. O campo de direções no item (a) pode ajudar.
15. Considere o problema de valor inicial
$$y' = 3t^2/(3y^2 - 4), \qquad y(0) = 0.$$
(a) Desenhe um campo de direções para essa equação.
(b) Estime até onde a solução pode ser estendida para a direita. Seja t_M a extremidade direita do intervalo de existência dessa solução. O que acontece em t_M que impede a solução de continuar?
(c) Use o método de Runge-Kutta com diversos tamanhos de passos para encontrar um valor aproximado de t_M.
(d) Se você continuar os cálculos além de t_M, você pode continuar a gerar valores de y. Qual o significado (se há algum) desses valores?
(e) Suponha que a condição inicial seja modificada para $y(0) = 1$. Repita os itens (b) e (c) para esse problema.

[4] O primeiro par de métodos de Runge-Kutta de quarta e quinta ordens usado amplamente foi desenvolvido por Erwin Fehlberg no final da década de 1960. Sua popularidade foi consideravelmente aumentada pelo aparecimento em 1977 de sua implementação RKF45 em Fortran desenvolvida por Lawrence F. Shampine e H. A. Watts.

8.4 Métodos de Passos Múltiplos

Discutimos, em seções anteriores, procedimentos numéricos para resolver o problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0, \tag{1}$$

no qual os dados no ponto t_n são usados para calcular um valor aproximado da solução $\phi(t_{n+1})$ no próximo ponto da partição $t = t_{n+1}$. Em outras palavras, o valor calculado ϕ em qualquer ponto da partição depende, apenas, dos dados no ponto anterior da partição. Tais métodos são chamados de **métodos de partida** ou **métodos de passo único**. Entretanto, uma vez obtidos valores aproximados da solução $y = \phi(t)$ em alguns pontos além de t_0, é natural perguntar se podemos usar alguma dessas informações, em vez de apenas o valor no último ponto, para calcular o valor de $\phi(t)$ no próximo ponto. Especificamente, se são conhecidos y_1 em t_1, y_2 em t_2, ..., y_n em t_n, como podemos usar essa informação para determinar y_{n+1} em t_{n+1}? Métodos que utilizam informação em mais do que o último ponto da partição são conhecidos como **métodos de passos múltiplos**. Vamos descrever dois tipos de tais métodos nesta seção, os métodos de Adams[5] e as fórmulas inversas de diferenciação. Dentro de cada tipo, pode-se obter níveis diversos de precisão, dependendo do número de pontos de dados utilizados. Por simplicidade, vamos supor ao longo de nossa discussão que o tamanho do passo h seja constante.

Métodos de Adams. Lembre que

$$\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi'(t)\,dt, \tag{2}$$

onde $\phi(t)$ é a solução do problema de valor inicial (1). A idéia básica de um método de Adams é aproximar $\phi'(t)$ por um polinômio $P_k(t)$ de grau k e usar o polinômio para calcular a integral na Eq. (2). Os coeficientes de $P_k(t)$ são determinados usando-se os $k + 1$ dados calculados anteriormente. Por exemplo, suponha que queremos usar um polinômio de grau um $P_1(t) = At + B$. Precisamos, então, de apenas dois pontos de dados, (t_n, y_n) e (t_{n-1}, y_{n-1}). Como P_1 deve ser uma aproximação de ϕ', fazemos $P_1(t_n) = f(t_n, y_n)$ e $P_2(t_n) = f(t_{n-1}, y_{n-1})$. Lembre que denotamos $f(t_j, y_j)$ por f_j para j inteiro. Então, A e B têm que satisfazer as equações

$$\begin{aligned} At_n + B &= f_n, \\ At_{n-1} + B &= f_{n-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Resolvendo para A e B, obtemos

$$A = \frac{f_n - f_{n-1}}{h}, \qquad B = \frac{f_{n-1}t_n - f_n t_{n-1}}{h}. \tag{4}$$

Substituindo $\phi'(t)$ por $P_2(t)$ e calculando a integral na Eq. (2), vemos que

$$\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n) = \frac{A}{2}(t_{n+1}^2 - t_n^2) + B(t_{n+1} - t_n).$$

Finalmente, substituímos $\phi(t_{n+1})$ e $\phi(t_n)$ por y_{n+1} e y_n, respectivamente, e fazemos algumas simplificações algébricas. Para um tamanho de passo constante h, obtemos

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{3}{2}hf_n - \tfrac{1}{2}hf_{n-1}. \tag{5}$$

A Eq. (5) é a fórmula de Adams-Bashforth de segunda ordem. É uma fórmula explícita para y_{n+1} em função de y_n e y_{n-1} e tem erro de truncamento local proporcional a h^3.

Observamos que a fórmula de Adams-Bashforth de primeira ordem, baseada no polinômio $P_0(t) = f_n$ de grau zero, é, simplesmente, a fórmula de Euler original.

Fórmulas de Adams mais precisas podem ser obtidas usando-se o procedimento esquematizado anteriormente, só que com um polinômio de ordem maior e um número correspondente maior de pontos. Por exemplo, suponha que está sendo usado um polinômio de grau três, $P_3(t)$. Os coeficientes são determinados pelos quatro pontos (t_n, y_n), (t_{n-1}, y_{n-1}), (t_{n-2}, y_{n-2}) e (t_{n-3}, y_{n-3}). Substituindo $\phi'(t)$ por esse polinômio na Eq. (2), calculando a integral e simplificando o resultado, obtemos, finalmente, a fórmula de Adams-Bashforth de quarta ordem,

$$y_{n+1} = y_n + (h/24)(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}). \tag{6}$$

O erro de truncamento local para essa fórmula de quarta ordem é proporcional a h^5.

Uma variação na dedução das fórmulas de Adams-Bashforth fornece outro conjunto de fórmulas conhecido como fórmulas de Adams-Moulton.[6] Para ver a diferença, vamos considerar, novamente, o caso de segunda ordem. Novamente, usamos um polinômio de primeiro grau $Q_1(t) = \alpha t + \beta$, mas determinamos os coeficientes usando os pontos (t_n, y_n) e (t_{n+1}, y_{n+1}). Então, α e β satisfazem

$$\begin{aligned} \alpha t_n + \beta &= f_n, \\ \alpha t_{n+1} + \beta &= f_{n+1}, \end{aligned} \tag{7}$$

e segue que

$$\alpha = \frac{f_{n+1} - f_n}{h}, \qquad \beta = \frac{f_n t_{n+1} - f_{n+1} t_n}{h}. \tag{8}$$

Substituindo $\phi'(t)$ na Eq. (2) por $Q_2(t)$ e simplificando, obtemos

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{2}hf_n + \tfrac{1}{2}hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \tag{9}$$

que é a fórmula de Adams-Moulton de segunda ordem. Escrevemos $f(t_{n+1}, y_{n+1})$ no último termo para enfatizar que a fórmula de Adams-Moulton é implícita, em vez de explícita, já que a incógnita y_{n+1} aparece nos dois lados da equação. O erro de truncamento local para a fórmula de Adams-Moulton de segunda ordem é proporcional a h^3.

A fórmula de Adams-Moulton de primeira ordem é simplesmente a fórmula de Euler inversa, como você poderia imaginar por analogia com a fórmula de Adams-Bashforth de primeira ordem.

Fórmulas mais precisas de ordem mais alta podem ser obtidas usando-se um polinômio de maior grau. A fórmula de Adams-Moulton de quarta ordem, com um erro de truncamento local proporcional a h^5, é

$$y_{n+1} = y_n + (h/24)(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}). \tag{10}$$

Observe que essa é, também, uma fórmula implícita, já que y_{n+1} aparece em f_{n+1}.

Embora ambas as fórmulas de Adams-Bashforth e de Adams-Moulton de mesma ordem tenham erro de truncamento lo-

[5]John Couch Adams (1819-1892), astrônomo inglês, é mais famoso pela sua descoberta, junto com Joseph Leverrier, do planeta Netuno em 1846. Adams era, também, extremamente habilidoso em cálculo; seu procedimento para integração numérica de equações diferenciais apareceu em 1883 em um livro de co-autoria com Francis Bashforth sobre ação capilar.

[6]Forest Ray Moulton (1872-1952) foi um astrônomo e administrador científico americano. Enquanto calculava trajetórias balísticas durante a Primeira Guerra Mundial, fez melhorias substanciais na fórmula de Adams.

cal proporcionais à mesma potência de h, as fórmulas de Adams-Moulton de ordem não muito alta são, de fato, bem mais precisas. Por exemplo, para as fórmulas de quarta ordem (6) e (10), a constante de proporcionalidade para a fórmula de Adams-Moulton é menor do que 1/10 da constante de proporcionalidade para a fórmula de Adams-Bashforth. A pergunta natural é, então: deve-se usar a fórmula de Adams-Bashforth explícita (e mais rápida) ou a fórmula de Adams-Moulton, mais precisa, porém implícita (e mais lenta)? A resposta depende de, ao se usar a fórmula mais precisa, poder-se aumentar o tamanho do passo, reduzindo o número de passos, de modo a compensar os cálculos adicionais que têm que ser feitos em cada passo.

De fato, analistas numéricos tentaram obter, ao mesmo tempo, simplicidade e precisão combinando as duas fórmulas no que é conhecido como **método de previsão e correção**. Uma vez conhecidos $y_{n-3}, y_{n-2}, y_{n-1}$ e y_n, podemos calcular $f_{n-3}, f_{n-2}, f_{n-1}$ e f_n, e depois usar a fórmula de Adams-Bashforth (6) (para a previsão) para obter um primeiro valor para y_{n+1}. Calculamos, então, f_{n+1} e usamos a fórmula de Adams-Moulton (10) (para a correção), que não é mais implícita, para obter um valor melhorado de y_{n+1}. Podemos, é claro, continuar a usar a fórmula de correção (10) se a mudança em y_{n+1} for muito grande. No entanto, se for necessário usar a fórmula de correção mais de uma, ou talvez duas vezes, isso significa que o tamanho do passo h está muito grande e deve ser reduzido.

Para se usar qualquer dos métodos de passos múltiplos, é necessário calcular, primeiro, alguns y_j por outro método. Por exemplo, o método de Adams-Moulton de quarta ordem precisa de valores para y_1 e y_2, enquanto o método de Adams-Bashforth de quarta ordem precisa, também, de um valor para y_3. Uma maneira de proceder é usar um método de partida de precisão comparável para se calcular os valores iniciais necessários. Então, para um método de passos múltiplos de quarta ordem, pode-se usar o método de Runge-Kutta para calcular os valores iniciais. Esse é o método utilizado no próximo exemplo.

Uma outra abordagem é usar um método de ordem baixa com um h bem pequeno para calcular y_1 e, depois, ir aumentando, gradualmente, tanto a ordem quanto o tamanho do passo até determinar um número suficiente de valores.

Exemplo 1

Considere, novamente, o problema de valor inicial

$$y' = 1 - t + 4y, \qquad y(0) = 1. \tag{11}$$

Com um tamanho de passo $h = 0{,}1$, determine um valor aproximado da solução $y = \phi(t)$ em $t = 0{,}4$ usando a fórmula de Adams-Bashforth de quarta ordem, a fórmula de Adams-Moulton de quarta ordem e o método de previsão e correção.

Para os dados iniciais, vamos usar os valores y_1, y_2 e y_3 obtidos pelo método de Runge-Kutta. Esses valores estão na Tabela 8.3.1. A seguir, calculamos os valores correspondentes de $f(t, y)$, obtendo

$$\begin{aligned} y_0 &= 1, & f_0 &= 5, \\ y_1 &= 1{,}6089333, & f_1 &= 7{,}3357332, \\ y_2 &= 2{,}5050062, & f_2 &= 10{,}820025, \\ y_3 &= 3{,}8294145, & f_3 &= 16{,}017658. \end{aligned}$$

Então, da fórmula de Adams-Bashforth, Eq. (6), vemos que $y_4 = 5{,}7836305$. O valor exato da solução em $t = 0{,}4$, correto até oito dígitos, é 5,7942260, de modo que o erro é $-0{,}010595$.

A fórmula de Adams-Moulton, Eq. (10), nos leva à equação

$$y_4 = 4{,}9251275 + 0{,}15y_4,$$

de onde segue que $y_4 = 5{,}7942676$, com um erro de, apenas, 0,0000416.

Finalmente, usando o resultado da fórmula de Adams-Bashforth como valor previsto para $\phi(0{,}4)$, podemos usar a Eq. (10) para correção. Correspondendo ao valor previsto de y_4, encontramos $f_4 = 23{,}734522$. Portanto, da Eq. (10), o valor correto de y_4 é 5,7926721. Isso resulta em um erro de $-0{,}0015539$.

Observe que o método de Adams-Bashforth é o mais simples e mais rápido desses métodos, já que envolve apenas o cálculo de uma única fórmula explícita. Também é o menos preciso. Usar a fórmula de Adams-Moulton como corretor aumenta a quantidade de cálculos, mas o método ainda é explícito. Neste exemplo, o erro no valor corrigido de y_4 é reduzido por, aproximadamente, um fator de 7, quando comparado com o erro no valor previsto. O método de Adams-Moulton sozinho fornece o melhor resultado, de longe, com um erro em torno de 1/40 do erro do método de previsão e correção. Lembre-se, no entanto, de que a fórmula de Adams-Moulton é implícita, o que significa que é necessário resolver uma equação em cada passo. No problema considerado aqui, essa equação é linear, logo a solução foi encontrada rapidamente, mas, em outros problemas, essa parte do procedimento pode levar muito mais tempo.

O método de Runge-Kutta com $h = 0{,}1$ fornece $y_4 = 5{,}7927853$, com um erro de $-0{,}0014407$; veja a Tabela 8.3.1. Assim, para esse problema, o método de Runge-Kutta é comparável, em precisão, ao método de previsão e correção.

Fórmulas Inversas de Diferenciação. Um outro tipo de método de passos múltiplos usa um polinômio $P_k(t)$ para aproximar a solução $\phi(t)$ do problema de valor inicial (1), em vez de sua derivada $\phi'(t)$ como nos métodos de Adams. Derivamos, então, $P_k(t)$ e igualamos $P_k'(t_{n+1})$ a $f(t_{n+1}, y_{n+1})$ para obter uma fórmula implícita para y_{n+1}. Essas são chamadas de **fórmulas inversas de diferenciação**.

O caso mais simples usa um polinômio de primeiro grau $P_1(t) = At + B$. Os coeficientes são escolhidos de acordo com os valores da solução y_n e y_{n+1}. Logo, A e B têm que satisfazer

$$\begin{aligned} At_n + B &= y_n, \\ At_{n+1} + B &= y_{n+1}. \end{aligned} \tag{12}$$

Como $P_1'(t) = A$, a condição

$$P_1'(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

é, simplesmente,

$$A = f(t_{n+1}, y_{n+1}). \tag{13}$$

Subtraindo a primeira das Eqs. (12) da segunda, obtemos uma outra expressão para A,

$$A = (y_{n+1} - y_n)/h.$$

Substituindo esse valor de A na Eq. (13) e rearrumando os termos, obtemos a fórmula inversa de diferenciação de primeira ordem

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}). \tag{14}$$

Note que a Eq. (14) é, simplesmente, a fórmula de Euler inversa que vimos na Seção 8.1.

Usando polinômios de maior ordem e mais pontos de dados correspondentes, pode-se obter fórmulas inversas de diferenciação de qualquer ordem. A fórmula de segunda ordem é

$$y_{n+1} = \tfrac{1}{3}\left[4y_n - y_{n-1} + 2hf(t_{n+1}, y_{n+1})\right] \qquad (15)$$

e a de quarta ordem é

$$y_{n+1} = \tfrac{1}{25}\left[48y_n - 36y_{n-1} + 16y_{n-2} - 3y_{n-3} + 12hf(t_{n+1}, y_{n+1})\right]. \qquad (16)$$

Essas fórmulas têm erros de truncamento local proporcionais a h^3 e h^5, respectivamente.

Exemplo 2

Use a fórmula inversa de diferenciação de quarta ordem com $h = 0{,}1$ e os dados do Exemplo 1 para determinar um valor aproximado da solução $y = \phi(t)$ em $t = 0{,}4$ para o problema de valor inicial (11).

Usando a Eq. (16) com $n = 3$, $h = 0{,}1$ e $y_0, \ldots, y_n$ dados no Exemplo 1, obtemos a equação

$$y_4 = 4{,}6837842 + 0{,}192y_4.$$

Logo,

$$y_4 = 5{,}7967626.$$

Comparando o valor calculado com o valor exato $\phi(0{,}4) = 5{,}7942260$, vemos que o erro é de 0,0025366. Isso é um pouco melhor do que o resultado obtido pelo método de Adams-Bashforth, mas não é tão bom quanto o obtido pelo método de previsão e correção.

Uma comparação entre métodos de passo único e de passos múltiplos tem que levar em consideração diversos fatores. O método de Runge-Kutta de quarta ordem precisa de quatro cálculos de valores de f em cada passo, enquanto o método de Adams-Bashforth de quarta ordem (após os valores iniciais) precisa de apenas um, e o de previsão e correção, de apenas dois. Então, para um tamanho de passo h dado, os dois últimos métodos podem ser bem mais rápidos do que o de Runge-Kutta. No entanto, se o método de Runge-Kutta é mais preciso e usa, portanto, menos passos, então a diferença em velocidade será reduzida e, talvez, eliminada. Para o método de Adams-Moulton e as fórmulas inversas de diferenciação, é preciso levar em consideração, também, a dificuldade em se resolver a equação implícita em cada passo. Todos os métodos de passos múltiplos têm a possibilidade de que erros em passos anteriores possam ser realimentados em cálculos posteriores com conseqüências desfavoráveis. Por outro lado, as aproximações polinomiais subjacentes em métodos de passos múltiplos tornam fáceis aproximações da solução em pontos fora da partição, caso isso seja desejável. Os métodos de passos múltiplos tornaram-se populares principalmente porque é relativamente fácil tanto estimar o erro em cada passo, quanto ajustar a ordem e o tamanho do passo para controlá-lo. Para uma discussão mais profunda dessas questões, veja os livros citados no final deste capítulo; em particular, Shampine (1994) é uma fonte importante.

Problemas

Nos problemas de 1 a 5, determine um valor aproximado da solução em $t = 0{,}4$ e $t = 0{,}5$ usando o método indicado. Para os valores iniciais, use o método de Runge-Kutta; veja os problemas de 1 a 6 na Seção 8.3. Compare os resultados dos vários métodos entre si e com a solução exata (se disponível).

(a) Use o método de previsão e correção de quarta ordem com $h = 0{,}1$. Use a fórmula de correção uma vez em cada passo.

(b) Use o método de Adams-Moulton de quarta ordem com $h = 0{,}1$.

(c) Use o método inverso de diferenciação de quarta ordem com $h = 0{,}1$.

1. $y' = 3 + t - y, \quad y(0) = 1$
2. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
3. $y' = 2y - 3t, \quad y(0) = 1$
4. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$
5. $y' = \dfrac{y^2 + 2ty}{3 + t^2}, \quad y(0) = 0{,}5$
6. $y' = (t^2 - y^2)\operatorname{sen} y, \; y(0) = -1$

Nos problemas de 7 a 12, determine valores aproximados da solução do problema de valor inicial dado em $t = 0{,}5$; 1,0; 1,5 e 2,0, usando o método indicado. Para os valores iniciais, use os valores dados pelo método de Runge-Kutta; veja os problemas de 7 a 12 na Seção 8.3. Compare os resultados dos vários métodos entre si e com a solução exata (se disponível).

(a) Use o método de previsão e correção de quarta ordem com $h = 0{,}05$. Use a fórmula de correção uma vez em cada passo.

(b) Use o método de Adams-Moulton de quarta ordem com $h = 0{,}05$.

(c) Use o método inverso de diferenciação de quarta ordem com $h = 0{,}05$.

7. $y' = 0{,}5 - t + 2y, \quad y(0) = 1$
8. $y' = 5t - 3\sqrt{y}, \quad y(0) = 2$
9. $y' = \sqrt{t + y}, \quad y(0) = 3$
10. $y' = 2t + e^{-ty}, \quad y(0) = 1$
11. $y' = (4 - ty)/(1 + y^2), \quad y(0) = -2$
12. $y' = (y^2 + 2ty)/(3 + t^2), \quad y(0) = 0{,}5$
13. Mostre que o método de Adams-Bashforth de primeira ordem é o método de Euler e que o método de Adams-Moulton de primeira ordem é o método de Euler inverso.
14. Mostre que a fórmula de Adams-Bashforth de terceira ordem é
$$y_{n+1} = y_n + (h/12)(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}).$$
15. Mostre que a fórmula de Adams-Moulton de terceira ordem é
$$y_{n+1} = y_n + (h/12)(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}).$$
16. Deduza a fórmula inversa de diferenciação de segunda ordem dada pela Eq. (15) nesta seção.

8.5 Mais sobre Erros; Estabilidade

Discutimos, na Seção 8.1, algumas idéias relacionadas a erros que podem ocorrer aproximação numérica da solução do problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0. \tag{1}$$

Vamos continuar essa discussão nesta seção e vamos mostrar, também, outras dificuldades que podem aparecer. Alguns dos pontos que queremos destacar são bem difíceis de tratar em detalhes e, portanto, serão ilustrados através de exemplos.

Erros de Truncamento e de Arredondamento. Lembre que mostramos, para o método de Euler, que o erro de truncamento local é proporcional a h^2 e que, para um intervalo finito, o erro de truncamento global é, no máximo, uma constante vezes h. Em geral, para um método de ordem p, o erro de truncamento local é proporcional a h^{p+1} e o erro de truncamento global em um intervalo finito é limitado por uma constante vezes h^p. Para obter uma boa precisão, usamos, normalmente, um procedimento com p razoavelmente grande, talvez 4 ou mais. À medida que p aumenta, a fórmula que se usa para calcular y_{n+1} vai ficando, em geral, mais complicada, sendo, portanto, necessários mais cálculos em cada passo; no entanto, isso não apresenta um problema sério, a menos que $f(t, y)$ seja muito complicada ou que se tenha que repetir os cálculos muitas vezes. Se o tamanho do passo h for diminuído, o erro de truncamento global diminui pelo mesmo fator elevado à potência p. Entretanto, como mencionamos na Seção 8.1, se h for muito pequeno, serão necessários muitos passos para se cobrir um intervalo fixo e o erro de arredondamento global pode ser maior do que o erro de truncamento global. A Fig. 8.5.1 ilustra essa situação graficamente. Supomos que o erro de arredondamento R_n é proporcional ao número de cálculos efetuados e, portanto, inversamente proporcional ao tamanho do passo h. Por outro lado, o erro de truncamento E_n é proporcional a uma potência positiva de h. Da Eq. (17) da Seção 8.1, sabemos que o erro total é limitado por $|E_n| + |R_n|$; logo, queremos escolher h de modo a minimizar essa quantidade. O valor ótimo de h ocorre quando a taxa de crescimento do erro de truncamento (quando h aumenta) é equilibrada pela taxa de decaimento do erro de arredondamento, como indicado na Fig. 8.5.1.

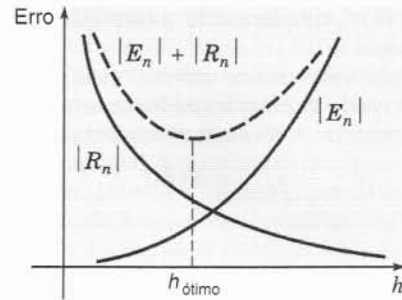


FIG. 8.5.1 A dependência dos erros de truncamento e de arredondamento em relação ao tamanho do passo h.

Exemplo 1

Considere o problema

$$y' = 1 - t + 4y, \qquad y(0) = 1. \tag{2}$$

Usando o método de Euler com diversos tamanhos de passos, calcule valores aproximados para a solução $\phi(t)$ em $t = 0{,}5$ e $t = 1$. Tente determinar o tamanho de passo ótimo.

Mantendo apenas quatro dígitos para diminuir os cálculos, obtemos os dados da Tabela 8.5.1. As duas primeiras colunas correspondem ao tamanho do passo h e ao número de passos N necessários para se atravessar o intervalo $0 \le t \le 1$. Então, $y_{N/2}$ e y_N são aproximações de $\phi(0{,}5) = 8{,}712$ e de $\phi(1) = 64{,}90$, respectivamente e aparecem na terceira e quinta colunas. As quarta e sexta colunas mostram as diferenças entre os valores calculados e o valor exato da solução.

Para tamanhos de passos relativamente grandes, o erro de arredondamento é muito menor do que o erro de truncamento global. Em conseqüência, o erro total é aproximadamente igual ao erro de truncamento global, que é, para o método de Euler, limitado por uma constante vezes h. Assim, ao se reduzir o tamanho do passo, o erro é reduzido proporcionalmente. As três primeiras linhas na Tabela 8.5.1 mostram esse tipo de comportamento. Para $h = 0{,}001$ o erro continua sendo reduzido, mas muito menos, proporcionalmente; isso indica que o erro de arredondamento está se tornando importante. Ao se reduzir h ainda mais, o erro começa a flutuar, e torna-se problemática a obtenção de melhorias significativas na precisão. Para valores de h menores do que 0,0005, o erro está, claramente, aumentando, o que indica que o erro de arredondamento é agora a parte dominante do erro total.

Esses resultados também podem ser expressos em termos do número de passos N. Para N menor do que algo em torno de 1000, a precisão pode ser melhorada usando-se mais passos, enquanto para N maior do que algo em torno de 2000, o aumento do número de passos tem o efeito contrário. Assim, para esse problema, é melhor usar um N que esteja entre 1000 e 2000. Para os cálculos ilustrados na Tabela 8.5.1, o melhor resultado para $t = 0{,}5$ ocorre para $N = 1000$, enquanto o melhor resultado para $t = 1$ é para $N = 1600$.

TABELA 8.5.1 Aproximações da Solução do Problema de Valor Inicial $y' = 1 - t + 4y$, $y(0) = 1$, Usando o Método de Euler com Tamanhos de Passos Diferentes

h	N	$y_{N/2}$	Erro	y_N	Erro
0,01	100	8,390	0,322	60,12	4,78
0,005	200	8,551	0,161	62,51	2,39
0,002	500	8,633	0,079	63,75	1,15
0,001	1000	8,656	0,056	63,94	0,96
0,0008	1250	8,636	0,076	63,78	1,12
0,000625	1600	8,616	0,096	64,35	0,55
0,0005	2000	8,772	0,060	64,00	0,90
0,0004	2500	8,507	0,205	63,40	1,50
0,00025	4000	8,231	0,481	56,77	8,13

Deve-se ter cuidado para não se inferir muitas coisas dos resultados mostrados no Exemplo 1. Os intervalos para os valores ótimos para h e N dependem da equação diferencial, do método numérico usado e do número de dígitos que são retidos nos cálculos. Apesar disso, é verdade, em geral, que se são necessários passos demais em um cálculo, então, provavelmente, o erro de arredondamento vai acabar acumulando a tal ponto que pode diminuir, consideravelmente, a precisão do procedimento. Isso não nos preocupa em muitos problemas: para eles, qualquer um dos métodos de quarta ordem que discutimos nas Seções 8.3 e 8.4 produzirão bons resultados com um número de passos muito menor do que o que torna o erro de arredondamento importante. Para alguns problemas, no entanto, o erro de arredondamento torna-se de importância vital. Para tais problemas, a escolha do método pode ser crucial. Essa é, também, uma boa razão pela qual códigos modernos fornecem modos de ajuste do tamanho do passo durante o procedimento, usando um tamanho de passo grande sempre que possível e um tamanho muito pequeno apenas onde necessário.

Assíntotas Verticais. Como segundo exemplo, considere o problema de determinar a $y = \phi(t)$ de

$$y' = t^2 + y^2, \qquad y(0) = 1. \tag{3}$$

Como a equação diferencial é não-linear, o teorema de existência e unicidade (Teorema 2.4.2) só garante que existe solução em *algum* intervalo em torno de $t = 0$. Suponha que tentamos calcular uma solução do problema de valor inicial no intervalo $0 \le t \le 1$ usando procedimentos numéricos diferentes.

Se usarmos o método de Euler com $h = 0{,}1$; $0{,}05$ e $0{,}01$, encontramos os seguintes valores aproximados em $t = 1$: 7,189548; 12,32093 e 90,75551, respectivamente. As enormes diferenças entre os valores calculados são uma evidência convincente de que precisamos usar um método numérico mais preciso — o método de Runge-Kutta, por exemplo. Usando o método de Runge-Kutta com $h = 0{,}1$, obtemos o valor aproximado 735,0991 em $t = 1$, que é bem diferente dos obtidos pelo método de Euler. Repetindo os cálculos com $h = 0{,}05$ e $h = 0{,}01$, obtemos a informação interessante listada na Tabela 8.5.2.

Os valores em $t = 0{,}90$ são razoáveis e poderíamos acreditar que a solução tem um valor aproximado de 14,305 em $t = 0{,}90$. No entanto, não é claro o que acontece entre $t = 0{,}9$ e $t = 1{,}0$. Para ajudar a clarear o que está acontecendo, vamos fazer algumas aproximações analíticas da solução do problema de valor inicial (3). Note que, em $0 \le t \le 1$

$$y^2 \le t^2 + y^2 \le 1 + y^2. \tag{4}$$

Isso sugere que a solução $y = \phi_1(t)$ de

$$y' = 1 + y^2, \qquad y(0) = 1 \tag{5}$$

TABELA 8.5.2 Cálculo da Solução do Problema de Valor Inicial $y' = t^2 + y^2$, $y(0) = 1$, Usando o Método de Runge-Kutta

h	$t = 0{,}90$	$t = 1{,}0$
0,1	14,02182	735,0991
0,05	14,27117	$1{,}75863 \times 10^5$
0,01	14,30478	$2{,}0913 \times 10^{2893}$
0,001	14,30486	

e a solução $y = \phi_2(t)$ de

$$y' = y^2, \qquad y(0) = 1 \tag{6}$$

são cotas inferior e superior, respectivamente, para a solução $y = \phi(t)$ do problema original, já que todas essas soluções têm o mesmo valor no instante inicial. De fato, pode-se mostrar (pelo método de iteração da Seção 2.8, por exemplo) que $\phi_2(t) \le \phi(t) \le \phi_1(t)$ enquanto essas funções existirem. É importante observar que *podemos resolver* as Eqs. (5) e (6) para ϕ_1 e ϕ_2 por separação de variáveis. Encontramos

$$\phi_1(t) = \operatorname{tg}\left(t + \frac{\pi}{4}\right), \qquad \phi_2(t) = \frac{1}{1-t}. \tag{7}$$

Logo, $\phi_2(t) \to \infty$ quando $t \to 1$ e $\phi_1(t) \to \infty$ quando $t \to \pi/4 \approx 0{,}785$. Esses cálculos mostram que a solução do problema de valor inicial original existe pelo menos em $0 \le t < \pi/4$ e, no máximo, em $0 \le t < 1$. A solução do problema (3) tem uma assíntota vertical para algum t em $\pi/4 \le t \le 1$ e, portanto, não existe em todo o intervalo $0 \le t \le 1$.

Nossos cálculos numéricos, no entanto, sugerem que podemos ir além de $t = \pi/4$ e, provavelmente, além de $t = 0{,}9$. Supondo que a solução do problema (3) existe em $t = 0{,}9$ e tem um valor aproximado de 14,305, podemos obter uma estimativa mais precisa do que acontece para t maiores considerando os problemas de valor inicial (5) e (6) com a condição $y(0) = 1$ substituída por $y(0{,}9) = 14{,}305$. Obtemos, então,

$$\phi_1(t) = \operatorname{tg}(t + 0{,}60100), \ \phi_2(t) = 1/(0{,}96991 - t), \tag{8}$$

onde guardamos apenas seis casas decimais. Logo, $\phi_1(t) \to \infty$ quando $t \to \pi/2 - 0{,}60100 \approx 0{,}96980$ e $\phi_2(t) \to \infty$ quando $t \to 0{,}96991$. Concluímos que a assíntota da solução do problema de valor inicial (3) está entre esses dois valores. Esse exemplo ilustra que tipo de informação pode ser obtida por uma combinação cuidadosa de métodos analítico e numérico.

Estabilidade. O conceito de estabilidade está associado à possibilidade de pequenos erros introduzidos durante um procedimento matemático poderem ser reduzidos à medida que o procedimento continua. Reciprocamente, ocorre instabilidade se pequenos erros tendem a aumentar, talvez sem limite. Por exemplo, identificamos, na Seção 2.5, soluções de equilíbrio de uma equação diferencial como sendo (assintoticamente) estáveis ou instáveis, dependendo de as soluções inicialmente próximas à solução de equilíbrio tenderem a se aproximar ou a se afastar dela quando t aumenta. De maneira um pouco mais geral, a solução de um problema de valor inicial é assintoticamente estável se soluções inicialmente próximas tendem a se aproximar da solução dada e é assintoticamente instável se tendem a se afastar. Visualmente, em um problema assintoticamente estável os gráficos das soluções estão próximos, enquanto em um problema instável eles se separam.

Se estamos resolvendo numericamente um problema de valor inicial, o melhor que podemos esperar é que a aproximação numérica tenha comportamento semelhante ao da solução exata. Não podemos transformar um problema instável em um estável simplesmente resolvendo-o numericamente. No entanto, pode acontecer que um procedimento numérico introduza instabilidade, que não fazia parte do problema original, o que pode causar problemas ao se aproximar a solução. Para evitar tal instabilidade, pode ser necessário colocar restrições sobre o tamanho do passo h.

Para ilustrar o que pode acontecer no contexto mais simples possível, considere a equação diferencial

$$dy/dt = ry, \tag{9}$$

onde r é constante. Suponha que, ao resolver essa equação, chegamos ao ponto (t_n, y_n). Vamos comparar a solução exata da Eq. (9) que tem esse valor, isto é,

$$y = y_n \exp[r(t - t_n)], \tag{10}$$

com aproximações numéricas obtidas da fórmula de Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \tag{11}$$

e da fórmula inversa de Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}). \tag{12}$$

Da fórmula de Euler (11), obtemos

$$y_{n+1} = y_n + hry_n = y_n(1 + rh). \tag{13}$$

Analogamente, da fórmula inversa de Euler (12), obtemos

$$y_{n+1} = y_n + hry_{n+1},$$

ou

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - rh} = y_n[1 + rh + (rh)^2 + \cdots]. \tag{14}$$

Finalmente, calculando a solução (10) em $t_n + h$, encontramos

$$y_{n+1} = y_n \exp(rh) = y_n \left[1 + rh + \frac{(rh)^2}{2} + \cdots\right]. \tag{15}$$

Comparando as Eqs. (13), (14) e (15), vemos que os erros em ambas as fórmulas de Euler são da ordem de h^2, como previsto pela teoria.

Suponha agora que mudamos o valor de y_n para $y_n + \delta$. Se quiser, pode pensar em δ como sendo um erro acumulado até chegarmos a $t = t_n$. A questão é saber se esse erro aumenta ou diminui quando se faz mais um passo para t_{n+1}.

Para a solução exata (15), a mudança em y_{n+1} devida ao erro δ em y_n é, simplesmente, $\delta \exp(rh)$. Essa quantidade é menor do que δ se $\exp(rh) < 1$, isto é, se $r < 0$. Isso confirma nossa conclusão no Cap. 2 de que a Eq. (9) é assintoticamente estável se $r < 0$ e assintoticamente instável se $r > 0$.

Para o método de Euler inverso, a variação em y_{n+1} na Eq. (14) devida ao erro δ é $\delta/(1 - rh)$. Para $r \leq 0$, a quantidade $1/(1 - rh)$é sempre negativa e nunca é maior do que 1. Logo, se a equação diferencial é estável, então o método de Euler inverso também o é para um passo de tamanho arbitrário h.

Por outro lado, para o método de Euler, a mudança em y_{n+1} na Eq. (13) devida ao erro δ é $\delta(1 + rh)$. Se lembramos que $r \leq 0$ e impomos que $|1 + rh| \leq 1$, vemos que h tem que satisfazer $h \leq 2/|r|$. Logo, o método de Euler não é estável para esse problema a menos que h seja suficientemente pequeno.

A restrição sobre o tamanho do passo h ao se usar o método de Euler no exemplo anterior é bem fraca, a não ser que $|r|$ seja muito grande. De qualquer jeito, o exemplo ilustra que pode ser necessário restringir h para se obter estabilidade no método numérico, mesmo quando o problema inicial é estável para todos os valores de h. Problemas para os quais é necessário um tamanho de passo muito menor para estabilidade do que para a precisão são chamados de **rígidos**. As fórmulas inversas de diferenciação descritas na Seção 8.4 (dentre as quais a fórmula inversa de Euler é o exemplo de menor ordem) são as fórmulas mais populares para se resolver problemas rígidos. O exemplo a seguir ilustra o tipo de instabilidade que pode ocorrer ao se tentar aproximar a solução de um problema rígido.

Exemplo 2

Um Problema Rígido

Considere o problema de valor inicial

$$y' = -100y + 100t + 1, \qquad y(0) = 1. \tag{16}$$

Encontre aproximações numéricas para a solução em $0 \leq t \leq 1$ usando os métodos de Euler, de Euler inverso e de Runge-Kutta. Compare os resultados numéricos com a solução exata.

Como a equação diferencial é linear, é fácil de resolver e a solução do problema de valor inicial (6) é

$$y = \phi(t) = e^{-100t} + t. \tag{17}$$

A segunda coluna da Tabela 8.5.3 mostra alguns valores da solução $\phi(t)$, corretos até seis casas decimais, e a Fig. 8.5.2 mostra um gráfico da solução. Existe uma camada fina (algumas vezes chamada de camada-limite) à direita de $t = 0$ na qual o termo exponencial é relevante e a solução varia rapidamente. Uma vez passada essa camada, no entanto, $\phi(t) \approx t$ e o gráfico da solução é uma reta. A largura da camada-limite é um tanto arbitrária, mas é, necessariamente, pequena. Em $t = 0{,}1$, por exemplo, $\exp(-100t) \approx 0{,}000045$.

Se planejarmos aproximar a solução (17) numericamente, poderíamos esperar, intuitivamente, que só é necessário um tamanho de passo pequeno na camada-limite. Para tornar essa expectativa um pouco mais precisa, lembre-se, da Seção 8.1, de que os erros de truncamento global para os métodos de Euler e de Euler inverso são proporcionais a $\phi''(t)$. Para esse problema, $\phi''(t) = 10^4 e^{-100t}$, que varia de um valor de 10^4 em $t = 0$ para quase zero se $t > 0{,}2$. Logo, é necessário um tamanho de passo muito pequeno para se obter precisão perto de $t = 0$, mas um tamanho de passo muito maior é adequado quando t é um pouco maior.

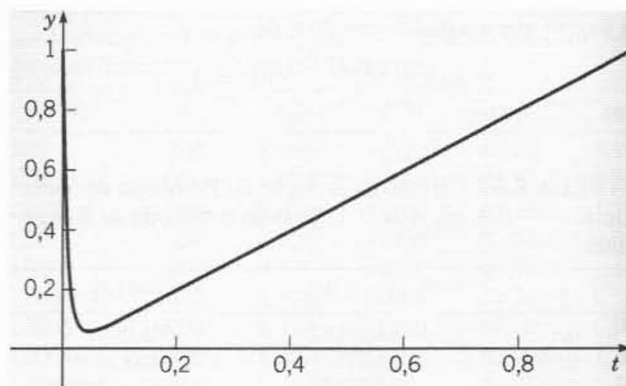


FIG. 8.5.2 A solução do problema de valor inicial (16).

TABELA 8.5.3 Aproximações Numéricas da Solução do Problema de Valor Inicial $y' = -100y + 100t + 1, y(0) = 1$

t	Exata	Euler 0,025	Euler 0,0166...	Runge-Kutta 0,0333...	Runge-Kutta 0,025	Euler Inverso 0,1
0,0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
0,05	0,056738	2,300000	−0,246296		0,470471	
0,1	0,100045	5,162500	0,187792	10,6527	0,276796	0,190909
0,2	0,200000	25,8289	0,207707	111,559	0,231257	0,208264
0,4	0,400000	657,241	0,400059	$1{,}24 \times 10^4$	0,400977	0,400068
0,6	0,600000	$1{,}68 \times 10^4$	0,600000	$1{,}38 \times 10^6$	0,600031	0,600001
0,8	0,800000	$4{,}31 \times 10^5$	0,800000	$1{,}54 \times 10^8$	0,800001	0,800000
1,0	1,000000	$1{,}11 \times 10^7$	1,000000	$1{,}71 \times 10^{10}$	1,000000	1,000000

Por outro lado, a análise de estabilidade das equações de (9) a (15) também se aplica a esse problema. Como $r = -100$ para a Eq. (16), segue que precisamos de $h < 0{,}02$ para a estabilidade do método de Euler, mas não existe restrição correspondente para o método de Euler inverso.

As colunas 3 e 4 da Tabela 8.5.3 mostram alguns resultados obtidos do método de Euler. Os valores obtidos para $h = 0{,}025$ não servem devido à instabilidade, enquanto os valores para $h = 0{,}01666\ldots$ são razoavelmente precisos para $t \geq 0{,}2$. No entanto, pode-se obter precisão comparável para esse intervalo de t com $h = 0{,}1$ usando-se o método de Euler inverso, como mostram os resultados na coluna 7 da tabela.

A situação não melhora se usarmos, em vez do método de Euler, um método mais preciso, como o de Runge-Kutta. Para esse problema, o método de Runge-Kutta é instável para $h = 0{,}033\ldots$, mas estável para $h = 0{,}025$, como mostram os resultados nas colunas 5 e 6 da Tabela 8.5.3.

Os resultados dados na tabela para $t = 0{,}05$ e $t = 0{,}1$ mostram que é preciso um tamanho de passo menor na camada-limite para se obter uma aproximação precisa. O Problema 3 convida você a explorar mais essa questão.

Como exemplo final, vamos considerar o problema de determinar duas soluções linearmente independentes da equação linear de segunda ordem

$$y'' - 10\pi^2 y = 0 \tag{18}$$

para $t > 0$. A generalização de técnicas numéricas desenvolvidas para equações de primeira ordem, para equações de ordem maior ou para sistemas de equações será discutida na Seção 8.6, mas não precisamos disso para essa discussão. Duas soluções linearmente independentes da Eq. (18) são $\phi_1(t) = \cosh(\sqrt{10}\pi t)$ e $\phi_2(t) = \text{senh}(\sqrt{10}\pi t)$. A primeira solução, $\phi_1(t) = \cosh(\sqrt{10}\pi t)$, é gerada pelas condições iniciais $\phi_1(0) = 1$, $\phi_1'(0) = 0$; a segunda solução, $\phi_2(t) = \text{senh}(\sqrt{10}\pi t)$, é gerada pelas condições iniciais $\phi_2(0) = 0$, $\phi_2'(0) = \sqrt{10}\pi$. Embora, analiticamente, possamos ver a diferença entre $\cosh(\sqrt{10}\pi t)$ e $\text{senh}(\sqrt{10}\pi t)$, para valores grandes de t temos $\cosh(\sqrt{10}\pi t) \sim e^{\sqrt{10}\pi t}$ e $\text{senh}(\sqrt{10}\pi t) \sim e^{\sqrt{10}\pi t}$; numericamente, essas duas funções são iguais se mantemos o mesmo número finito fixo de dígitos. Por exemplo, encontramos que, para $t = 1$, os valores corretos com oito dígitos significativos são

$$\text{senh}\sqrt{10}\pi = \cosh\sqrt{10}\pi = 10.315{,}894.$$

Se os cálculos forem feitos em uma máquina que trabalha com oito dígitos, as duas soluções ϕ_1 e ϕ_2 são idênticas para $t = 1$ e, de fato, para $t > 1$. Logo, embora as duas soluções sejam linearmente independentes, seus valores numéricos mostrariam que elas são iguais, já que podemos manter apenas um número finito de dígitos. Esse fenômeno é chamado de **dependência numérica**.

Para o problema em pauta, podemos evitar, parcialmente, essa dificuldade calculando, em vez de $\cosh(\sqrt{10}\pi t)$ e $\text{senh}(\sqrt{10}\pi t)$, as soluções linearmente independentes $\phi_3(t) = e^{\sqrt{10}\pi t}$ e $\phi_4(t) = e^{-\sqrt{10}\pi t}$, correspondendo, respectivamente, às condições iniciais $\phi_3(0) = 1$, $\phi_3'(0) = \sqrt{10}\pi$ e $\phi_4(0) = 1$, $\phi_4'(0) = -\sqrt{10}\pi$. A solução ϕ_3 cresce exponencialmente, enquanto ϕ_4 decai exponencialmente. Mesmo assim, encontramos dificuldade para calcular ϕ_4 corretamente em um intervalo grande. A razão é que, em cada passo do cálculo de ϕ_4, introduzimos erros de truncamento e de arredondamento. Logo, em qualquer ponto t_n, os dados a serem usados para o próximo ponto não são precisamente os valores de $\phi_4(t_n)$ e de $\phi_4'(t_n)$. A solução do problema de valor inicial com esses dados em t_n não envolve só $e^{-\sqrt{10}\pi t}$, mas envolve, também, $e^{\sqrt{10}\pi t}$. Como o erro nos dados em t_n é pequeno, essa última função aparece com um coeficiente bem pequeno. De qualquer jeito, como $e^{-\sqrt{10}\pi t}$ tende a zero e $e^{\sqrt{10}\pi t}$ cresce rapidamente, essa última acaba dominando e a solução calculada é, simplesmente, um múltiplo de $e^{\sqrt{10}\pi t} = \phi_3(t)$.

Especificamente, suponha que usamos o método de Runge-Kutta para calcular a solução $y = \phi_4(t) = e^{-\sqrt{10}\pi t}$ do problema de valor inicial

$$y'' - 10\pi^2 y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -\sqrt{10}\pi.$$

(O método de Runge-Kutta para sistemas de segunda ordem será descrito na Seção 8.6.) Usando aritmética de precisão simples (oito dígitos) com tamanho de passo $h = 0{,}01$, obtemos os resultados na Tabela 8.5.4. É evidente desses resultados que a aproximação numérica começa a ficar significativamente diferente da solução exata para $t > 0{,}5$ e logo difere dela por várias ordens de grandeza. A razão é a presença, na aproximação numérica, de uma pequena componente da solução que cresce exponencialmente $\phi_3(t) = e^{\sqrt{10}\pi t}$. Com aritmética de oito dígitos, podemos esperar um erro de arredondamento da ordem de 10^{-8} em cada passo.

TABELA 8.5.4 Solução exata de $y'' - 10\pi^2 y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -\sqrt{10}\pi$ e Aproximação Numérica Usando o Método de Runge-Kutta com $h = 0{,}01$

	y	
t	Numérica	Exata
0,0	1,0	1,0
0,25	$8{,}3439 \times 10^{-2}$	$8{,}3438 \times 10^{-2}$
0,5	$6{,}9623 \times 10^{-3}$	$6{,}9620 \times 10^{-3}$
0,75	$5{,}8409 \times 10^{-4}$	$5{,}8089 \times 10^{-4}$
1,0	$8{,}6688 \times 10^{-5}$	$4{,}8469 \times 10^{-5}$
1,5	$5{,}4900 \times 10^{-3}$	$3{,}3744 \times 10^{-7}$
2,0	$7{,}8852 \times 10^{-1}$	$2{,}3492 \times 10^{-9}$
2,5	$1{,}1326 \times 10^{2}$	$1{,}6356 \times 10^{-11}$
3,0	$1{,}6268 \times 10^{4}$	$1{,}1386 \times 10^{-13}$
3,5	$2{,}3368 \times 10^{6}$	$7{,}9272 \times 10^{-16}$
4,0	$3{,}3565 \times 10^{8}$	$5{,}5189 \times 10^{-18}$
4,5	$4{,}8211 \times 10^{10}$	$3{,}8422 \times 10^{-20}$
5,0	$6{,}9249 \times 10^{12}$	$2{,}6750 \times 10^{-22}$

Como $e^{\sqrt{10}\pi t}$ cresce por um fator de $3{,}7 \times 10^{21}$ de $t = 0$ até $t = 5$, um erro de 10^{-8} perto de $t = 0$ vai produzir um erro da ordem de 10^{13} em $t = 5$, mesmo que não sejam introduzidos outros erros nos cálculos intermediários. Os resultados dados na Tabela 8.5.4 mostram que isso é exatamente o que acontece.

A Eq. (18) é altamente instável, e o comportamento ilustrado nesse exemplo é típico de problemas instáveis. Podemos seguir precisamente a solução por um tempo e o intervalo pode ser estendido usando-se tamanhos menores de passos ou métodos mais precisos, mas, finalmente, a instabilidade no problema domina e leva a grandes erros.

Alguns Comentários sobre Métodos Numéricos. Introduzimos, neste capítulo, diversos métodos numéricos para aproximar a solução de um problema de valor inicial. Tentamos enfatizar algumas idéias importantes mantendo, ao mesmo tempo, um nível razoável de complexidade. Um exemplo disso é que sempre usamos um tamanho de passo uniforme, embora a produção atual de códigos forneça maneiras de se mudar o tamanho do passo à medida que os cálculos prosseguem.

Existem diversas considerações que devem ser levadas em conta ao se escolher o tamanho do passo. É claro que uma delas é a precisão; um tamanho de passo muito grande leva a um resultado impreciso. Normalmente, é dada uma tolerância para o erro antes e o tamanho do passo em cada etapa tem que ser consistente com essa tolerância. Como vimos, o tamanho do passo também tem que ser escolhido de modo que o método seja estável. Caso contrário, pequenos erros vão crescendo e logo tornam os resultados sem valor. Finalmente, para métodos implícitos, é necessário resolver uma equação em cada passo, e o método usado para resolvê-la pode impor restrições adicionais sobre o tamanho do passo.

Ao escolher um método, é preciso, também, equilibrar as questões de precisão e estabilidade com o tempo necessário para executar cada passo. Um método implícito, como o de Adams-Moulton, precisa de mais cálculos para cada passo, mas, se sua precisão e sua estabilidade permitem um tamanho de passo maior (e, em conseqüência, menos passos), então isso pode mais do que compensar os cálculos adicionais. As fórmulas inversas de diferenciação de ordem moderada, quatro, por exemplo, são altamente estáveis e são, portanto, indicadas para problemas rígidos, para os quais a estabilidade é o fator controlador.

Alguns códigos atuais permitem, também, que se varie a ordem do método, além do tamanho do passo, à medida que se efetuam os cálculos. O erro é estimado em cada passo, e a ordem e o tamanho do passo são escolhidos de modo a satisfazerem a tolerância de erro desejada. Na prática, são utilizados os métodos de Adams até a ordem doze e as fórmulas inversas de diferenciação até ordem cinco. Fórmulas inversas de diferenciação de ordem mais elevada não são convenientes devido à falta de estabilidade.

Finalmente, observamos que a suavidade da função f — isto é, o número de derivadas que ela tem — é um fator a ser considerado na escolha do método a ser usado. Métodos de ordem mais alta perdem alguma precisão se a função f não tem derivadas até uma ordem correspondente.

Problemas

1. Para obter alguma idéia dos perigos possíveis de pequenos erros nas condições iniciais, tais como os devidos a arredondamentos, considere o problema de valor inicial
$$y' = t + y - 3, \qquad y(0) = 2.$$
(a) Mostre que a solução é $y = \phi_1(t) = 2 - t$.
(b) Suponha que é feito um erro na condição inicial e é utilizado o valor 2,001 em vez de 2. Determine a solução $y = \phi_2(t)$ nesse caso e compare a diferença $\phi_2(t) - \phi_1(t)$ em $t = 1$ e quando $t \to \infty$.

2. Considere o problema de valor inicial
$$y' = t^2 + e^y, \qquad y(0) = 0. \tag{i}$$
Usando o método de Runge-Kutta com tamanho de passo h, obtemos os resultados na Tabela 8.5.5. Esses resultados sugerem que a solução tem uma assíntota vertical entre $t = 0{,}9$ e $t = 1{,}0$.
(a) Seja $y = \phi(t)$ a solução do problema (i). Além disso, sejam $y = \phi_1(t)$ a solução de
$$y' = 1 + e^y, y(0) = 0 \tag{ii}$$
e $y = \phi_2(t)$ a solução de
$$y' = e^y, y(0) = 0. \tag{iii}$$
Mostre que
$$\phi_2(t) \le \phi(t) \le \phi_1(t) \tag{iv}$$
Em algum intervalo contido em $0 \leqslant t \leqslant 1$ onde todas as três soluções existem.
(b) Determine $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$. Depois, mostre que $\phi(t) \to \infty$ para algum t entre $t = \ln 2 \approx 0{,}69315$ e $t = 1$.
(c) Resolva as equações diferenciais $y' = e^y$ e $y' = 1 + e^y$, respectivamente, com a condição inicial $y(0{,}9) = 3{,}4298$. Use os resultados para mostrar que $\phi(t) \to \infty$ quando $t \approx 0{,}932$.

TABELA 8.5.5 Cálculo da Solução do Problema de Valor Inicial $y' = t^2 + e^y$, $y(0) = 0$, Usando o Método de Runge-Kutta

h	$t = 0{,}90$	$t = 1{,}0$
0,02	3,42985	$> 10^{38}$
0,01	3,42982	$> 10^{38}$


3. Considere novamente o problema de valor inicial (16) do Exemplo 2. Investigue o quão pequeno tem que ser o tamanho do

passo h para que o erro em $t = 0{,}05$ e em $t = 0{,}1$ seja menor do que 0,0005.
(a) Use o método de Euler.
(b) Use o método de Euler inverso.
(c) Use o método de Runge-Kutta.

4. Considere o problema de valor inicial

$$y' = -10y + 2{,}5t^2 + 0{,}5t, \qquad y(0) = 4.$$

(a) Encontre a solução $y = \phi(t)$ e desenhe seu gráfico para $0 \leq t \leq 5$.
(b) A análise de estabilidade no texto sugere que, para esse problema, o método de Euler só é estável para $h < 0{,}2$. Confirme que isso é verdade aplicando o método de Euler a esse problema para $0 \leq t \leq 5$ com tamanhos de passos próximos de 0,2.
(c) Aplique o método de Runge-Kutta a esse problema para $0 \leq t \leq 5$ com diversos tamanhos de passos. O que você pode concluir sobre a estabilidade desse método?
(d) Aplique o método de Euler inverso a esse problema para $0 \leq t \leq 5$ com diversos tamanhos de passos. Qual o tamanho de passo necessário para que o erro em $t = 5$ seja menor do que 0,01?

Nos Problemas 5 e 6
(a) Encontre uma fórmula para a solução do problema de valor inicial e observe que ela é independente de λ.
(b) Use o método de Runge-Kutta com $h = 0{,}01$ para calcular valores aproximados da solução em $0 \leq t \leq 1$ para diversos valores de λ, como $\lambda = 1, 10, 20$ e 50.
(c) Explique as diferenças, se existirem, entre a solução exata e as aproximações numéricas.

5. $y' - \lambda y = 1 - \lambda t, \qquad y(0) = 0$
6. $y' - \lambda y = 2t - \lambda t^2, \qquad y(0) = 0$

8.6 Sistemas de Equações de Primeira Ordem

Nas seções anteriores discutimos métodos numéricos para resolver problemas de valor inicial associados a uma equação de primeira ordem. Esses métodos também podem ser aplicados a sistemas de equações de primeira ordem. Como equações de ordem mais alta sempre podem ser reduzidas a um sistema de primeira ordem, basta tratar de sistemas de primeira ordem. Por simplicidade, vamos considerar um sistema com duas equações de primeira ordem

$$x' = f(t, x, y), \qquad y' = g(t, x, y), \tag{1}$$

com as condições iniciais

$$x(t_0) = x_0, \qquad y(t_0) = y_0. \tag{2}$$

Vamos supor que as funções f e g satisfazem as condições do Teorema 7.1.1, de modo que o problema de valor inicial (1), (2) tem uma única solução em algum intervalo do eixo dos t contendo o ponto t_0. Queremos determinar valores aproximados $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ e $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ da solução $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ nos pontos $t_n = t_0 + nh$ com $n = 1, 2, \ldots$.

Em notação vetorial, o problema de valor inicial (1), (2) pode ser escrito como

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{3}$$

onde $\mathbf{x}$ é um vetor com coordenadas x e y, $\mathbf{f}$ é a função vetorial com coordenadas f e g, e $\mathbf{x}_0$ é o vetor com coordenadas x_0 e y_0. Os métodos das seções anteriores podem ser imediatamente generalizados para tratar sistemas de duas (ou mais) equações. Tudo que é necessário (formalmente) é substituir a variável escalar x pelo vetor $\mathbf{x}$ e a função escalar f pela função vetorial $\mathbf{f}$ nas equações apropriadas. Por exemplo, a fórmula de Euler torna-se

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{f}_n, \tag{4}$$

ou, em forma de coordenadas,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f(t_n, x_n, y_n) \\ g(t_n, x_n, y_n) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

As condições iniciais são usadas para se determinar $\mathbf{f}_0$, que é o vetor tangente ao gráfico da solução $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ no plano xy. Movemos na direção desse vetor tangente por um período de tempo h para encontrar o próximo ponto $\mathbf{x}_1$. Aí calculamos um novo vetor tangente $\mathbf{f}_1$, movemo-nos ao longo dele por um período de tempo h para encontrar $\mathbf{x}_2$, e assim por diante.

De maneira análoga, o método de Runge-Kutta pode ser generalizado para sistemas. Para o passo de t_n para t_{n+1}, temos

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + (h/6)(\mathbf{k}_{n1} + 2\mathbf{k}_{n2} + 2\mathbf{k}_{n3} + \mathbf{k}_{n4}), \tag{6}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{n1} &= \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n), \\ \mathbf{k}_{n2} &= \mathbf{f}[t_n + (h/2), \mathbf{x}_n + (h/2)\mathbf{k}_{n1}], \\ \mathbf{k}_{n3} &= \mathbf{f}[t_n + (h/2), \mathbf{x}_n + (h/2)\mathbf{k}_{n2}], \\ \mathbf{k}_{n4} &= \mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{x}_n + h\mathbf{k}_{n3}). \end{aligned} \tag{7}$$

As fórmulas para o método de previsão e correção de Adams-Moulton aplicadas ao problema de valor inicial (1), (2) são dadas no Problema 9.

As equações vetoriais (3), (4), (6) e (7) são, de fato, válidas para qualquer número de dimensões. Basta interpretar os vetores como tendo n coordenadas em vez de duas.

Exemplo 1

Determine valores aproximados para a solução $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ do problema de valor inicial

$$x' = x - 4y, \qquad y' = -x + y, \tag{8}$$

$$x(0) = 1, \qquad y(0) = 0, \tag{9}$$

no ponto $t = 0{,}2$. Use o método de Euler com $h = 0{,}1$ e o método de Runge-Kutta com $h = 0{,}2$. Compare os resultados com os valores da solução exata:

$$\phi(t) = \frac{e^{-t} + e^{3t}}{2}, \qquad \psi(t) = \frac{e^{-t} - e^{3t}}{4}. \tag{10}$$

Vamos usar primeiro o método de Euler. Para esse problema, $f_n = x_n - 4y_n$ e $g_n = -x_n + y_n$; logo,

$$f_0 = 1 - (4)(0) = 1, \qquad g_0 = -1 + 0 = -1.$$

Então, das fórmulas de Euler (4) e (5), obtemos

$$x_1 = 1 + (0{,}1)(1) = 1{,}1, \qquad y_1 = 0 + (0{,}1)(-1) = -0{,}1.$$

No próximo passo,

$$f_1 = 1{,}1 - (4)(-0{,}1) = 1{,}5,$$
$$g_1 = -1{,}1 + (-0{,}1) = -1{,}2.$$

Portanto,

$$x_2 = 1{,}1 + (0{,}1)(1{,}5) = 1{,}25,$$
$$y_2 = -0{,}1 + (0{,}1)(-1{,}2) = -0{,}22.$$

Os valores da solução exata, corretos até oito dígitos, são $\phi(0{,}2) = 1{,}3204248$ e $\psi(0{,}2) = -0{,}25084701$. Logo, os valores calculados pelo método de Euler têm erros em torno de 0,0704 e 0,0308, respectivamente, correspondendo a erros percentuais de aproximadamente 5,3% e 12,3%.

Vamos usar agora o método de Runge-Kutta para aproximar $\phi(0{,}2)$ e $\psi(0{,}2)$. Com $h = 0{,}2$, obtemos os seguintes valores das Eqs. (7):

$$\mathbf{k}_{01} = \begin{pmatrix} f(1;0) \\ g(1;0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{k}_{02} = \begin{pmatrix} f(1{,}1;-0{,}1) \\ g(1{,}1;-0{,}1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -1{,}2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{k}_{03} = \begin{pmatrix} f(1{,}15;-0{,}12) \\ g(1{,}15;-0{,}12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}63 \\ -1{,}27 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{k}_{04} = \begin{pmatrix} f(1{,}326;-0{,}254) \\ g(1{,}326;-0{,}254) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}342 \\ -1{,}580 \end{pmatrix}.$$

Então, substituindo esses valores na Eq. (6), obtemos

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{0{,}2}{6}\begin{pmatrix} 9{,}602 \\ -7{,}52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}3200667 \\ -0{,}25066667 \end{pmatrix}.$$

Esses valores de x_1 e y_1 têm erros em torno de 0,000358 e 0,000180, respectivamente, com erros percentuais menores do que um décimo de 1%.

Esse exemplo ilustra, mais uma vez, a grande diferença de precisão obtida por métodos de aproximação mais precisos, como o de Runge-Kutta. Nos cálculos que indicamos anteriormente, o método de Runge-Kutta precisa de apenas duas vezes mais de cálculos do que o de Euler, mas o erro no método de Runge-Kutta é em torno de 200 vezes menor do que no método de Euler.

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, determine valores apropriados da solução $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ do problema de valor inicial dado em $t = 0{,}2$; 0,4; 0,6; 0,8 e 1,0. Compare os resultados obtidos pelos diversos métodos com os tamanhos de passos diferentes.

(a) Use o método de Euler com $h = 0{,}1$.
(b) Use o método de Runge-Kutta com $h = 0{,}2$.
(c) Use o método de Runge-Kutta com $h = 0{,}1$.

1. $x' = x + y + t, \quad y' = 4x - 2y; \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0$
2. $x' = 2x + ty, \quad y' = xy; \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1$
3. $x' = -tx - y - 1, \quad y' = x; \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1$
4. $x' = x - y + xy, \; y' = 3x - 2y - xy; \; x(0) = 0, \; y(0) = 1$
5. $x' = x(1 - 0{,}5x - 0{,}5y), \quad y' = y(-0{,}25 + 0{,}5x);$ $x(0) = 4, \quad y(0) = 1$
6. $x' = \exp(-x + y) - \cos x, \quad y' = \operatorname{sen}(x - 3y);$ $x(0) = 1, \quad y(0) = 2$
7. Considere o problema do exemplo $x' = x - 4y$, $y' = -x + y$ com condições iniciais $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. Use o método de Runge-Kutta para encontrar valores aproximados da solução desse problema no intervalo $0 \le t \le 1$. Comece com $h = 0{,}2$ e depois repita os cálculos com $h = 0{,}1; 0{,}05; \ldots$ cada um a metade do anterior. Continue o processo até os cinco primeiros dígitos da solução em $t = 1$ permanecerem constantes para tamanhos sucessivos de passos. Determine se esses dígitos são precisos comparando-os com a solução exata dada nas Eqs. (10) do texto.
8. Considere o problema de valor inicial

$$x'' + t^2x' + 3x = t, \qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$$

Transforme esse problema em um sistema de duas equações de primeira ordem e determine valores aproximados da solução em $t = 0{,}5$ e $t = 1{,}0$ usando o método de Runge-Kutta com $h = 0{,}1$.

9. Considere o problema de valor inicial $x' = f(t, x, y)$ e $y' = g(t, x, y)$ com $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$. A generalização do método de previsão e correção de Adams-Moulton da Seção 8.4 é

$$x_{n+1} = x_n + \tfrac{1}{24}h(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}),$$
$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{24}h(55g_n - 59g_{n-1} + 37g_{n-2} - 9g_{n-3})$$

e

$$x_{n+1} = x_n + \tfrac{1}{24}h(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}),$$
$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{1}{24}h(9g_{n+1} + 19g_n - 5g_{n-1} + g_{n-2}).$$

Determine um valor aproximado da solução em $t = 0{,}4$ para o problema de valor inicial do exemplo $x' = x - 4y$, $y' = -x + y$ com $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. Use $h = 0{,}1$. Corrija o valor previsto uma vez. Para os valores $x_1, \ldots, y_3$, use os valores da solução exata arredondados para seis dígitos: $x_1 = 1{,}12735$; $x_2 = 1{,}32042$; $x_3 = 1{,}60021$; $y_1 = -0{,}111255$; $y_2 = -0{,}250847$ e $y_3 = -0{,}429696$.

REFERÊNCIAS

Existem muitos livros, com níveis de sofisticação variáveis, que tratam de análise numérica em geral e solução numérica de equações diferenciais ordinárias em particular. Entre esses, estão:

Ascher, Uri M., and Petzold, Linda R., *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations* (Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998).

Gear, C. William, *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1971).

Henrici, Peter, *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations* (New York: Wiley, 1962).

Shampine, Lawrence F., *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations* (New York: Chapman and Hall, 1994).

Uma exposição detalhada dos métodos de previsão e correção de Adams, incluindo guias práticos para implementação, pode ser encontrada em:

Shampine, L. F., and Gordon, M. K., *Computer Solution of Ordinary Differential Equations: The Initial Value Problem* (San Francisco: Freeman, 1975).

Muitos livros de análise numérica têm capítulos sobre equações diferenciais. Em um nível elementar, veja, por exemplo:

Burden, R. L., and Faires, J. D., *Numerical Analysis* (7th ed.) (Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2001).

CAPÍTULO 9

Equações Diferenciais Não-Lineares e Estabilidade

Existem muitas equações diferenciais, especialmente não-lineares, que não são suscetíveis à solução analítica de algum modo razoavelmente conveniente. Métodos numéricos, como os discutidos no capítulo precedente, fornecem um modo de tratar essas equações. Uma outra abordagem, apresentada neste capítulo, tem caráter geométrico e nos leva a uma compreensão qualitativa do comportamento das soluções, em vez de informação quantitativa detalhada.

9.1 O Plano de Fase: Sistemas Lineares

Como muitas equações diferenciais não podem ser resolvidas de maneira conveniente por métodos analíticos, é importante considerar que tipo de informação qualitativa[1] pode ser obtida sobre suas soluções sem resolver, de fato, as equações. As questões que vamos considerar neste capítulo estão relacionadas à idéia de estabilidade de uma solução e os métodos que vamos empregar são, basicamente, geométricos. Tanto o conceito de estabilidade quanto a utilização de análise geométrica foram introduzidos no Cap. 1 e usados na Seção 2.5 para equações autônomas de primeira ordem

$$dy/dt = f(y). \tag{1}$$

Neste capítulo, vamos refinar essas idéias e estender a discussão a sistemas de equações.

Vamos começar com um dos sistemas mais simples, a saber, um sistema linear homogêneo de segunda ordem com coeficientes constantes. Tal sistema tem a forma

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{2}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz constante 2×2 e $\mathbf{x}$ é um vetor 2×1. Sistemas desse tipo foram resolvidos nas seções de 7.5 a 7.8. Lembre-se de que, se procurarmos soluções da forma $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$, então, substituindo na Eq. (2), obtemos

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Logo r tem que ser um autovalor e $\boldsymbol{\xi}$ um autovetor associado da matriz $\mathbf{A}$. Os autovalores são as raízes da equação polinomial

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0 \tag{4}$$

e os autovetores são determinados pela Eq. (3) a menos de uma constante multiplicativa.

Vimos, na Seção 2.5, que pontos onde a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (1) é nula têm importância especial. Tais pontos correspondem a soluções constantes, ou **soluções de equilíbrio**, da Eq. (1) e são chamados, muitas vezes, de **pontos críticos**. Analogamente, para o sistema (2), os pontos onde $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ correspondem a soluções de equilíbrio (constantes) e também são chamados de pontos críticos. Vamos supor que A seja invertível, de modo que $\det \mathbf{A} \neq 0$. Então, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é o único ponto crítico do sistema (2).

Lembre-se de que uma solução da Eq. (2) é uma função vetorial $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ que satisfaz a equação diferencial. Essa função pode ser considerada como uma representação paramétrica de uma curva no plano x_1x_2. Ajuda, muitas vezes, olhar essa curva como um caminho, ou **trajetória**, percorrida por uma partícula em movimento cuja velocidade $d\mathbf{x}/dt$ é especificada pela equação diferencial. O plano x_1x_2 é chamado de **plano de fase**, e um conjunto representativo de trajetórias é chamado de **retrato de fase**.

Ao analisar o sistema (2), precisamos considerar diversos casos, dependendo da natureza dos autovalores de $\mathbf{A}$. Isso também aconteceu nas seções de 7.5 a 7.8, onde estávamos interes-

---

[1] A teoria qualitativa de equações diferenciais foi criada por Henri Poincaré (1854-1912) em diversos artigos importantes entre 1880 e 1886. Poincaré foi professor na Universidade de Paris e é considerado, geralmente, o matemático mais importante de seu tempo. Ele fez descobertas fundamentais em muitas áreas diferentes da matemática, incluindo teoria de funções complexas, equações diferenciais parciais e mecânica celeste. Iniciou o uso de métodos modernos em topologia em uma série de artigos a partir de 1894. Foi um pioneiro na utilização de séries assintóticas em equações diferenciais, uma das ferramentas mais poderosas da matemática aplicada contemporânea. Entre outras coisas, usou expansões assintóticas para obter soluções em torno de pontos singulares irregulares, estendendo o trabalho de Fuchs e Frobenius discutido no Cap. 5.

sados, basicamente, em encontrar uma fórmula conveniente para a solução geral. Nosso objetivo principal, agora, é caracterizar a equação diferencial de acordo com o padrão geométrico formado por suas trajetórias. Em cada caso, vamos discutir o comportamento das trajetórias em geral e ilustrá-lo com um exemplo. É importante que você se familiarize com os tipos de comportamento das trajetórias em cada caso, pois esses são os ingredientes básicos na teoria qualitativa de equações diferenciais.

CASO 1 Autovalores Reais e Distintos de Mesmo Sinal. A solução geral da Eq. (2) é

$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{r_2 t}, \tag{5}$$

onde r_1 e r_2 são ambos positivos ou ambos negativos. Suponha, primeiro, que $r_1 < r_2 < 0$ e que os autovetores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ são como ilustrado na Fig. 9.1.1*a*. Segue da Eq. (5) que $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ quando $t \to \infty$, independente dos valores de c_1 e c_2; em outras palavras, todas as soluções se aproximam do ponto crítico na origem quando $t \to \infty$. Se a solução começa em um ponto inicial na reta contendo a origem na direção de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$, então $c_2 = 0$. Em conseqüência, a solução permanece nessa reta para todo t e tende à origem quando $t \to \infty$. Analogamente, se o ponto inicial pertence à reta na direção de $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, então a solução tende à origem ao longo dessa reta. Na solução geral, é útil escrever a Eq. (5) na forma

$$\mathbf{x} = e^{r_2 t}[c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{(r_1 - r_2)t} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}]. \tag{6}$$

Note que $r_1 - r_2 < 0$. Portanto, enquanto $c_2 \neq 0$, o termo $c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}\exp[(r_1 - r_2)t]$ é desprezível comparado com $c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ para valores suficientemente grandes de t. Assim, quando $t \to \infty$, não só as trajetórias se aproximam da origem, mas o fazem tendendo, também, à reta na direção de $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$. Logo, todas as soluções são tangentes a $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ no ponto crítico exceto as que começam exatamente na reta na direção de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$. A Fig. 9.1.1*a* mostra diversas trajetórias. Alguns gráficos típicos de x_1 em função de t estão esboçados na Fig. 9.1.1*b*, ilustrando o fato de que todas as soluções exibem decaimento exponencial no tempo. O comportamento de x_2 em função de t é semelhante. Esse tipo de ponto crítico é chamado de **nó**, ou **nó atrator**, ou **sorvedouro**.

Se r_1 e r_2 são ambos positivos e $0 < r_2 < r_1$, então as trajetórias têm o mesmo padrão que na Fig. 9.1.1*a*, exceto que o sentido do movimento é se afastando do ponto crítico na origem, em vez de se aproximando. Nesse caso, x_1 e x_2 crescem exponencialmente como funções de t. O ponto crítico é chamado, novamente, de nó ou de **fonte**.

Vimos um exemplo de tal nó no Exemplo 2 da Seção 7.5, e suas trajetórias estão ilustradas na Fig. 7.5.4.

CASO 2 Autovalores Reais com Sinais Diferentes. A solução geral da Eq. (2) é

$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{r_2 t}, \tag{7}$$

onde $r_1 > 0$ e $r_2 < 0$. Suponha que os autovetores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ são como ilustrados na Fig. 9.1.2*a*. Se a solução começa em um ponto inicial na reta contendo a origem na direção de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$, então $c_2 = 0$. Em conseqüência, a solução permanece nessa reta para todo t e, como $r_1 > 0$, $\|\mathbf{x}\| \to \infty$ quando $t \to \infty$. Se a solução começa em um ponto inicial pertencente à reta na direção de $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, a situação é análoga, exceto que $\|\mathbf{x}\| \to 0$ quando $t \to \infty$, já que $r_2 < 0$. As soluções que começam em outros pontos iniciais seguem trajetórias semelhantes às da Fig. 9.1.2*a*. A exponencial positiva é o termo dominante na Eq. (7) para t grande, de modo que todas essas soluções tendem a infinito assintoticamente à reta determinada pelo autovetor $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ correspondente ao autovalor positivo r_1. As únicas soluções que se aproximam do ponto crítico na origem são as que começam precisamente na reta determinada

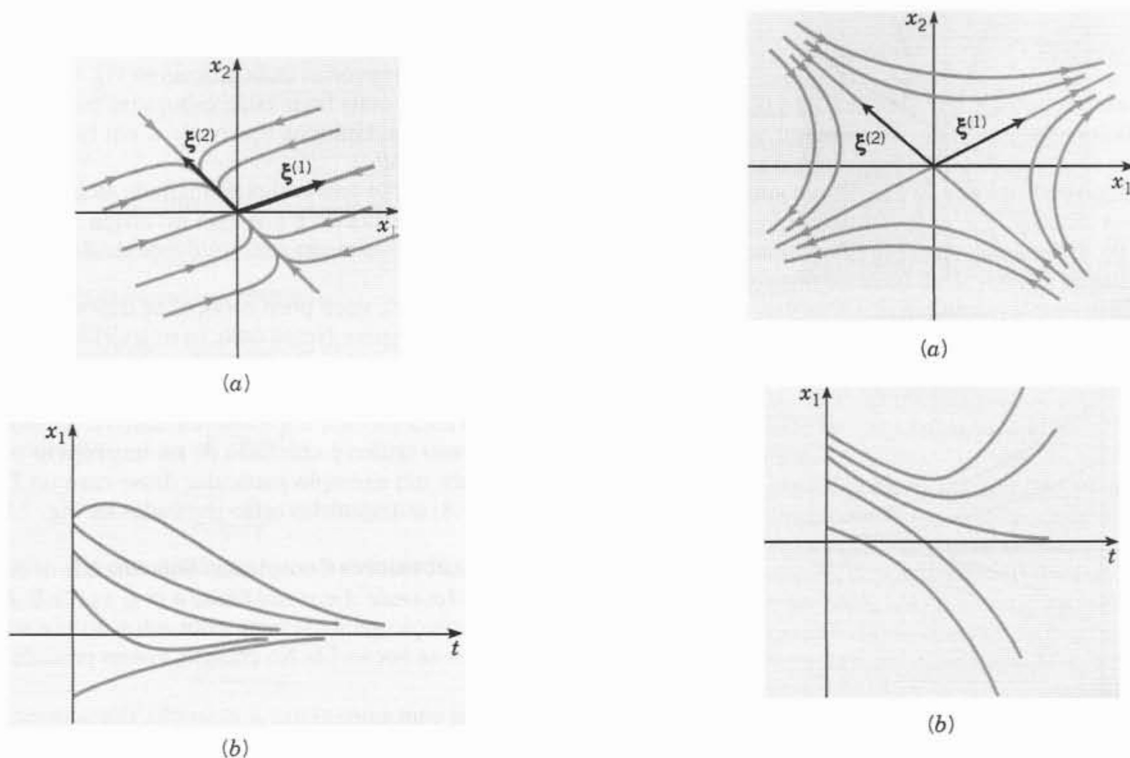


FIG. 9.1.1 Um nó; $r_1 < r_2 < 0$. (*a*) O plano de fase. (*b*) x_1 em função de t.

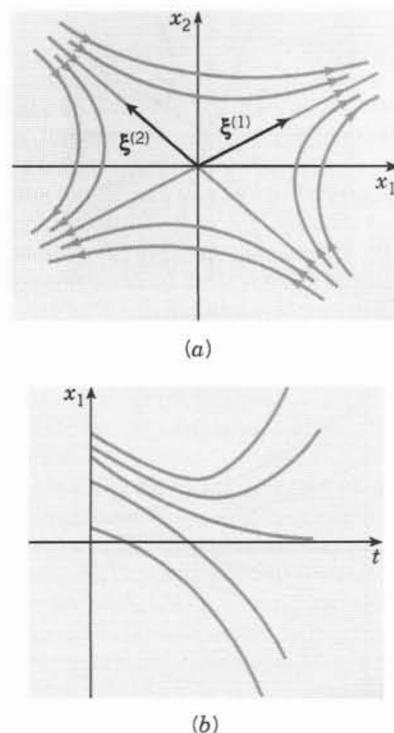


FIG. 9.1.2 Um ponto de sela; $r_1 > 0$, $r_2 < 0$. (*a*) O plano de fase. (*b*) x_1 em função de t.

por $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$. A Fig. 9.1.2*b* mostra alguns gráficos típicos de x_1 em função de t. Para determinadas condições iniciais, a exponencial positiva está ausente da solução, de modo que $x_1 \to 0$ quando $t \to \infty$. Para todas as outras condições iniciais, a exponencial positiva acaba dominando e faz com que x_1 se torne ilimitada. O comportamento de x_2 é semelhante. Nesse caso, a origem é chamada **ponto de sela**.

Um exemplo de um ponto de sela é apresentado no Exemplo 1 da Seção 7.5, cujas trajetórias são mostradas na Fig. 7.5.2.

CASO 3 Autovalores Iguais. Vamos supor agora que $r_1 = r_2 = r$. Vamos considerar o caso em que os autovalores são negativos; se forem positivos, as trajetórias são semelhantes, mas o movimento é em sentido contrário. Existem dois subcasos, dependendo se o autovalor repetido tem dois autovetores independentes ou apenas um.

(a) Dois autovetores independentes. A solução geral da Eq. (2) é

$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{rt} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{rt}, \tag{8}$$

onde $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ são autovetores independentes. A razão x_2/x_1 é independente de t, mas depende das coordenadas de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ e das constantes arbitrárias c_1 e c_2. Logo, toda trajetória está contida em uma reta contendo a origem, como ilustrado na Fig. 9.1.3*a*. Gráficos típicos de x_1 ou x_2 em função de t aparecem na Fig. 9.1.3*b*. O ponto crítico é chamado de **nó próprio** ou, algumas vezes, de **ponto estrela**.

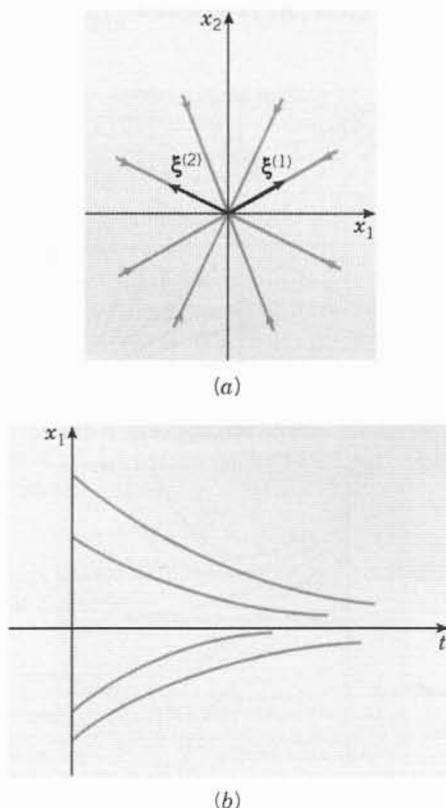


FIG. 9.1.3 Um nó próprio, dois autovetores independentes; $r_1 = r_2 < 0$. (*a*) O plano de fase. (*b*) x_1 em função de t.

(b) Um autovetor independente. Como vimos na Seção 7.8, a solução geral da Eq. (2) nesse caso é

$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}e^{rt} + c_2(\boldsymbol{\xi}te^{rt} + \boldsymbol{\eta}e^{rt}), \tag{9}$$

onde $\boldsymbol{\xi}$ é o autovetor e $\boldsymbol{\eta}$ é o autovetor generalizado associado ao autovalor repetido. Para t grande, o termo dominante na Eq. (9) é $c_2\boldsymbol{\xi}te^{rt}$. Assim, quando $t \to \infty$, todas as trajetórias tendem a origem e são tangentes à reta na direção do autovetor. Isso é verdadeiro mesmo quando $c_2 = 0$, pois, nesse caso, a solução $\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}e^{rt}$ pertence a essa reta. Analogamente, para valores negativos grandes de t, o termo $c_2\boldsymbol{\xi}te^{rt}$ é, novamente, dominante, de modo que, quando $t \to -\infty$, cada trajetória é assintótica a uma reta paralela a $\boldsymbol{\xi}$.

A orientação das trajetórias depende das posições relativas de $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$. Uma situação possível está ilustrada na Fig. 9.1.4*a*. Para localizar as trajetórias, é melhor escrever a solução (9) na forma

$$\mathbf{x} = [(c_1\boldsymbol{\xi} + c_2\boldsymbol{\eta}) + c_2\boldsymbol{\xi}t]e^{rt} = \mathbf{y}e^{rt}, \tag{10}$$

onde $\mathbf{y} = (c_1\boldsymbol{\xi} + c_2\boldsymbol{\eta}) + c_2\boldsymbol{\xi}t$. Note que o vetor $\mathbf{y}$ determina a direção e o sentido de $\mathbf{x}$, enquanto a quantidade escalar e^{rt} afeta apenas o tamanho de $\mathbf{x}$. Observe, também, que, para valores fixos de c_1 e c_2, a expressão para $\mathbf{y}$ é uma equação vetorial da reta contendo o ponto $c_1\boldsymbol{\xi} + c_2\boldsymbol{\eta}$ e paralela a $\boldsymbol{\xi}$.

Para esboçar a trajetória correspondente a um par dado de valores de c_1 e c_2, você pode proceder da seguinte maneira. Primeiro, desenhe a reta dada por $(c_1\boldsymbol{\xi} + c_2\boldsymbol{\eta}) + c_2\boldsymbol{\xi}t$ e note o sentido do movimento quando t cresce nessa reta. A Fig. 9.1.4*a* mostra duas dessas retas, uma para $c_2 > 0$ e outra para $c_2 < 0$. A seguir, observe que a trajetória dada passa pelo ponto $c_1\boldsymbol{\xi} + c_2\boldsymbol{\eta}$ quando $t = 0$. Além disso, quando t aumenta, o sentido do vetor $\mathbf{x}$ dado pela Eq. (10) tem o mesmo sentido de quando t aumenta na reta, mas o tamanho de $\mathbf{x}$ decresce rapidamente e tende a zero, devido ao fator exponencial decaindo e^{rt}. Finalmente, quando $t \to -\infty$, o sentido de $\mathbf{x}$ é determinado por pontos na parte correspondente da reta, e o tamanho de $\mathbf{x}$ tende a infinito. Dessa forma, obtemos as trajetórias mais grossas na Fig. 9.1.4*a*. Algumas outras trajetórias mais finas estão esboçadas para ajudar a completar o diagrama. Gráficos típicos de x_1 em função de t aparecem na Fig. 9.1.4*b*.

A outra situação possível está ilustrada na Fig. 9.1.4*c*, onde a orientação relativa de $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$ está invertida. Como indicado na figura, isso resulta em uma mudança de direção das trajetórias.

Se $r_1 = r_2 > 0$, você pode esboçar as trajetórias seguindo o mesmo procedimento. Nesse caso, as trajetórias são percorridas na direção para fora, e a orientação das trajetórias em relação a $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$ também é invertida.

Quando um autovalor duplo tem um único autovetor independente, o ponto crítico é chamado de **nó impróprio** ou **degenerado**. Vimos um exemplo particular desse caso no Exemplo 2 na Seção 7.8; as trajetórias estão ilustradas na Fig. 7.8.2.

CASO 4 Autovalores Complexos. Suponha que os autovalores sejam $\lambda \pm i\mu$, onde λ e μ são reais, $\lambda \neq 0$ e $\mu > 0$. É possível escrever a solução geral em termos dos autovalores e autovetores, como vimos na Seção 7.6. No entanto, vamos proceder de modo diferente.

Sistemas com autovalores $\lambda \pm i\mu$ são, tipicamente, da forma

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{11}$$

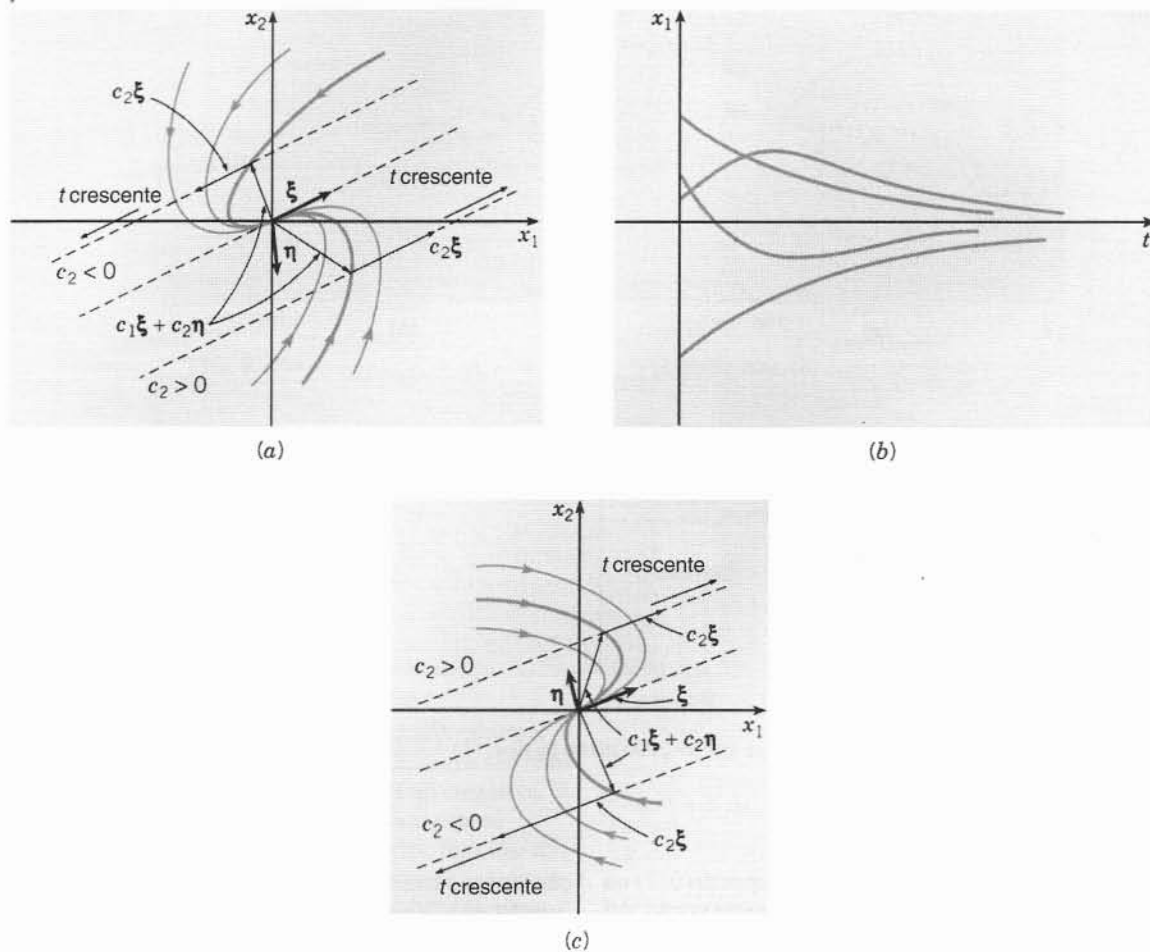


FIG. 9.1.4 Um nó impróprio, um autovetor independente; $r_1 = r_2 < 0$. (*a*) O plano de fase. (*b*) x_1 em função de t. (*c*) O plano de fase.

ou, em forma escalar,

$$x_1' = \lambda x_1 + \mu x_2, \qquad x_2' = -\mu x_1 + \lambda x_2. \tag{12}$$

Vamos introduzir coordenadas polares r, θ dadas por

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \qquad \text{tg}\,\theta = x_2/x_1.$$

Diferenciando essas equações, obtemos

$$rr' = x_1x_1' + x_2x_2', \quad (\sec^2\theta)\theta' = (x_1x_2' - x_2x_1')/x_1^2. \tag{13}$$

Substituindo as Eqs. (12) na primeira das Eqs. (13), vemos que

$$r' = \lambda r, \tag{14}$$

e, portanto,

$$r = ce^{\lambda t}, \tag{15}$$

onde c é uma constante. Analogamente, substituindo as Eqs. (12) na segunda das Eqs. (13) e usando o fato de que $\sec^2\theta = r^2/x_1^2$, temos

$$\theta' = -\mu. \tag{16}$$

Logo,

$$\theta = -\mu t + \theta_0, \tag{17}$$

onde θ_0 é o valor de θ quando $t = 0$.

As Eqs. (15) e (17) são equações paramétricas em coordenadas polares das trajetórias do sistema (11). Como $\mu > 0$, segue da Eq. (17) que θ diminui quando t aumenta, de modo que o movimento em uma trajetória é no sentido horário. Quando $t \to \infty$, vemos da Eq. (15) que $r \to 0$ se $\lambda < 0$ e que $r \to \infty$ se $\lambda > 0$. Então, as trajetórias são espirais, que tendem ou se afastam da origem dependendo do sinal de λ. Ambas as possibilidades estão ilustradas na Fig. 9.1.5, junto com alguns gráficos típicos de x_1 em função de t. Os pontos críticos são chamados de **pontos espirais** nesse caso. Os termos **sorvedouro espiral** e **fonte espiral** são usados, freqüentemente, para se referir a pontos espirais cujas trajetórias se aproximam ou se afastam, respectivamente, do ponto crítico.

Mais geralmente, é possível mostrar que, para qualquer sistema com autovalores complexos $\lambda \pm i\mu$, onde $\lambda \neq 0$, as trajetórias são sempre espirais. Elas estão orientadas para dentro ou para fora, respectivamente, dependendo se o sinal de λ é negativo ou positivo. Podem ser alongadas e tortas em relação aos eixos coordenados, e o sentido do movimento pode ser horário ou trigonométrico. Embora uma análise detalhada seja moderadamente difícil, é fácil obter uma idéia geral da orientação das trajetórias diretamente das equações diferenciais. Suponha que

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{18}$$

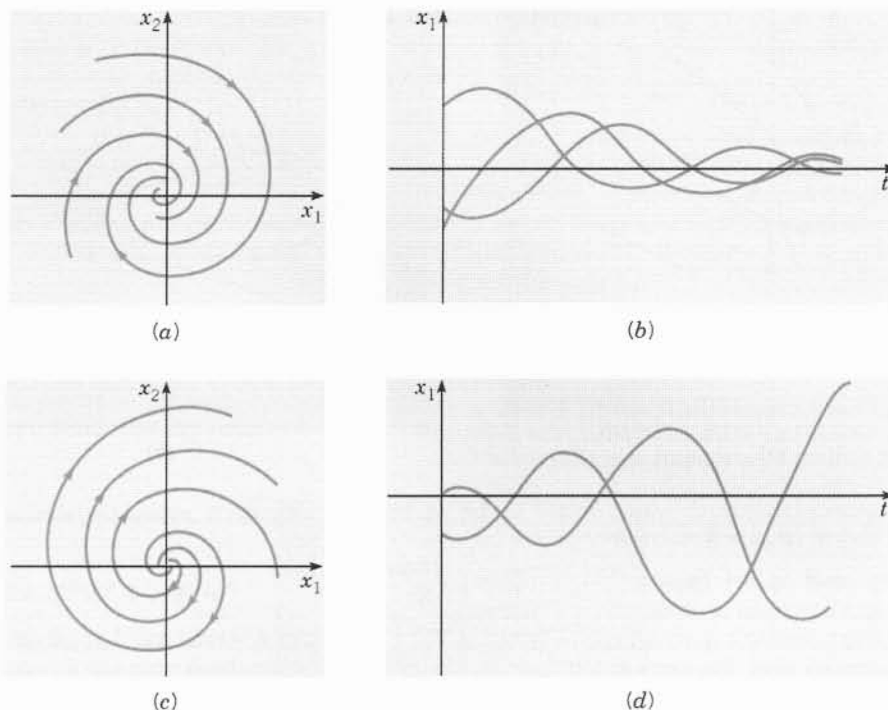


FIG. 9.1.5 Um ponto espiral; $r_1 = \lambda + i\mu$, $r_2 = \lambda - i\mu$. (*a*) $\lambda < 0$, o plano de fase. (*b*) $\lambda < 0$, x_1 em função de t. (*c*) $\lambda > 0$, o plano de fase. (*d*) $\lambda > 0$, x_1 em função de t.

tem autovalores complexos $\lambda \pm i\mu$ e considere o ponto (0, 1) no semi-eixo positivo dos y. Segue da Eq. (18) que, nesse ponto, $dx/dt = b$ e $dy/dt = d$. Dependendo dos sinais de b e d, podemos inferir o sentido do movimento e a direção aproximada das trajetórias. Por exemplo, se ambos b e d são negativos, então as trajetórias atravessam o semi-eixo positivo dos y, descendo e entrando no segundo quadrante. Se $\lambda < 0$, então as trajetórias têm que ser espirais direcionadas para o ponto crítico semelhantes às da Fig. 9.1.6. Foi dado um outro caso no Exemplo 1 da Seção 7.6, cujas trajetórias aparecem na Fig. 7.6.2.

CASO 5 Autovalores Imaginários Puros. Nesse caso, $\lambda = 0$ e o sistema (11) se reduz a

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{19}$$

com autovalores $\pm i\mu$. Usando o mesmo argumento que no Caso 4, encontramos

$$r' = 0, \qquad \theta' = -\mu, \tag{20}$$

e, portanto,

$$r = c, \qquad \theta = -\mu t + \theta_0, \tag{21}$$

onde c e θ_0 são constantes. Logo, as trajetórias são círculos centrados na origem, percorridos no sentido horário se $\mu > 0$ e no sentido trigonométrico se $\mu < 0$. Um circuito completo em torno da origem é feito em um intervalo de tempo de comprimento $2\pi/\mu$, de modo que todas as soluções são periódicas com período $2\pi/\mu$. O ponto crítico é chamado de **centro**.

Em geral, quando os autovalores são imaginários puros, é possível mostrar (veja o Problema 19) que as trajetórias são elipses centradas na origem. A Fig. 9.1.7 mostra uma situação típica e mostra, também, alguns gráficos típicos de x_1 em função de t. Veja também o Exemplo 3 na Seção 7.6, especialmente as Figs. 7.6.3 e 7.6.4.

Refletindo sobre esses cinco casos e examinando as figuras correspondentes, podemos fazer diversas observações:

1. Após um longo período de tempo, cada trajetória individual exibe apenas um entre três tipos de comportamento. Quando $t \to \infty$, cada trajetória tende a infinito, se aproxima do ponto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ou percorre, repetidamente, uma curva fechada, correspondente a uma solução periódica, em torno do ponto crítico.
2. De um ponto de vista global, o padrão das trajetórias em cada caso é relativamente simples. Para ser mais específico, em cada ponto (x_0, y_0) no plano de fase passa uma única trajetó-

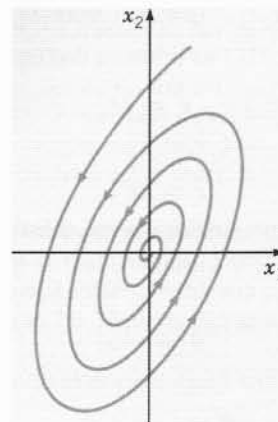


FIG. 9.1.6 Um ponto espiral; $r = \lambda \pm i\mu$ com $\lambda < 0$.

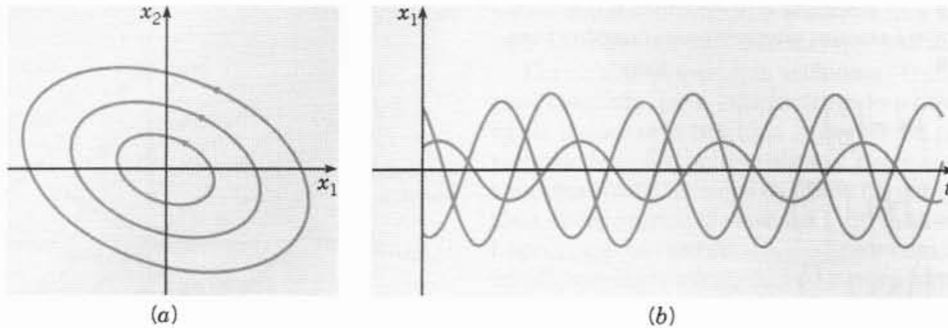


FIG. 9.1.7 Um centro; $r_1 = i\mu$, $r_2 = -i\mu$. (*a*) O plano de fase. (*b*) x_1 em função de t.

ria; assim, as trajetórias não se cruzam. Não interprete mal as figuras, onde aparecem, às vezes, muitas trajetórias que parecem passar pelo ponto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. De fato, a única solução que passa pela origem é a solução de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Na realidade, as outras soluções que parecem passar pela origem apenas se aproximam desse ponto quando $t \to \infty$ ou $t \to -\infty$.

3. Em cada caso, o conjunto de todas as trajetórias é tal que uma entre três situações ocorre.

(a) Todas as trajetórias se aproximam do ponto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ quando $t \to \infty$. Esse é o caso se os autovalores são reais e negativos ou complexos com parte real negativa. A origem é um nó atrator ou um sorvedouro espiral.

(b) Todas as trajetórias permanecem limitadas, mas não tendem à origem quando $t \to \infty$. Esse é o caso quando os autovalores são imaginários puros. A origem é um centro.

(c) Algumas trajetórias e, possivelmente, todas as trajetórias exceto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tendem a infinito quando $t \to \infty$. Esse é o caso se pelo menos um dos autovalores é positivo ou se os autovalores têm parte real positiva. A origem é um nó fonte, uma fonte espiral, ou um ponto de sela.

As situações descritas em 3(a), (b) e (c) anteriormente ilustram os conceitos de estabilidade assintótica, estabilidade e instabilidade, respectivamente, da solução de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do sistema (2). As definições precisas desses termos serão dadas na Seção 9.2, mas seus significados básicos devem estar claros da discussão geométrica feita nesta seção. A informação que obtivemos sobre o sistema (2) está resumida na Tabela 9.1.1. Veja, também, os Problemas 20 e 21.

A análise nesta seção se aplica apenas a sistemas de segunda ordem $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ cujas soluções podem ser representadas geometricamente por curvas no plano de fase. Uma análise semelhante, porém mais complicada, pode ser feita para um sistema de ordem n, com uma matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ $n \times n$, cujas soluções são curvas em um espaço de fase de dimensão n. Os casos que podem ocorrer para sistemas de ordem mais alta são, essencialmente, combinações do que vimos em duas dimensões. Por exemplo, em um sistema de terceira ordem com um espaço de fase tridimensional, uma possibilidade é que soluções em determinado plano sejam espirais se aproximando da origem, enquanto outras soluções podem tender a infinito ao longo de uma reta transversal a esse plano. Esse seria o caso se a matriz de coeficientes tivesse dois autovalores complexos com parte real negativa e um autovalor real positivo. No entanto, devido à sua complexidade, não discutiremos sistemas de ordem maior do que dois.

TABELA 9.1.1 Propriedades de Estabilidade de Sistemas Lineares $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ com $\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0$ e $\det \mathbf{A} \neq 0$

Autovalores	Tipo de Ponto Crítico	Estabilidade
$r_1 > r_2 > 0$	Nó	Instável
$r_1 < r_2 < 0$	Nó	Assintoticamente estável
$r_2 < 0 < r_1$	Ponto de sela	Instável
$r_1 = r_2 > 0$	Nó próprio ou impróprio	Instável
$r_1 = r_2 < 0$	Nó próprio ou impróprio	Assintoticamente estável
$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$	Ponto espiral	
$\lambda > 0$		Instável
$\lambda < 0$		Assintoticamente estável
$r_1 = i\mu$, $r_2 = -i\mu$	Centro	Estável

Problemas

Nos problemas de 1 a 12:
(a) Encontre os autovalores e autovetores.
(b) Classifique o ponto crítico (0, 0) em relação ao tipo e determine se é estável, assintoticamente estável ou instável.
(c) Esboce diversas trajetórias no plano de fase e esboce, também, alguns gráficos típicos de x_1 em função de t.
(d) Use um computador para fazer precisamente os gráficos pedidos no item (c).

1. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

2. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

3. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

4. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

5. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

6. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

7. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

8. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0{,}25 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

9. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

10. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

11. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

12. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{5} & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Nos problemas de 13 a 16, determine o ponto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$ e, depois, classifique seu tipo e examine sua estabilidade fazendo a transformação $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \mathbf{u}$.

13. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

14. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

15. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

16. $\dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \delta & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} \alpha \\ -\gamma \end{pmatrix}; \qquad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$

17. A equação de movimento de um sistema massa-mola com amortecimento (veja a Seção 3.8) é

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + ku = 0,$$

onde m, c e k são positivos. Escreva essa equação de segunda ordem como um sistema de duas equações de primeira ordem para $x = u$, $y = du/dt$. Mostre que $x = 0$, $y = 0$ é um ponto crítico e analise a estrutura e a estabilidade do ponto crítico em função dos parâmetros m, c e k. Uma análise semelhante pode ser aplicada à equação do circuito elétrico (veja a Seção 3.8)

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0.$$

18. Considere o sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ e suponha que $\mathbf{A}$ tem um autovalor nulo.
(a) Mostre que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um ponto crítico e que, além disso, todo ponto pertencente a uma determinada reta contendo a origem é, também, um ponto crítico.
(b) Sejam $r_1 = 0$ e $r_2 \neq 0$, e sejam $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ os autovetores correspondentes. Mostre que as trajetórias são como indicadas na Fig. 9.1.8. Qual o sentido do movimento nas trajetórias?

19. Neste problema, vamos indicar como mostrar que as trajetórias são elipses quando os autovalores são imaginários puros. Considere o sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \qquad \text{(i)}$$

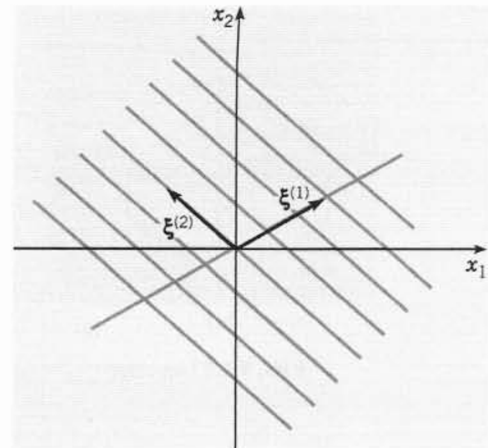


FIG. 9.1.8 Pontos críticos não-isolados; $r_1 = 0$, $r_2 \neq 0$. Todo ponto pertencente à reta contendo a origem e paralela a $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ é um ponto crítico.

(a) Mostre que os autovalores da matriz de coeficientes são imaginários puros se, e somente se,

$$a_{11} + a_{22} = 0, \qquad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0. \qquad \text{(ii)}$$

(b) As trajetórias do sistema (i) podem ser encontradas convertendo-se as Eqs. (1) em uma única equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}. \qquad \text{(iii)}$$

Use a primeira das Eqs. (ii) para mostrar que a Eq. (iii) é exata.
(c) Integrando a Eq. (iii), mostre que

$$a_{21}x^2 + 2a_{22}xy - a_{12}y^2 = k, \qquad \text{(iv)}$$

onde k é uma constante. Use as Eqs. (ii) para concluir que o gráfico da Eq. (iv) é sempre uma elipse.
Sugestão: Qual o discriminante da forma quadrática na Eq. (iv)?

20. Considere o sistema linear

$$dx/dt = a_{11}x + a_{12}y, \qquad dy/dt = a_{21}x + a_{22}y,$$

onde $a_{11}, \ldots, a_{22}$ são constantes reais. Seja $p = a_{11} + a_{22}$, $q = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ e $\Delta = p^2 - 4q$. Note que p e q são, respectiva-

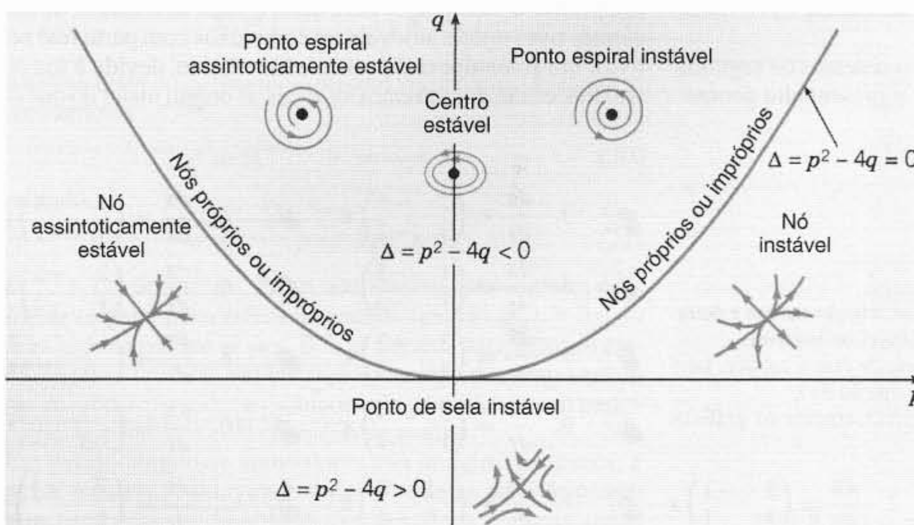


FIG. 9.1.9 Diagrama de estabilidade.

mente, o traço e o determinante da matriz de coeficientes do sistema dado. Mostre que o ponto crítico (0, 0) é um

(a) nó se $q > 0$ e $\Delta \geq 0$;

(b) ponto de sela se $q < 0$;

(c) ponto espiral se $p \neq 0$ e $\Delta < 0$;

(d) centro se $p = 0$ e $q > 0$.

Sugestão: As conclusões podem ser obtidas estudando-se os autovalores r_1 e r_2; pode ajudar a estabelecer, também, e depois a usar, as relações $r_1 r_2 = q$ e $r_1 + r_2 = p$.

21. Continuando o Problema 20, mostre que o ponto crítico (0, 0) é

(a) assintoticamente estável se $q > 0$ e $p < 0$;

(b) estável se $q > 0$ e $p = 0$;

(c) instável se $q < 0$ ou $p > 0$.

Os resultados dos Problemas 20 e 21 estão resumidos visualmente na Fig. 9.1.9.

9.2 Sistemas Autônomos e Estabilidade

Nesta seção vamos começar a juntar e expandir as idéias geométricas introduzidas na Seção 2.5 para certas equações de primeira ordem e na Seção 9.1 para sistemas lineares homogêneos de segunda ordem com coeficientes constantes. Essa idéias estão relacionadas ao estudo qualitativo de equações diferenciais e ao conceito de estabilidade, uma idéia que será definida precisamente mais adiante ainda nesta seção.

Sistemas Autônomos. Vamos considerar sistemas com duas equações diferenciais da forma

$$dx/dt = F(x, y), \qquad dy/dt = G(x, y). \tag{1}$$

Vamos supor que as funções F e G sejam contínuas com derivadas parciais contínuas em algum domínio D do plano xy. Se (x_0, y_0) é um ponto nesse domínio, então, pelo Teorema 7.1.1, existe uma única solução $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ do sistema (1) satisfazendo as condições iniciais

$$x(t_0) = x_0, \qquad y(t_0) = y_0. \tag{2}$$

A solução está definida em algum intervalo de tempo I que contém o ponto t_0.

Escreveremos, muitas vezes, o problema de valor inicial (1), (2) na forma vetorial

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \tag{3}$$

onde $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = F(x, y)\mathbf{i} + G(x, y)\mathbf{j}$ e $\mathbf{x}^0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$. Nesse caso, a solução é expressa como $\mathbf{x} = \phi(t)$, onde $\phi(t) = \phi(t)\mathbf{i} + \psi(t)\mathbf{j}$. Como de hábito, vamos interpretar a solução $\mathbf{x} = \phi(t)$ como uma curva traçada por um ponto se movendo no plano xy, o plano de fase.

Observe que as funções F e G nas Eqs. (1) não dependem da variável independente t, mas apenas das variáveis dependentes x e y. Um sistema com essa propriedade é dito **autônomo**. O sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{4}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz constante, é um exemplo simples de um sistema autônomo bidimensional. Por outro lado, se um ou mais elementos da matriz de coeficientes for uma função da variável independente t, então o sistema não é autônomo. A distinção entre sistemas autônomos e não-autônomos é importante porque a análise qualitativa geométrica desenvolvida na Seção 9.1 pode ser efetivamente estendida para sistemas autônomos em geral, mas não é tão útil para sistemas que não são autônomos.

Em particular, o sistema autônomo (1) tem um campo de direções associado que é independente do tempo. Em conseqüência, existe apenas uma trajetória passando em cada ponto (x_0, y_0) no plano de fase. Em outras palavras, todas as soluções que satisfazem uma condição inicial da forma (2) percorrem a mesma trajetória, independente do instante t_0 no qual elas estão em (x_0, y_0). Logo, como no caso do sistema linear com coeficientes constantes (4), um único retrato de fase mostra, simultaneamente, informação qualitativa importante sobre todas as soluções do sistema (1). Veremos esse fato confirmado repetidas vezes neste capítulo.

Sistemas autônomos ocorrem, com freqüência, em aplicações. Fisicamente, um sistema autônomo é um cuja configuração, incluindo parâmetros físicos e forças ou efeitos externos, é independente do tempo. A resposta do sistema a condições iniciais dadas é independente, portanto, do instante em que as condições são impostas.

Estabilidade e Instabilidade. Os conceitos de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade já foram mencionados diversas vezes neste livro. Está na hora de dar uma definição matemática precisa desses conceitos, pelo menos para sistemas autônomos da forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{5}$$

Nas definições a seguir e em outros lugares, usaremos a notação $\|\mathbf{x}\|$ para designar o comprimento, ou tamanho, do vetor $\mathbf{x}$.

Os pontos onde $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, se existirem, são chamados de **pontos críticos** do sistema autônomo (5). Em tais pontos, $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$, de modo que os pontos críticos correspondem a soluções constantes, ou de equilíbrio, do sistema de equações diferenciais. Um ponto crítico $\mathbf{x}^0$ do sistema (5) é dito **estável** se, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que toda solução $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ do sistema (1), que satisfaz, em $t = 0$,

$$\|\boldsymbol{\phi}(0) - \mathbf{x}^0\| < \delta, \tag{6}$$

existe para todo t positivo e satisfaz

$$\|\boldsymbol{\phi}(t) - \mathbf{x}^0\| < \epsilon \tag{7}$$

para todo $t \geq 0$. Isso está ilustrado geometricamente nas Figs. 9.2.1*a* e 9.2.1*b*. Essa proposição matemática diz que todas as soluções que começam "suficientemente próximas" (isto é, a uma distância menor do que δ) de $\mathbf{x}^0$ permanecem "próximas" (isto é, a uma distância menor do que ϵ) de $\mathbf{x}^0$. Note que, na Fig. 9.2.1*a*, a trajetória está no interior do círculo $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| = \delta$ em $t = 0$ e, embora saia logo desse círculo, permanece no interior do círculo $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| = \epsilon$ para todo $t \geq 0$. No entanto, a trajetória da solução não precisa se aproximar do ponto crítico $\mathbf{x}^0$ quando $t \to \infty$, como ilustrado na Fig. 9.2.1*b*. Um ponto crítico que não é estável é dito **instável**.

Um ponto crítico $\mathbf{x}^0$ é dito **assintoticamente estável** se é estável e se existe um δ_0 ($\delta_0 > 0$) tal que, se uma solução $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ satisfaz

$$\|\boldsymbol{\phi}(0) - \mathbf{x}^0\| < \delta_0, \tag{8}$$

então

$$\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{\phi}(t) = \mathbf{x}^0. \tag{9}$$

Logo, as trajetórias que começam "suficientemente próximas" de $\mathbf{x}^0$ não apenas permanecem "próximas", mas têm que acabar

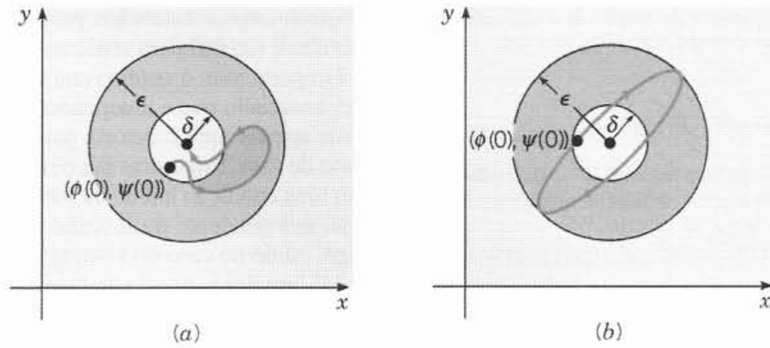


FIG. 9.2.1 (*a*) Estabilidade assintótica. (*b*) Estabilidade.

tendendo a $\mathbf{x}^0$ quando $t \to \infty$. Esse é o caso para a trajetória da Fig. 9.2.1*a*, mas não para a da Fig. 9.2.1*b*. Note que a estabilidade assintótica é uma propriedade mais forte do que a estabilidade, já que um ponto crítico tem que ser estável antes que possamos falar se é ou não assintoticamente estável. Por outro lado, a condição-limite (9), que é uma propriedade essencial para a estabilidade assintótica, sozinha não implica nem estabilidade simples. De fato, pode-se construir exemplos nos quais todas as trajetórias tendem a $\mathbf{x}^0$ quando $t \to \infty$, mas para as quais $\mathbf{x}^0$ não é ponto crítico estável. Geometricamente, basta construir uma família de trajetórias com elementos que começam arbitrariamente próximos de $\mathbf{x}^0$, depois partem para uma distância arbitrariamente grande antes de, por fim, se aproximar novamente de $\mathbf{x}^0$ quando $t \to \infty$.

Estamos nos concentrando, neste capítulo, em sistemas de segunda ordem, mas as definições que acabamos de dar são independentes da ordem do sistema. Se você interpretar os vetores nas equações de (5) a (9) como tendo dimensão n, então as definições de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade também se aplicam a sistemas de ordem n. Essas definições tornam-se mais concretas se interpretadas em termos de um problema físico específico.

O Pêndulo Oscilatório. Os conceitos de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade podem ser facilmente visualizados em termos de um pêndulo oscilatório. Considere a configuração ilustrada na Fig. 9.2.2, na qual uma massa m está presa a uma das extremidades de uma barra rígida, mas sem peso, de comprimento L. A outra extremidade da barra está pendurada na origem O e a barra está livre para rodar no plano do papel. A posição do pêndulo é descrita pelo ângulo θ entre a barra e a direção vertical orientada para baixo, com o sentido trigonométrico sendo considerado positivo. A força gravitacional mg age para baixo, enquanto a força de amortecimento $c|d\theta/dt|$, onde c é positivo, tem sempre o sentido oposto ao do movimento. A equação de movimento pode ser deduzida, rapidamente, do princípio de momento angular, que diz que a taxa de variação no tempo do movimento angular em torno de qualquer ponto é igual ao momento da força resultante naquele ponto. O momento angular em torno da origem é $mL^2(d\theta/dt)$, de modo que a equação de movimento é

$$mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -cL\frac{d\theta}{dt} - mgL\,\text{sen}\,\theta. \qquad (10)$$

Os fatores L e L sen θ à direita do sinal de igualdade na Eq. (10) são os momentos relativos à força de atrito e à força gravitacional, respectivamente; os sinais de menos são devidos ao fato de que as duas forças tendem a fazer com que o pêndulo mova-se no sentido horário (negativo). Você deveria verificar, como exercício, que a mesma combinação é obtida para as outras três possíveis combinações de sinais de θ e $d\theta/dt$.

Efetuando algumas operações algébricas diretas, podemos escrever a Eq. (10) na forma canônica

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{c}{mL}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{L}\,\text{sen}\,\theta = 0, \qquad (11)$$

ou

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + \omega^2\,\text{sen}\,\theta = 0, \qquad (12)$$

onde $\gamma = c/mL$ e $\omega^2 = g/L$. Para transformar a Eq. (12) em um sistema de duas equações de primeira ordem, fazemos $x = \theta$ e $y = d\theta/dt$; então,

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -\omega^2\text{sen}\,x - \gamma y. \qquad (13)$$

Como γ e ω^2 são constantes, o sistema (13) é um sistema autônomo da forma (1).

Os pontos críticos da Eq. (13) são encontrados resolvendo-se as equações

$$y = 0, \qquad -\omega^2\text{sen}\,x - \gamma y = 0.$$

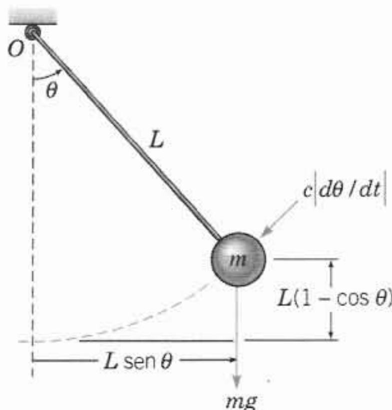


FIG. 9.2.2 Um pêndulo oscilatório.

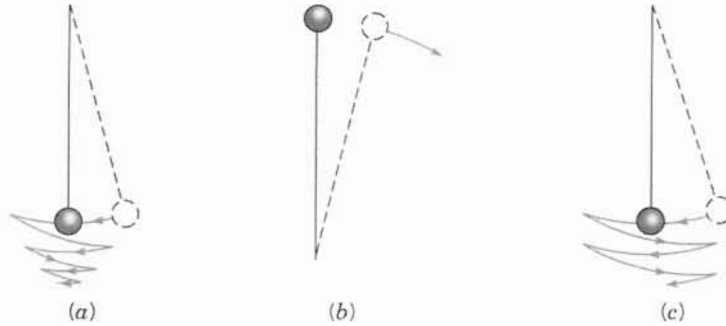


FIG. 9.2.3 Movimento qualitativo de um pêndulo. (*a*) Com resistência do ar. (*b*) Com ou sem resistência do ar. (*c*) Sem resistência do ar.

Obtemos $y = 0$ e $x = \pm n\pi$, onde n é um inteiro. Esses pontos correspondem a duas posições físicas de equilíbrio, uma com a massa diretamente abaixo do suporte ($\theta = 0$) e a outra com a massa diretamente acima do suporte ($\theta = \pi$). Nossa intuição sugere que a primeira posição é estável e a segunda, instável.

Mais precisamente, se a massa é ligeiramente deslocada da posição de equilíbrio abaixo, ela vai oscilar para a direita e para a esquerda com uma amplitude diminuindo gradualmente, até atingir a posição de equilíbrio quando a energia potencial inicial é dissipada pela força de amortecimento. Esse tipo de movimento ilustra a *estabilidade assintótica.*

Por outro lado, se a massa for ligeiramente deslocada da posição de equilíbrio acima do suporte, ela cai rapidamente, sob a influência da gravidade, e vai acabar chegando, também nesse caso, à outra posição de equilíbrio abaixo do suporte. Esse tipo de movimento ilustra a *instabilidade*. Na prática, é impossível manter o pêndulo em sua posição de equilíbrio acima do suporte por qualquer período de tempo sem que haja um mecanismo que a segure, já que a mais leve perturbação fará com que a massa caia.

Finalmente, considere a situação ideal na qual o coeficiente de amortecimento c (ou γ) é nulo. Nesse caso, se a massa for deslocada ligeiramente de sua posição de equilíbrio abaixo do suporte, ela vai oscilar indefinidamente com amplitude constante em torno do ponto de equilíbrio. Como não há dissipação no sistema, a massa vai permanecer próxima à posição de equilíbrio, mas não vai tender a ela assintoticamente. Esse tipo de movimento é *estável*, mas não assintoticamente estável. Em geral, esse movimento é impossível de se obter experimentalmente, já que, por menor que seja a resistência do ar ou o atrito no ponto de suporte, isso fará com que, finalmente, o pêndulo atinja sua posição de repouso.

Esses três tipos de movimento estão ilustrados, esquematicamente, na Fig. 9.2.3. As soluções da equação do pêndulo serão discutidas em detalhe na próxima seção.

Determinação de Trajetórias. As trajetórias de um sistema autônomo bidimensional podem ser encontradas, algumas vezes, resolvendo-se uma equação diferencial de primeira ordem relacionada. Das Eqs. (1), temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}, \tag{14}$$

que é uma equação de primeira ordem nas variáveis x e y. Observe que tal redução não é possível, em geral, se F e G também dependerem de t. Se a Eq. (14) puder ser resolvida por algum dos métodos do Cap. 2 e se escrevermos a solução (implicitamente) na forma

$$H(x, y) = c, \tag{15}$$

então a Eq. (15) é uma equação para as trajetórias do sistema (14). Em outras palavras, as trajetórias são as curvas de nível de $H(x, y)$. Mantenha em mente que não existe maneira geral de se resolver a Eq. (14) para se obter a função H, de modo que essa abordagem só é possível em casos especiais.

Exemplo 1

Encontre as trajetórias do sistema

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = x. \tag{16}$$

Nesse caso, a Eq. (14) fica

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}. \tag{17}$$

Essa equação é separável, já que pode ser escrita na forma

$$y\,dy = x\,dx,$$

e suas soluções são dadas por

$$H(x, y) = y^2 - x^2 = c, \tag{18}$$

onde c é arbitrário. Logo, as trajetórias do sistema (16) são as hipérboles ilustradas na Fig. 9.2.4. A direção do movimento das trajetórias pode ser inferida do fato de que ambas as derivadas dx/dt e dy/dt são positivas no primeiro quadrante. O único ponto crítico é o ponto de sela na origem.

Um outro modo de se obter as trajetórias é resolver o sistema (16) pelos métodos da Seção 7.5. Omitimos os detalhes, mas o resultado é

$$x = c_1e^t + c_2e^{-t}, \quad y = c_1e^t - c_2e^{-t}.$$

Eliminando t dessas duas equações nos leva, novamente, à Eq. (18).

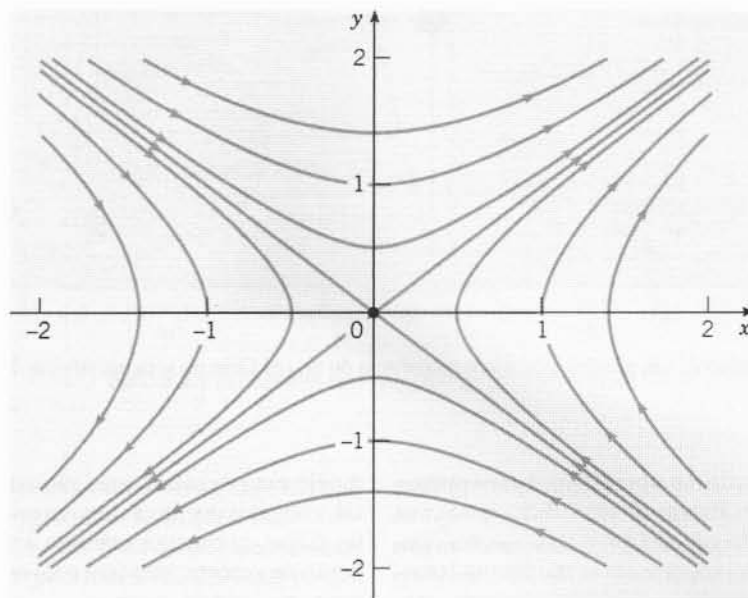


FIG. 9.2.4 Trajetórias do sistema (16).

Exemplo 2

Encontre as trajetórias do sistema

$$\frac{dx}{dt} = 4 - 2y, \quad \frac{dy}{dt} = 12 - 3x^2. \tag{19}$$

Da equação

$$4 - 2y = 0, \quad 12 - 3x^2 = 0$$

vemos que os pontos críticos do sistema (19) são os pontos $(-2, 2)$ e $(2, 2)$. Para determinar as trajetórias, note que, para esse sistema, a Eq. (14) fica

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12 - 3x^2}{4 - 2y}. \tag{20}$$

Separando as variáveis na Eq. (20) e integrando, obtemos que a solução satisfaz

$$H(x, y) = 4y - y^2 - 12x + x^3 = c, \tag{21}$$

onde c é uma constante arbitrária. Uma rotina computacional para fazer gráficos ajuda a mostrar as curvas de nível de $H(x, y)$, algumas das quais estão ilustradas na Fig. 9.2.5. O sentido do movimento nas trajetórias pode ser determinado desenhando-se um campo de direções para o sistema (19), ou calculando dx/dt e dy/dt em um ou dois pontos selecionados. Pode-se ver, da Fig. 9.2.5, que o ponto crítico $(2, 2)$ é um ponto de sela e o ponto $(-2, 2)$ é um centro. Observe que uma trajetória sai do ponto de sela (em $t = -\infty$), dá uma volta em torno do centro e volta ao ponto de sela (em $t = +\infty$).

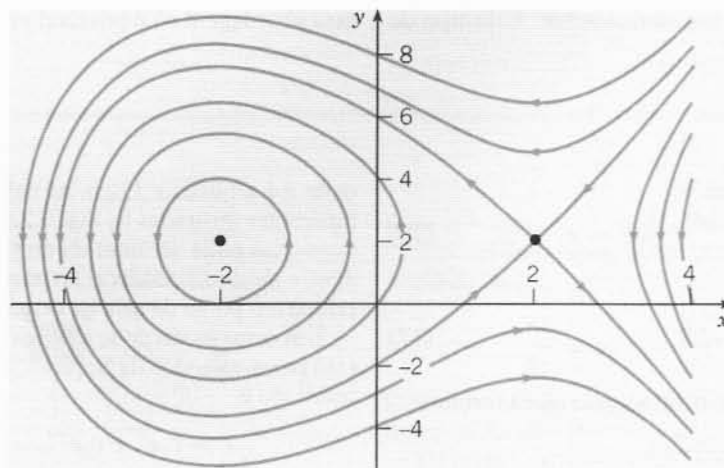


FIG. 9.2.5 Trajetórias do sistema (19).

Problemas

Nos problemas de 1 a 4, esboce a trajetória correspondente à solução que satisfaz as condições iniciais dadas e indique o sentido do movimento quando t cresce.

1. $dx/dt = -x, \quad dy/dt = -2y; \quad x(0) = 4, \quad y(0) = 2$
2. $dx/dt = -x, \quad dy/dt = 2y; \quad x(0) = 4, \quad y(0) = 2$ e $x(0) = 4, \quad y(0) = 0$
3. $dx/dt = -y, \quad dy/dt = x; \quad x(0) = 4, \quad y(0) = 0$ e $x(0) = 0, \quad y(0) = 4$
4. $dx/dt = ay, \quad dy/dt = -bx, \quad a > 0, \quad b > 0;$ $x(0) = \sqrt{a}, \quad y(0) = 0$

Para cada um dos sistemas nos problemas de 5 a 14:
(a) Encontre todos os pontos críticos (soluções de equilíbrio).
(b) Use um computador para desenhar um campo de direções e um retrato de fase para o sistema.
(c) Dos gráficos no item (b), determine se cada ponto crítico é assintoticamente estável, estável ou instável, classifique-o quanto ao tipo.

5. $dx/dt = x - xy, \quad dy/dt = y + 2xy$
6. $dx/dt = 1 + 2y, \quad dy/dt = 1 - 3x^2$
7. $dx/dt = x - x^2 - xy, \quad dy/dt = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{4}xy$
8. $dx/dt = -(x-y)(1-x-y), \quad dy/dt = x(2+y)$
9. $dx/dt = y(2 - x - y), \quad dy/dt = -x - y - 2xy$
10. $dx/dt = (2+x)(y-x), \quad dy/dt = y(2 + x - x^2)$
11. $dx/dt = -x + 2xy, \quad dy/dt = y - x^2 - y^2$
12. $dx/dt = y, \quad dy/dt = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{5}y$
13. $dx/dt = (2+x)(y-x), \quad dy/dt = (4-x)(y+x)$
14. A equação de van der Pol: $dx/dt = y, dy/dt = (1-x^2)y - x$

Nos problemas de 15 a 22:
(a) Encontre uma equação da forma $H(x, y) = c$ para as trajetórias.
(b) Desenhe diversas curvas de nível para a função H. Essas são as trajetórias do sistema dado. Indique o sentido do movimento em cada trajetória.

15. $dx/dt = 2y, \quad dy/dt = 8x$
16. $dx/dt = 2y, \quad dy/dt = -8x$
17. $dx/dt = y, \quad dy/dt = 2x + y$
18. $dx/dt = -x + y, \quad dy/dt = -x - y$
19. $dx/dt = -x + y + x^2, \quad dy/dt = y - 2xy$
20. $dx/dt = 2x^2y - 3x^2 - 4y, \quad dy/dt = -2xy^2 + 6xy$
21. Pêndulo não amortecido: $dx/dt = y, \quad dy/dt = -\operatorname{sen} x$
22. Equação de Duffing: $dx/dt = y, \quad dy/dt = -x + (x^3/6)$
23. Dado que $x = \phi(t), y = \psi(t)$ é uma solução do sistema autônomo

$$dx/dt = F(x, y), \qquad dy/dt = G(x, y)$$

para $\alpha < t < \beta$, mostre que $x = \Phi(t) = \phi(t - s), y = \Psi(t) = \psi(t - s)$ é uma solução para $\alpha + s < t < \beta + s$, para qualquer número s.
24. Prove que para o sistema

$$dx/dt = F(x, y), \qquad dy/dt = G(x, y)$$

existe, no máximo, uma trajetória passando por um ponto dado (x_0, y_0).

Sugestão: Seja C_0 a trajetória gerada pela solução $x = \phi_0(t)$, $y = \psi_0(t)$, com $\phi_0(t_0) = x_0$, $\psi_0(t_0) = y_0$, e seja C_1 a trajetória gerada pela solução $x = \phi_1(t)$, $y = \psi_1(t)$ com $\phi_1(t_1) = x_0$, $\psi_1(t_1) = y_0$. Use o fato de que o sistema é autônomo e use, também, o teorema de existência e unicidade para mostrar que C_0 e C_1 são iguais.
25. Prove que se uma trajetória começa em um ponto não crítico do sistema

$$dx/dt = F(x, y), \qquad dy/dt = G(x, y),$$

então não pode atingir um ponto crítico (x_0, y_0) em um intervalo de tempo finito.
Sugestão: Suponha o contrário, isto é, suponha que a solução $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ satisfaz $\phi(a) = x_0$, $\psi(a) = y_0$. Depois use o fato de que $x = x_0$, $y = y_0$ é uma solução do sistema dado que satisfaz a condição inicial $x = x_0$, $y = y_0$ em $t = a$.
26. Supondo que a trajetória correspondente a uma solução $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $-\infty < t < \infty$, de um sistema autônomo é fechada, mostre que a solução é periódica.
Sugestão: Como a trajetória é fechada, existe pelo menos um ponto (x_0, y_0) tal que $\phi(t_0) = x_0$, $\psi(t_0) = y_0$ e um número $T > 0$ tal que $\phi(t_0 + T) = x_0$, $\psi(t_0 + T) = y_0$. Mostre que $x = \Phi(t) = \phi(t + T)$, $y = \Psi(t) = \psi(t + T)$ é uma solução e use o teorema de existência e unicidade para mostrar que $\Phi(t) = \phi(t)$, $\Psi(t) = \psi(t)$ para todo t.

9.3 Sistemas Quase Lineares

Na Seção 9.1, fizemos uma descrição informal das propriedades de estabilidade da solução de equilíbrio $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do sistema linear bidimensional

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{1}$$

Os resultados estão resumidos na Tabela 9.1.1. Lembre-se de que supusemos $\det \mathbf{A} \neq 0$, de modo que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é o único ponto crítico do sistema (1). Agora que já definimos os conceitos de estabilidade assintótica, estabilidade e instabilidade mais precisamente, podemos enunciar esses resultados com o teorema a seguir.

Teorema 9.3.1

O ponto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ do sistema linear (1) é: assintoticamente estável se os autovalores r_1 e r_2 são reais e negativos ou têm parte real negativa; estável, mas não assintoticamente estável, se r_1 e r_2 são imaginários puros; instável se r_1 e r_2 são reais e um deles é positivo, ou se ambos têm parte real positiva.

Fica claro, desse teorema ou da Tabela 9.1.1, que os autovalores r_1, r_2 da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ determinam o tipo de ponto crítico em $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e suas características de estabilidade. Por sua vez, os valores de r_1 e r_2 dependem dos coeficientes no sistema (1). Quando um sistema desses aparece em algum campo aplicado, os coeficientes resultam, em geral, de medidas de determinadas quantidades físicas. Tais medidas estão sujeitas, muitas vezes, a pequenos erros, de modo que é de interesse investigar se pequenas mudanças (perturbações) nos coeficientes podem afetar a estabilidade ou instabilidade de um ponto crítico e/ou alterar de maneira significativa o padrão de trajetórias.

Lembre-se de que os autovalores r_1, r_2 são as raízes da equação polinomial

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0. \tag{2}$$

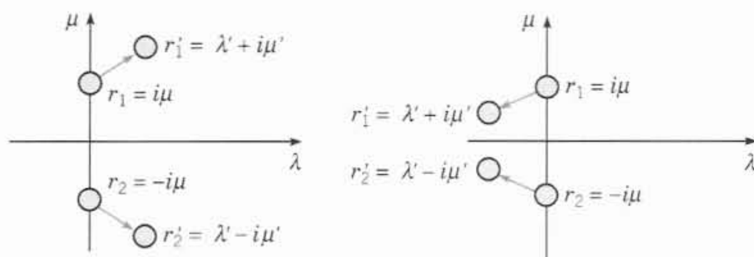


FIG. 9.3.1 Perturbação esquemática de $r_1 = i\mu$, $r_2 = -i\mu$.

É possível mostrar que perturbações *pequenas* em alguns dos, ou todos os, coeficientes são refletidas em *pequenas* perturbações nos autovalores. A situação mais sensível acontece quando $r_1 = i\mu$ e $r_2 = -i\mu$, isto é, quando o ponto crítico é um centro e as trajetórias são curvas fechadas em volta dele. Se é feita uma ligeira mudança nos coeficientes, então os autovalores r_1 e r_2 terão novos valores $r_1' = \lambda' + i\mu'$ e $r_2' = \lambda' - i\mu'$, onde λ' é pequeno em valor absoluto e $\mu' \approx \mu$ (veja a Fig. 9.3.1). Se $\lambda' \neq 0$, o que acontece quase sempre, então as trajetórias do sistema perturbado são espirais, em vez de curvas fechadas. O sistema é assintoticamente estável se $\lambda' < 0$, mas é instável se $\lambda' > 0$. Assim, no caso de um centro, pequenas perturbações nos coeficientes podem transformar um sistema estável em um instável e, em muitos casos, pode-se esperar um padrão radicalmente diferente de trajetórias no plano de fase (veja o Problema 25).

Um outro caso, ligeiramente menos sensível, acontece se os autovalores r_1 e r_2 são iguais; nesse caso o ponto crítico é um nó. Pequenas perturbações nos coeficientes, normalmente, fazem com que as raízes iguais se separem (bifurquem). Se as raízes separadas são reais, então o ponto crítico do sistema perturbado permanece um nó, mas, se as raízes separadas são complexas conjugadas, então o ponto crítico torna-se um ponto espiral. A Fig. 9.3.2 mostra essas duas possibilidades de modo esquemático. Nesse caso, a estabilidade ou instabilidade do sistema não é afetada por pequenas perturbações nos coeficientes, mas as trajetórias podem ficar substancialmente diferentes (veja o Problema 26).

Em todos os outros casos, perturbações suficientemente pequenas dos coeficientes não alteram a estabilidade ou instabilidade do sistema, nem o tipo de ponto crítico. Por exemplo, se r_1 e r_2 são reais, negativos e distintos, então uma mudança *pequena* nos coeficientes não vai alterar os sinais de r_1 e r_2, nem vai permitir que eles se tornem iguais. Assim, o ponto crítico permanecerá um nó assintoticamente estável.

Vamos considerar, agora, um sistema autônomo bidimensional não-linear

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{3}$$

Nosso objetivo principal é investigar o comportamento das trajetórias do sistema (3) em uma vizinhança de um ponto crítico $\mathbf{x}^0$. Vamos tentar fazer isso aproximando o sistema não-linear (3) por um sistema linear apropriado, cujas trajetórias sejam fáceis de descrever. A pergunta crucial é se as trajetórias do sistema linear são boas aproximações das trajetórias do sistema não-linear. É claro que precisamos saber, também, como encontrar o sistema linear apropriado.

É conveniente escolher o ponto crítico como sendo a origem. Isso não envolve perda de generalidade, já que, se $\mathbf{x}^0 \neq \mathbf{0}$, sempre pode-se fazer a substituição $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$ na Eq. (3). Então $\mathbf{u}$ satisfaz um sistema autônomo com um ponto crítico na origem.

Vamos considerar, primeiro, o que significa, para o sistema não-linear (3), estar "próximo" ao sistema linear (1). Suponha, então, que

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \tag{4}$$

e que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um ponto crítico **isolado** do sistema (4). Isso significa que existe algum círculo em torno da origem no interior do qual não existem outros pontos críticos. Além disso, vamos supor que $\det \mathbf{A} \neq 0$, de modo que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ também é um ponto crítico isolado do sistema linear $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Para que o sistema não-linear (4) seja próximo ao sistema linear $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, temos que supor que $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ seja pequeno. Mais precisamente, vamos supor que as componentes de $\mathbf{g}$ têm derivadas parciais de primeira contínuas e que $\mathbf{g}$ satisfaz a condição

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|/\|\mathbf{x}\| \to 0 \quad \text{quando } \mathbf{x} \to \mathbf{0}; \tag{5}$$

isto é, $\|\mathbf{g}\|$ é pequeno em comparação com $\|\mathbf{x}\|$ próximo à origem. Tal sistema é chamado de **sistema quase linear** na vizinhança do ponto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Pode ser útil escrever a condição (5) em forma escalar. Se $\mathbf{x}^T = (x, y)$, então $\|\mathbf{x}\| = (x^2 + y^2)^{1/2} = r$. Analogamente, se $\mathbf{g}^T(\mathbf{x}) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$, então $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| = [g_1^2(x, y) + g_2^2(x, y)]^{1/2}$. Segue, então, que a condição (5) é satisfeita se, e somente se,

$$g_1(x, y)/r \to 0, \quad g_2(x, y)/r \to 0 \quad \text{quando } r \to 0. \tag{6}$$

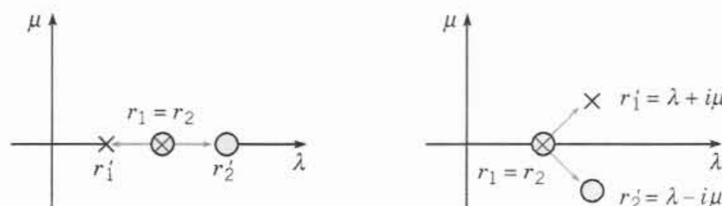


FIG. 9.3.2 Perturbação esquemática de $r_1 = r_2$.

Exemplo 1

Determine se o sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x^2 - xy \\ -0{,}75xy - 0{,}25y^2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

é quase linear em uma vizinhança da origem.

Observe que o sistema (7) é da forma (4), de modo que (0, 0) é um ponto crítico e det $\mathbf{A} \neq 0$. Não é difícil mostrar que os outros pontos críticos da Eq. (7) são (0, 2), (1, 0) e (0,5; 0,5); em conseqüência, a origem é um ponto crítico isolado. Para verificar as condições (6), é conveniente introduzir coordenadas polares, fazendo $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{g_1(x, y)}{r} &= \frac{-x^2 - xy}{r} = \frac{-r^2 \cos^2 \theta - r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{r} \\ &= -r(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}\theta \cos\theta) \to 0 \end{aligned}$$

quando $r \to 0$. De maneira análoga, pode-se mostrar que $g_2(x, y)/r \to 0$ quando $r \to 0$. Portanto, o sistema (7) é quase linear em uma vizinhança da origem.

Exemplo 2

O movimento de um pêndulo é descrito pelo sistema [veja a Eq. (13) da Seção 9.1]

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -\omega^2 \operatorname{sen} x - \gamma y. \tag{8}$$

Os pontos críticos são (0, 0), $(\pm\pi, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, ..., de modo que a origem é um ponto crítico isolado desse sistema. Mostre que o sistema é quase linear próximo à origem.

Para comparar as Eqs. (8) com a Eq. (4), precisamos escrevê-las de modo a identificar claramente os termos lineares e não-lineares. Escrevendo $\operatorname{sen} x = x + (\operatorname{sen} x - x)$ e substituindo na segunda das Eqs. (8), obtemos o sistema equivalente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen} x - x \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Comparando a Eq. (9) com a Eq. (4), vemos que $g_1(x, y) = 0$ e $g_2(x, y) = -\omega^2(\operatorname{sen} x - x)$. Da série de Taylor para sen x, sabemos que $\operatorname{sen} x - x$ se comporta como $-x^3/3! = (r^3 \cos^3 \theta)/3!$ quando x é pequeno. Logo, $(\operatorname{sen} x - x)/r \to 0$ quando $r \to 0$. Portanto, as condições (6) são satisfeitas e o sistema (9) é quase linear em uma vizinhança da origem.

Vamos voltar, agora, para o sistema não-linear geral (3) que, em forma escalar, fica

$$x' = F(x, y), \qquad y' = G(x, y). \tag{10}$$

O sistema (10) vai ser quase linear em uma vizinhança de um ponto crítico (x_0, y_0) sempre que as funções F e G tiverem derivadas parciais contínuas até a segunda ordem. Para mostrar isso, usamos a expansão de Taylor em torno do ponto (x_0, y_0) para escrever $F(x, y)$ e $G(x, y)$ na forma

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) \\ &\quad + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_1(x, y), \\ G(x, y) &= G(x_0, y_0) + G_x(x_0, y_0)(x - x_0) \\ &\quad + G_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_2(x, y), \end{aligned}$$

onde $\eta_1(x, y)/[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2} \to 0$ quando $(x, y) \to (x_0, y_0)$, e analogamente para η_2. Note que $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$ e que $dx/dt = d(x - x_0)/dt$ e $dy/dt = d(y - y_0)/dt$. Então, o sistema (10) se reduz a

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{11}$$

ou, em notação vetorial,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}^0)\mathbf{u} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}), \tag{12}$$

onde $\mathbf{u} = (x - x_0, y - y_0)^T$ e $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)^T$.

Esse resultado tem duas conseqüências. A primeira é que, se as funções F e G forem duas vezes diferenciáveis, então o sistema (10) é quase linear e não é necessário usar o processo-limite utilizado nos Exemplos 1 e 2. A segunda é que o sistema linear que aproxima o sistema não-linear (10) próximo a (x_0, y_0) é dado pela parte linear das Eqs. (11) ou da (12):

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

onde $u_1 = x - x_0$ e $u_2 = y - y_0$. A Eq. (13) fornece um método simples e geral para se encontrar o sistema linear correspondente a um sistema quase linear na vizinhança de um ponto crítico.

Exemplo 3

Use a Eq. (13) para encontrar o sistema linear correspondente às equações do pêndulo (8) em vizinhanças da origem e do ponto crítico $(\pi, 0)$.

Nesse caso temos, da Eq. (8)

$$F(x, y) = y, \quad G(x, y) = -\omega^2 \operatorname{sen} x - \gamma y; \tag{14}$$

como essas funções são tão diferenciáveis quanto necessário, o sistema (8) é quase linear em uma vizinhança de cada ponto crítico. As derivadas de F e G são

$$F_x = 0, \quad F_y = 1, \quad G_x = -\omega^2 \cos x, \quad G_y = -\gamma \tag{15}$$

Então, o sistema linear correspondente próximo à origem é

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{16}$$

o que está de acordo com a Eq. (9).

Analogamente, calculando as derivadas parciais dadas pelas Eqs. (15) em $(\pi, 0)$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{17}$$

onde $u = x - \pi$, $v = y$. Esse é o sistema linear correspondente às Eqs. (8) em uma vizinhança do ponto $(\pi, 0)$.

Vamos voltar, agora, ao sistema quase linear (4). Como o termo não-linear $\mathbf{g(x)}$ é pequeno comparado ao termo linear $\mathbf{Ax}$ quando $\mathbf{x}$ é pequeno, é razoável esperar que as trajetórias do sistema linear (1) sejam boas aproximações das trajetórias do sistema não-linear (4), pelo menos em uma vizinhança da origem. Isso ocorre na maioria dos casos (mas não em todos), como diz o próximo teorema.

Teorema 9.3.2

Sejam r_1 e r_2 os autovalores do sistema linear (1) correspondente ao sistema quase linear (4). Então o tipo e a estabilidade do ponto crítico (0, 0) do sistema linear (1) e do sistema quase linear (4) são como descritos na Tabela 9.3.1.

Nesse estágio, a demonstração do Teorema 9.3.2 é muito difícil, de modo que aceitaremos esse resultado sem demonstração. As afirmações para a estabilidade assintótica e para a instabilidade seguem como conseqüência de um resultado discutido na Seção 9.6, e os problemas de 10 a 12 daquela seção esboçam uma demonstração. Essencialmente, o Teorema 9.3.2 diz que, para $\mathbf{x}$ (ou $\mathbf{x} - \mathbf{x}^0$) pequeno, os termos não-lineares também são pequenos e não afetam a estabilidade e o tipo de ponto crítico determinados pelo sistema linear, exceto em dois casos sensíveis: quando r_1 e r_2 forem imaginários puros, e quando r_1 e r_2 forem reais e iguais. Lembre-se de que antes, nesta seção, afirmamos que pequenas perturbações nos coeficientes do sistema linear (1) e, portanto, nos autovalores r_1 e r_2, só podem alterar o tipo e a estabilidade nesses dois casos sensíveis. Logo, é razoável esperar que o pequeno termo não-linear na Eq. (4) tenha, essencialmente, um efeito semelhante, pelo menos nesses dois casos sensíveis. Isso ocorre, mas o resultado mais importante do Teorema 9.3.2 é que, *em todos os outros casos*, o termo pequeno não-linear não altera o tipo ou a estabilidade do ponto crítico. Assim, exceto nos dois casos sensíveis, o tipo e a estabilidade do ponto crítico do sistema não-linear (4) pode ser determinado por um estudo do sistema linear muito mais simples (1).

Mesmo que o ponto crítico seja do mesmo tipo que o do sistema linear, as trajetórias do sistema quase linear podem ter aparência bem diferente das do sistema linear correspondente, exceto muito próximo do ponto crítico. No entanto, pode-se mostrar que os coeficientes angulares das retas tangentes às trajetórias que "entram" ou "saem" do ponto crítico são dadas corretamente pela equação linear.

Pêndulo Amortecido. Vamos continuar nossa discussão sobre o pêndulo amortecido iniciada nos Exemplos 2 e 3. Perto da origem, as equações não-lineares (8) são aproximadas pelo sistema linear (16), cujos autovalores são

$$r_1, r_2 = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2}. \tag{18}$$

TABELA 9.3.1 Propriedades de Estabilidade e Instabilidade de Sistemas Lineares e Quase Lineares

	Sistema Linear		Sistema Quase Linear	
r_1, r_2	Tipo	Estabilidade	Tipo	Estabilidade
$r_1 > r_2 > 0$	N	Instável	N	Instável
$r_1 < r_2 < 0$	N	Assintoticamente estável	N	Assintoticamente estável
$r_2 < 0 < r_1$	PS	Instável	PS	Instável
$r_1 = r_2 > 0$	NP ou NI	Instável	N ou PE	Instável
$r_1 = r_2 < 0$	NP ou NI	Assintoticamente estável	N ou PE	Assintoticamente estável
$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$				
$\lambda > 0$	PE	Instável	PE	Instável
$\lambda < 0$	PE	Assintoticamente estável	PE	Assintoticamente estável
$r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$	C	Estável	C ou PE	Indeterminado

Nota: N, nó; NI, nó impróprio; NP, nó próprio; PS, ponto de sela; PE, ponto espiral; C, centro.

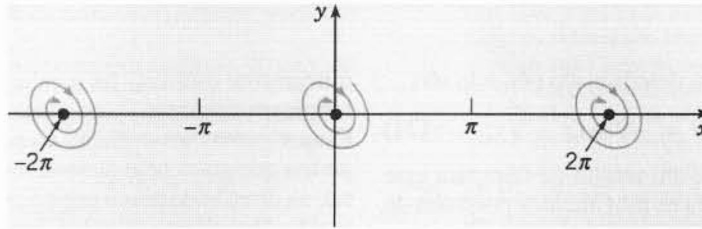


FIG. 9.3.3 Pontos espirais assintoticamente estáveis para o pêndulo amortecido.

A natureza das soluções das Eqs. (8) e (16) depende do sinal de $\gamma^2 - 4\omega^2$ da seguinte maneira:

1. Se $\gamma^2 - 4\omega^2 > 0$, então os autovalores são reais, distintos e negativos. O ponto crítico (0, 0) é um nó assintoticamente estável do sistema linear (16) e do sistema quase linear (8).
2. Se $\gamma^2 - 4\omega^2 = 0$, então os autovalores são reais, iguais e negativos. O ponto crítico (0, 0) é um nó (próprio ou impróprio) assintoticamente estável do sistema linear (16). Pode ser um nó assintoticamente estável ou um ponto espiral do sistema quase linear (8).
3. Se $\gamma^2 - 4\omega^2 < 0$, então os autovalores são complexos com parte real negativa. O ponto crítico (0, 0) é um ponto espiral assintoticamente estável do sistema linear (16) e do sistema quase linear (8).

Então, o ponto crítico (0, 0) é um ponto espiral do sistema (8) se o amortecimento é pequeno e é um nó se o amortecimento é suficientemente grande. Em qualquer dos casos, a origem é assintoticamente estável.

Vamos considerar, agora, o caso $\gamma^2 - 4\omega^2 < 0$, correspondente a um amortecimento pequeno, com mais detalhes. O sentido de movimento das espirais próximas de (0, 0) pode ser obtido diretamente das Eqs. (8). Considere um ponto no qual a espiral faz interseção com o semi-eixo positivo dos y ($x = 0$, $y > 0$). Em um tal ponto, segue das Eqs. (8) que $dx/dt > 0$. Logo, o ponto (x, y) na trajetória está se movendo para a direita, de modo que o sentido do movimento nas espirais é horário.

O comportamento do pêndulo perto dos pontos críticos da forma $(\pm n\pi, 0)$, com n par, é o mesmo que perto da origem. Esperamos que isso seja verdade por considerações físicas, já que todos esses pontos críticos correspondem à posição de equilíbrio mais baixa do pêndulo. Essa conclusão pode ser confirmada repetindo-se a análise feita anteriormente para a origem. A Fig. 9.3.3 mostra as espirais no sentido horário em alguns desses pontos críticos.

Vamos considerar, agora, o ponto crítico $(\pi, 0)$. Aqui as equações não-lineares (8) são aproximadas pelo sistema (17), cujos autovalores são

$$r_1, r_2 = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4\omega^2}}{2}. \tag{19}$$

Um autovalor (r_1) é positivo e o outro (r_2) é negativo. Portanto, independentemente do quão forte é o amortecimento, o ponto crítico $x = \pi$, $y = 0$ é um ponto de sela instável de ambos os sistemas (17) (linear) e (8) (quase linear).

Para examinar o comportamento das trajetórias perto do ponto de sela $(\pi, 0)$ mais detalhadamente, escrevemos a solução geral da Eq. (17), a saber,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} e^{r_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix} e^{r_2 t}, \tag{20}$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. Como $r_1 > 0$ e $r_2 < 0$, segue que a solução que tende a zero quando $t \to \infty$ corresponde a $C_1 = 0$. Para essa solução, $v/u = r_2$, de modo que o coeficiente angular da reta tangente às trajetórias que "entram" é negativo; uma está no segundo quadrante ($C_2 < 0$) e a outra, no quarto quadrante ($C_2 > 0$). Para $C_2 = 0$, obtemos o par de trajetórias "saindo" do ponto de sela. Essas trajetórias têm como coeficiente angular da reta tangente na origem $r_1 > 0$; uma está no primeiro quadrante ($C_1 > 0$) e outra, no terceiro quadrante ($C_1 < 0$).

A situação é a mesma nos outros pontos críticos da forma $(n\pi, 0)$, com n ímpar. Todos eles correspondem à posição de equilíbrio mais alta do pêndulo, de modo que esperamos que sejam instáveis. A análise em $(\pi, 0)$ pode ser repetida para mostrar que são pontos de sela orientados da mesma maneira que em $(\pi, 0)$. A Fig. 9.3.4 mostra diagramas das trajetórias em vizinhanças de dois pontos de sela.

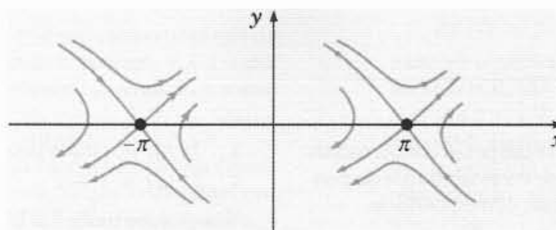


FIG. 9.3.4 Pontos instáveis para o pêndulo amortecido.

Exemplo 4

As equações de movimento de um determinado pêndulo são

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = -9\,\text{sen}\,x - \tfrac{1}{5}y, \qquad (21)$$

onde $x = \theta$ e $y = d\theta/dt$. Desenhe um retrato de fase para esse sistema e explique como ele mostra os movimentos possíveis do pêndulo.

Fazendo o gráfico de trajetórias começando em diversos pontos iniciais no plano de fase, obtemos o retrato de fase ilustrado na Fig. 9.3.5. Como vimos, os pontos críticos (soluções de equilíbrio) são os pontos da forma $(n\pi, 0)$, onde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Valores pares de n, incluindo o zero, correspondem à posição mais baixa do pêndulo, enquanto valores ímpares de n correspondem à posição de equilíbrio mais alta. Perto de cada ponto assintoticamente estável, as trajetórias são espirais no sentido horário que representam uma oscilação que vai diminuindo, tendendo à posição de equilíbrio. As partes horizontais com forma de ondas das trajetórias que ocorrem para valores grandes de $|y|$ representam movimentos do pêndulo que vão além da posição de equilíbrio mais alta. Note que um tal movimento não pode continuar indefinidamente, independentemente do quão grande é $|y|$; alguma hora a velocidade angular vai ser suficientemente reduzida pelo termo de amortecimento de modo que o pêndulo não pode ir mais alto do que o ponto de equilíbrio mais alto e, em vez disso, começa a oscilar em torno do ponto de equilíbrio mais baixo.

As trajetórias que entram nos pontos de sela separam o plano de fase em duas regiões. Tal trajetória é chamada de **separatriz**. Cada região contém exatamente um dos pontos espirais assintoticamente estáveis. As condições iniciais sobre θ e $d\theta/dt$ determinam a posição de um ponto inicial (x, y) no plano de fase. O movimento subseqüente do pêndulo é representado pela trajetória que passa pelo ponto inicial ao tender, em forma de espiral, na direção do ponto crítico assintoticamente estável naquela região. O conjunto de todos os pontos iniciais a partir dos quais a trajetória se aproxima de um ponto crítico assintoticamente estável dado é chamado de **baía de atração** ou **região de estabilidade assintótica** para aquele ponto crítico. Cada ponto crítico assintoticamente estável tem sua baía de atração, que é limitada pelas separatrizes que saem dos, ou entram nos, pontos de sela instáveis vizinhos. A baía de atração da origem aparece sombreada na Fig. 9.3.5. Note que é matematicamente possível (embora fisicamente irrealizável) escolher condições iniciais sobre a separatriz, de modo que o movimento resultante levaria a um pêndulo oscilando em uma posição acima do equilíbrio instável.

Uma diferença importante entre sistemas autônomos não-lineares e o sistema linear discutido na Seção 9.1 é ilustrada pelas equações do pêndulo. Lembre-se de que o sistema linear (1) só tem um ponto crítico em $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se det $\mathbf{A} \neq 0$. Assim, se a origem for assintoticamente estável, então, não só as trajetórias que começam perto da origem tendem a ela, mas, de fato, todas as trajetórias tendem à origem. Nesse caso o ponto crítico $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é dito **globalmente assintoticamente estável**. Essa propriedade de sistemas lineares não é válida, em geral, para sistemas não-lineares. Para sistemas não-lineares, é importante determinar (ou estimar) a baía de atração para cada ponto crítico assintoticamente estável.

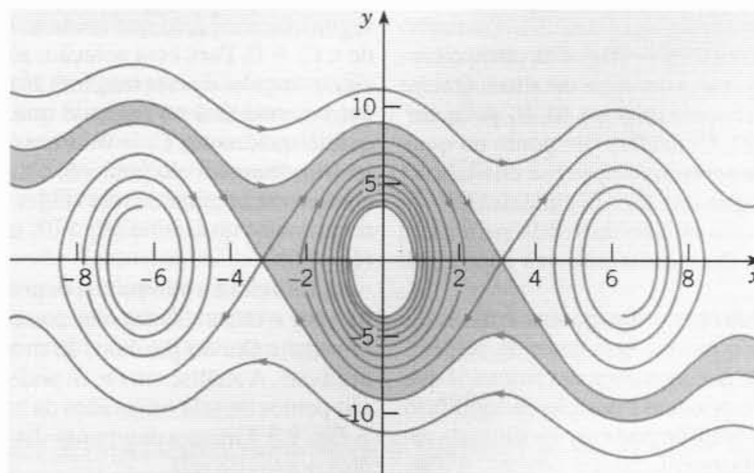


FIG. 9.3.5 Retratos de fase para o pêndulo amortecido do Exemplo 4.

Problemas

Nos problemas de 1 a 4, verifique que (0, 0) é um ponto crítico, mostre que o sistema é quase linear e discuta o tipo e a estabilidade do ponto crítico (0, 0) examinando o sistema linear correspondente.

1. $dx/dt = x - y^2, \qquad dy/dt = x - 2y + x^2$
2. $dx/dt = -x + y + 2xy, \qquad dy/dt = -4x - y + x^2 - y^2$
3. $dx/dt = (1 + x)\,\text{sen}\,y, \qquad dy/dt = 1 - x - \cos y$
4. $dx/dt = x + y^2, \qquad dy/dt = x + y$

Nos problemas de 5 a 16:

(a) Determine todos os pontos críticos do sistema de equações dado.

(b) Encontre o sistema linear correspondente perto de cada ponto crítico.
(c) Encontre os autovalores de cada sistema linear. O que você pode concluir sobre o sistema não-linear?
(d) Desenhe um retrato de fase do sistema não-linear para confirmar suas conclusões, ou para estendê-las nos casos em que o sistema linear não fornece informações definidas sobre o sistema não-linear.

5. $dx/dt = (2+x)(y-x), \quad dy/dt = (4-x)(y+x)$
6. $dx/dt = x - x^2 - xy, \quad dy/dt = 3y - xy - 2y^2$
7. $dx/dt = 1 - y, \quad dy/dt = x^2 - y^2$
8. $dx/dt = x - x^2 - xy, \quad dy/dt = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{4}xy$
9. $dx/dt = -(x-y)(1-x-y), \quad dy/dt = x(2+y)$
10. $dx/dt = x + x^2 + y^2, \quad dy/dt = y - xy$
11. $dx/dt = 2x + y + xy^3, \quad dy/dt = x - 2y - xy$
12. $dx/dt = (1+x)\operatorname{sen} y, \quad dy/dt = 1 - x - \cos y$
13. $dx/dt = x - y^2, \quad dy/dt = y - x^2$
14. $dx/dt = 1 - xy, \quad dy/dt = x - y^3$
15. $dx/dt = -2x - y - x(x^2+y^2),$
$dy/dt = x - y + y(x^2+y^2)$
16. $dx/dt = y + x(1 - x^2 - y^2),$
$dy/dt = -x + y(1 - x^2 - y^2)$
17. Considere o sistema autônomo

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = x + 2x^3.$$

(a) Mostre que o ponto crítico (0, 0) é um ponto de sela.
(b) Esboce as trajetórias para o sistema linear correspondente integrando a equação para dy/dx. Mostre, da forma paramétrica da solução, que a única trajetória na qual $x \to 0$, $y \to 0$ quando $t \to \infty$ é $y = -x$.
(c) Determine as trajetórias para o sistema não-linear integrando a equação para dy/dx. Esboce as trajetórias para o sistema não-linear que correspondem a $y = -x$ e a $y = x$ para o sistema linear.
18. Considere o sistema autônomo

$$dx/dt = x, \qquad dy/dt = -2y + x^3.$$

(a) Mostre que o ponto crítico (0, 0) é um ponto de sela.
(b) Esboce as trajetórias para o sistema linear correspondente e mostre que a trajetória na qual $x \to 0$, $y \to 0$ quando $t \to \infty$ é $x = 0$.
(c) Determine as trajetórias para o sistema não-linear para $x \neq 0$ integrando a equação para dy/dx. Mostre que a trajetória correspondente a $x = 0$ para o sistema não-linear não se altera, mas que a correspondente a $y = 0$ é $y = x^3/5$. Esboce diversas trajetórias para o sistema não-linear.
19. A equação de movimento de um pêndulo sem amortecimento é $d^2\theta/dt + \omega^2 \operatorname{sen}\theta = 0$, onde $\omega^2 = g/L$. Faça $x = \theta$, $y = d\theta/dt$ para obter o sistema

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = -\omega^2 \operatorname{sen} x.$$

(a) Mostre que os pontos críticos são $(\pm n\pi, 0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, e que o sistema é quase linear na vizinhança de cada ponto crítico.
(b) Mostre que o ponto crítico (0, 0) é um centro (estável) do sistema linear correspondente. Usando o Teorema 9.3.2, o que se pode dizer sobre o sistema não-linear? A situação é semelhante nos pontos críticos $(\pm 2n\pi, 0)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Qual a interpretação física desses pontos críticos?
(c) Mostre que o ponto crítico $(\pi, 0)$ é um ponto de sela (instável) do sistema linear correspondente. O que você pode concluir sobre o sistema não-linear? A situação é semelhante nos pontos críticos $[\pm(2n-1)\pi, 0]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Qual a interpretação física desses pontos críticos?
(d) Escolha um valor para ω^2 e faça o gráfico de algumas trajetórias do sistema não-linear na vizinhança da origem. Você pode concluir mais alguma coisa sobre a natureza do ponto crítico (0, 0) para o sistema não-linear?
(e) Usando o valor de ω^2 do item (d), desenhe um retrato de fase para o pêndulo. Compare seu gráfico com o da Fig. 9.3.5 para o pêndulo com amortecimento.
20. (a) Resolvendo a equação para dy/dx, mostre que as equações das trajetórias do pêndulo sem amortecimento do Problema 19 podem ser escritas na forma

$$\tfrac{1}{2}y^2 + \omega^2(1 - \cos x) = c, \tag{i}$$

onde c é uma constante de integração.
(b) Multiplique a Eq. (i) por mL^2 e, depois, expresse o resultado em termos de θ para obter

$$\frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgL(1 - \cos\theta) = E, \tag{ii}$$

onde $E = mL^2c$.
(c) Mostre que o primeiro termo na Eq. (ii) é a energia cinética do pêndulo e que o segundo termo é a energia potencial devida à gravidade. Logo, a energia total E do pêndulo é constante ao longo de qualquer trajetória; seu valor é determinado pelas condições iniciais.
21. O movimento de determinado pêndulo sem amortecimento é descrito pelas equações

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = -4 \operatorname{sen} x.$$

Se o pêndulo é colocado em movimento com um deslocamento angular A e sem velocidade inicial, então as condições iniciais são $x(0) = A$, $y(0) = 0$.
(a) Considere $A = 0{,}25$ e faça o gráfico de x em função de t. Do gráfico, estime a amplitude R e o período T do movimento resultante do pêndulo.
(b) Repita o item (a) para $A = 0{,}5$; 1,0; 1,5 e 2,0.
(c) De que modo a amplitude e o período do movimento do pêndulo dependem da posição inicial A? Desenhe um gráfico para mostrar cada uma dessas relações. Você pode dizer alguma coisa sobre o valor-limite do período quando $A \to 0$?
(d) Seja $A = 4$ e faça o gráfico de x em função de t. Explique por que esse gráfico difere dos gráficos nos itens (a) e (b). Para que valor de A acontece a mudança?
22. Considere, mais uma vez, as equações do pêndulo (veja o Problema 21)

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = -4 \operatorname{sen} x.$$

Se o pêndulo é colocado em movimento a partir de sua posição mais baixa de equilíbrio com velocidade angular v, então as condições iniciais são $x(0) = 0$, $y(0) = v$.
(a) Faça os gráficos de x em função de t para $v = 2$ e, também, para $v = 5$. Explique os movimentos diferentes do pêndulo representados por esses dois gráficos.
(b) Existe um valor crítico de v, que denotaremos por v_c, tal que um tipo de movimento ocorre para $v < v_c$ e o outro tipo ocorre para $v > v_c$. Estime o valor de v_c.
23. Esse problema estende o Problema 22 para o caso de um pêndulo amortecido. As equações de movimento são

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = -4 \operatorname{sen} x - \gamma y,$$

onde γ é o coeficiente de amortecimento, com condições iniciais $x(0) = 0$, $y(0) = v$.
(a) Para $\gamma = 1/4$, faça o gráfico de x em função de t para $v = 2$ e $v = 5$. Explique esses gráficos em termos dos movimentos do pêndulo que representam. Explique, também, qual a relação entre eles e os gráficos correspondentes no Problema 22(a).
(b) Estime o valor crítico v_c da velocidade inicial onde ocorre a transição de um tipo de movimento para outro.

(c) Repita o item (b) para outros valores de γ e determine como v_c depende de γ.

24. O Teorema 9.3.2 não dá informação sobre a estabilidade de um ponto crítico de um sistema quase linear, se esse ponto é um centro do sistema linear correspondente. Que isso tem que acontecer é ilustrado pelos sistemas

$$\begin{aligned} dx/dt &= y + x(x^2 + y^2), \\ dy/dt &= -x + y(x^2 + y^2) \end{aligned} \qquad \text{(i)}$$

e

$$\begin{aligned} dx/dt &= y - x(x^2 + y^2), \\ dy/dt &= -x - y(x^2 + y^2). \end{aligned} \qquad \text{(ii)}$$

(a) Mostre que (0, 0) é um ponto crítico de cada um dos sistemas e que, além disso, é um centro do sistema linear correspondente.
(b) Mostre que cada sistema é quase linear.
(c) Seja $r^2 = x^2 + y^2$ e note que $x\,dx/dt + y\,dy/dt = r\,dr/dt$. Para o sistema (ii), mostre que $dr/dt < 0$ e que $r \to 0$ quando $t \to \infty$; portanto, o ponto crítico é assintoticamente estável. Para o sistema (i), mostre que a solução do problema de valor inicial para r com $r = r_0$ em $t = 0$ torna-se ilimitada quando $t \to 1/2r_0^2$ e, portanto, o ponto crítico é instável.

25. Neste problema, vamos mostrar como pequenas mudanças nos coeficientes de um sistema de equações lineares podem afetar um ponto crítico que é um centro. Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Mostre que os autovalores são $\pm i$, de modo que (0, 0) é um centro. Considere, agora o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ -1 & \epsilon \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

onde $|\epsilon|$ é arbitrariamente pequeno. Mostre que os autovalores são $\epsilon \pm i$. Assim, independentemente do quão pequeno for $|\epsilon| \neq 0$, o centro torna-se um ponto espiral. Se $\epsilon < 0$, o ponto espiral é assintoticamente estável; se $\epsilon > 0$, o ponto espiral é instável.

26. Neste problema, vamos mostrar como pequenas mudanças nos coeficientes de um sistema de equações lineares podem afetar um ponto crítico quando os autovalores são iguais. Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Mostre que os autovalores são $r_1 = -1$, $r_2 = -1$, de modo que o ponto crítico (0, 0) é um nó assintoticamente estável. Considere, agora, o sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\epsilon & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

onde $|\epsilon|$ é arbitrariamente pequeno. Mostre que, se $\epsilon > 0$, então os autovalores são $-1 \pm \sqrt{\epsilon}$, de modo que o nó assintoticamente estável se transformou em um ponto espiral assintoticamente estável. Se $\epsilon < 0$, então as raízes são $-1 \pm \sqrt{|\epsilon|}$ e o ponto crítico permanece sendo um nó assintoticamente estável.

27. Neste problema, vamos deduzir uma fórmula para o período natural de um pêndulo não-linear sem amortecimento [$c = 0$ na Eq. (10) da Seção 9.2]. Suponha que a massa é puxada por um ângulo positivo α e, depois, solta com velocidade zero.
(a) Pensamos, em geral, em θ e $d\theta/dt$ como funções de t. No entanto, invertendo os papéis de t e θ, podemos considerar t como função de θ e, portanto, podemos pensar, também, em $d\theta/dt$ como função de θ. Deduzimos, então, a seguinte seqüência de equações:

$$\frac{1}{2}mL^2\frac{d}{d\theta}\left[\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = -mgL\,\text{sen}\,\theta,$$

$$\frac{1}{2}m\left(L\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mgL(\cos\theta - \cos\alpha),$$

$$dt = -\sqrt{\frac{L}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

Por que foi escolhida a raiz quadrada negativa na última equação?
(b) Se T é o período natural de oscilação, deduza a fórmula

$$\frac{T}{4} = -\sqrt{\frac{L}{2g}}\int_\alpha^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

(c) Usando as identidades $\cos\theta = 1 - 2\,\text{sen}^2(\theta/2)$ e $\cos\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2(\alpha/2)$, seguidas pela mudança de variável $\text{sen}(\theta/2) = k\,\text{sen}\,\phi$, com $k = \text{sen}(\alpha/2)$, mostre que

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\,\text{sen}^2\,\phi}}.$$

Essa é uma **integral elíptica** de primeira espécie. Note que o período depende da razão L/g e, também, do deslocamento inicial, através de $k = \text{sen}(\alpha/2)$.
(d) Calculando a integral na expressão para T, obtenha valores de T que você possa comparar com as estimativas gráficas obtidas no Problema 21.

28. Uma generalização da equação do pêndulo amortecido discutida no texto, ou de um sistema massa-mola, é a equação de Liénard[2]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0.$$

Se $c(x)$ for constante e $g(x) = kx$, então esta equação tem a forma da equação linear do pêndulo [substitua $\text{sen}\,\theta$ por θ na Eq. (12) da Seção 9.2]; caso contrário, o amortecimento $c(x)dx/dt$ e a força restauradora $g(x)$ são não-lineares. Suponha que c é continuamente diferenciável, que g é duas vezes continuamente diferenciável e que $g(0) = 0$.
(a) Escreva a equação de Liénard como um sistema de duas equações de primeira ordem, introduzindo a variável $y = dx/dt$.
(b) Mostre que (0, 0) é um ponto crítico e que o sistema é quase linear em uma vizinhança de (0, 0).
(c) Mostre que, se $c(0) > 0$ e $g'(0) > 0$, então o ponto crítico é assintoticamente estável e, se $c(0) < 0$ ou se $g'(0) < 0$, então o ponto crítico é instável.
Sugestão: Use a série de Taylor para aproximar c e g em uma vizinhança de $x = 0$.

9.4 Espécies em Competição

Nesta seção e na próxima, vamos explorar a aplicação da análise do plano de fase em alguns problemas em dinâmica populacional. Esses problemas envolvem duas populações interagindo e são extensões dos discutidos na Seção 2.5, que trataram de uma única população. Embora as equações discutidas aqui sejam extremamente simples, se comparadas às relações complexas que

[2] Alfred-Marie Liénard (1869-1958), professor da École des Mines em Paris, trabalhou em eletricidade, mecânica e matemática aplicada. Sua investigação dessa equação diferencial foi publicada em 1928.

existem na natureza, ainda é possível compreender algumas coisas sobre princípios ecológicos pelo estudo desses modelos.

Suponha que, em algum ambiente fechado, existam duas espécies semelhantes competindo por um suprimento limitado de comida; por exemplo, duas espécies de peixe em um lago, nenhuma sendo presa da outra, mas ambas competindo pela comida disponível. Vamos denotar por x e y as populações das duas espécies em um instante t. Como discutimos na Seção 2.5, vamos supor que a população de cada espécie, na ausência da outra, seja governada por uma equação logística. Então,

$$dx/dt = x(\epsilon_1 - \sigma_1 x), \quad (1a)$$

$$dy/dt = y(\epsilon_2 - \sigma_2 y), \quad (1b)$$

respectivamente, onde ϵ_1 e ϵ_2 são as taxas de crescimento das duas populações, e ϵ_1/σ_1 e ϵ_2/σ_2 são seus níveis de saturação. No entanto, quando ambas as espécies estão presentes, cada uma vai afetar o suprimento de comida disponível para a outra. De fato, elas reduzem as taxas de crescimento e as saturações, uma da outra. A expressão mais simples para reduzir a taxa de crescimento da espécie x devido à presença da espécie y é substituir o fator de crescimento $\epsilon_1 - \sigma_1 x$ na Eq. (1a) por $\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y$, onde α_1 é uma medida do grau de interferência da espécie y sobre a espécie x. Analogamente, substituímos $\epsilon_2 - \sigma_2 y$ na Eq. (1b) por $\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x$. Obtemos, então, o sistema de equações

$$\begin{aligned} dx/dt &= x(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y), \\ dy/dt &= y(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x). \end{aligned} \quad (2)$$

Os valores das constantes positivas ϵ_1, σ_1, α_1, ϵ_2, σ_2 e α_2 dependem das espécies particulares em consideração e têm que ser determinados, em geral, através de observações. Estamos interessados nas soluções das Eqs. (2) para as quais x e y não são negativos. Nos dois exemplos a seguir, discutimos dois problemas típicos em detalhe. Voltaremos às equações gerais (2) no final desta seção.

Exemplo 1

Discuta o comportamento qualitativo das soluções do sistema

$$\begin{aligned} dx/dt &= x(1 - x - y), \\ dy/dt &= y(0,75 - y - 0,5x). \end{aligned} \quad (3)$$

Encontramos os pontos críticos resolvendo o sistema de equações algébricas

$$x(1 - x - y) = 0, \qquad y(0,75 - y - 0,5x) = 0. \quad (4)$$

Existem quatro pontos que satisfazem as Eqs. (4), a saber, (0, 0), (0, 0,75), (1, 0) e (0,5; 0,5); eles correspondem às soluções de equilíbrio do sistema (3). Os três primeiros desses pontos envolvem a extinção de uma das espécies ou de ambas; apenas o último corresponde à sobrevivência, a longo prazo, de ambas as espécies. Outras soluções são representadas por curvas ou trajetórias no plano xy, que descrevem a evolução das populações ao longo do tempo. Para começar a descobrir seu comportamento qualitativo, vamos proceder da seguinte maneira.

A Fig. 9.4.1 mostra um campo de direções para o sistema (3) no quadrante positivo; os pontos maiores nessa figura são os pontos críticos, ou soluções de equilíbrio. Baseados no campo de direção, parece que o ponto (0,5; 0,5) atrai outras soluções e é, portanto, assintoticamente estável, enquanto os outros três pontos críticos são instáveis. Para confirmar essas conclusões, podemos olhar as aproximações lineares perto de cada ponto crítico.

O sistema (3) é quase linear em vizinhanças de cada ponto crítico. Existem duas maneiras de se obter o sistema linear perto de um ponto crítico (X, Y). Primeiro, podemos usar a substituição $x = X + u$, $y = Y + v$ nas Eqs. (3), retendo, apenas, os termos lineares em u e v. A segunda maneira é usar a Eq. (13) da Seção 9.3, isto é,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(X, Y) & F_y(X, Y) \\ G_x(X, Y) & G_y(X, Y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (5)$$

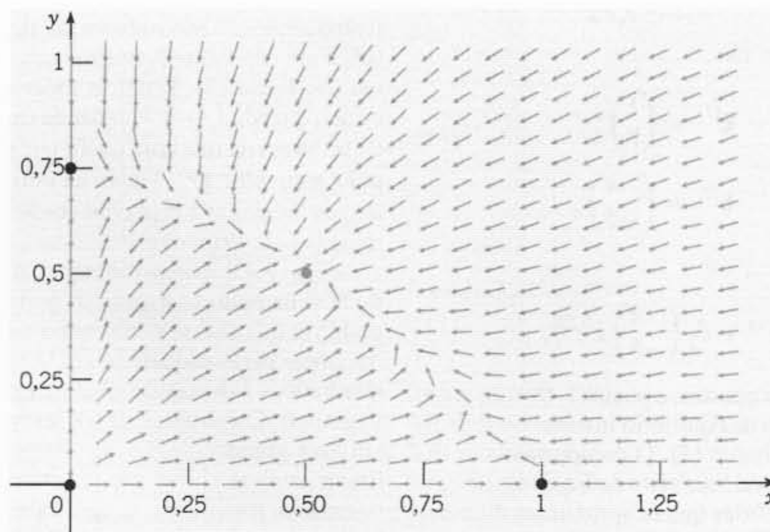


FIG. 9.4.1 Pontos críticos e campo de direções para o sistema (3).

onde, para o sistema (3),

$$\begin{aligned} F(x,y) &= x(1-x-y), \\ G(x,y) &= y(0{,}75-y-0{,}5x). \end{aligned} \tag{6}$$

Logo, a Eq. (5) fica

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2X-Y & -X \\ -0{,}5Y & 0{,}75-2Y-0{,}5X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{7}$$

$x = 0, y = 0$. Esse ponto crítico corresponde ao estado em que ambas as espécies morrem como resultado da competição. Colocando o sistema (3) na forma

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^2+xy \\ 0{,}5xy+y^2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

ou, fazendo $X = Y = 0$ na Eq. (7), vemos que, perto da origem, o sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Os autovalores e autovetores do sistema (9) são

$$\begin{aligned} r_1 &= 1, & \boldsymbol{\xi}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ r_2 &= 0{,}75, & \boldsymbol{\xi}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{10}$$

de modo que a solução geral do sistema é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{0{,}75t}. \tag{11}$$

Então, a origem é um nó instável de ambos os sistemas, do linear (9) e do não-linear (8) ou (3). Em uma vizinhança da origem, todas as trajetórias são tangentes ao eixo dos y, exceto por uma trajetória que está contida no eixo dos x.

$x = 1, y = 0$. Esse ponto corresponde a um estado em que a espécie x sobrevive à competição, mas a espécie y, não. O sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Seus autovalores e autovetores são

$$\begin{aligned} r_1 &= -1, & \boldsymbol{\xi}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ r_2 &= 0{,}25, & \boldsymbol{\xi}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{13}$$

e sua solução geral é

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}e^{0{,}25t}. \tag{14}$$

Como os autovalores têm sinais opostos, o ponto $(1, 0)$ é um ponto de sela e, portanto, é um ponto de equilíbrio instável do sistema linear (12) e do sistema não-linear (3). O comportamento das trajetórias próximas de $(1, 0)$ pode ser visto da Eq. (14). Se $c_2 = 0$, então existe um par de trajetórias que se aproximam do ponto crítico ao longo do eixo dos x. Todas as outras trajetórias se afastam de uma vizinhança de $(1, 0)$.

$x = 0, y = 0{,}75$. Nesse caso, a espécie y sobrevive, mas x não. A análise é semelhante à análise para o ponto $(1, 0)$. O sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0 \\ -0{,}375 & -0{,}75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Os autovalores e autovetores são

$$\begin{aligned} r_1 &= 0{,}25, & \boldsymbol{\xi}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}; \\ r_2 &= -0{,}75, & \boldsymbol{\xi}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{16}$$

de modo que a solução geral da Eq. (15) é

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}e^{0{,}25t} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-0{,}75t}. \tag{17}$$

Logo, o ponto (0; 0,75) também é um ponto de sela. Todas as trajetórias deixam uma vizinhança desse ponto, exceto um par que se aproxima ao longo do eixo dos y.

$x = 0{,}5, y = 0{,}5$. Esse ponto crítico corresponde a um estado de equilíbrio misto, ou de coexistência, na competição entre as duas espécies. Os autovalores e autovetores do sistema linear correspondente

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}25 & -0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{18}$$

são

$$\begin{aligned} r_1 &= (-2+\sqrt{2})/4 \cong -0{,}146, & \boldsymbol{\xi}^{(1)} &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}; \\ r_2 &= (-2-\sqrt{2})/4 \cong -0{,}854, & \boldsymbol{\xi}^{(2)} &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{19}$$

Portanto, a solução geral da Eq. (18) é

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}e^{-0{,}146t} + c_2\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}e^{-0{,}854t}. \tag{20}$$

Como ambos os autovalores são negativos, o ponto crítico (0,5; 0,5) é um nó assintoticamente estável do sistema (18) e do sistema não-linear (3). Todas as trajetórias se aproximam do ponto crítico quando $t \to \infty$. Um par de trajetórias tende ao ponto crítico ao longo da reta com coeficiente angular $\sqrt{2}/2$, determinada pelo autovetor $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$. Todas as outras tendem ao ponto crítico tangencialmente à reta com coeficiente angular $-\sqrt{2}/2$, determinada pelo autovetor $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$.

A Fig. 9.4.2 mostra um retrato de fase do sistema (3). Olhando bem de perto as trajetórias perto de cada ponto crítico, você pode ver que elas se comportam da maneira prevista pelo sistema linear perto daquele ponto. Além disso, note que os termos quadráticos à direita do sinal de igualdade na Eq. (3) são todos negativos. Como esses são os termos dominantes para x e y positivos e grandes, segue que, longe da origem no primeiro quadrante, ambos x' e y' são negativos, isto é, as trajetórias estão orientadas para dentro. Logo, todas as trajetórias que começam em um ponto (x_0, y_0) com $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$ vão acabar tendendo ao ponto (0,5; 0,5).

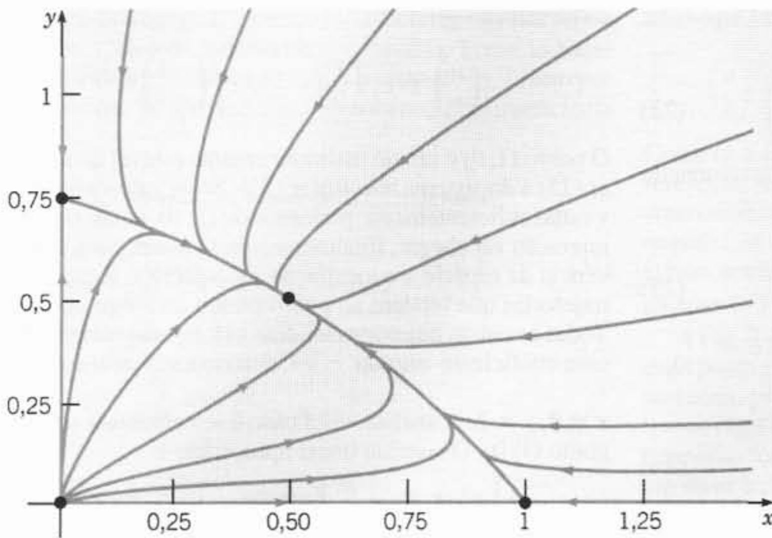


FIG. 9.4.2 Um retrato de fase do sistema (3).

Exemplo 2

Discuta o comportamento qualitativo das soluções do sistema

$$\begin{aligned} dx/dt &= x(1 - x - y), \\ dy/dt &= y(0,5 - 0,25y - 0,75x), \end{aligned} \tag{21}$$

onde x e y não são negativos. Observe que esse sistema é, também, um caso particular do sistema (2) para duas espécies em competição.

Mais uma vez, existem quatro pontos críticos, a saber, (0, 0), (1, 0), (0, 2) e (0,5; 0,5), correspondendo às posições de equilíbrio do sistema (21). A Fig. 9.4.3 mostra um campo de direções para o sistema (21), junto com os quatro pontos críticos. Do campo de direções, parece que a solução de equilíbrio misto (0,5; 0,5) é um ponto de sela e, portanto, instável, enquanto os pontos (1, 0) e (0, 2) são assintoticamente estáveis. Logo, para a competição descrita pelas Eqs. (21), uma espécie vai acabar sobrepujando a outra, levando-a à extinção. A espécie sobrevivente é determinada pelo estado inicial do sistema. Para confirmar essas conclusões, vamos olhar as aproximações lineares em vizinhanças de cada ponto crítico.

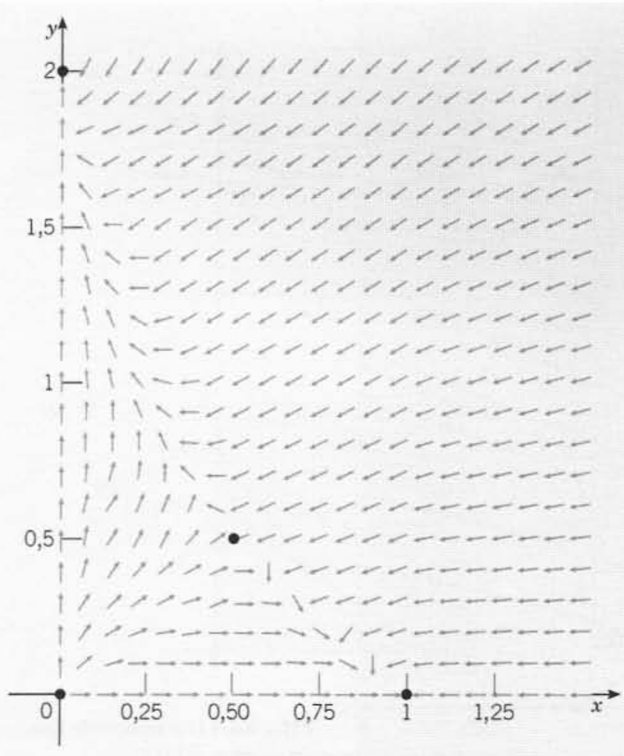


FIG. 9.4.3 Pontos críticos e campo de direções para o sistema (21).

$x = 0, y = 0$. Desprezando os termos não-lineares nas Eqs. (21), obtemos o sistema linear

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \tag{22}$$

que é válido perto da origem. Os autovalores e autovetores do sistema (22) são

$$r_1 = 1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}; \qquad r_2 = 0{,}5, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \tag{23}$$

de modo que a solução geral é

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{0,5t}. \tag{24}$$

Portanto, a origem é um nó estável do sistema linear (22) e, também, do sistema não-linear (21). Todas as trajetórias deixam a origem tangencialmente ao eixo dos y, exceto por uma trajetória que está contida no eixo dos x.

$x = 1, y = 0$. O sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -1\\0 & -0{,}25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}. \tag{25}$$

Seus autovalores e autovetores são

$$r_1 = -1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}; \qquad r_2 = -0{,}25, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}, \tag{26}$$

e sua solução geral é

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}e^{-0,25t}. \tag{27}$$

O ponto (1, 0) é um nó assintoticamente estável do sistema linear (25) e do sistema não-linear (21). Se os valores iniciais de x e y estão suficientemente próximos de (1, 0), então o processo de interação vai chegar, finalmente, a esse estado, isto é, à sobrevivência da espécie x e à extinção da espécie y. Existe um par de trajetórias que tendem ao ponto crítico ao longo do eixo dos x. Todas as outras trajetórias tendem a (1, 0) tangencialmente à reta com coeficiente angular $-3/4$, determinada pelo autovetor $\xi^{(2)}$.

$x = 0, y = 2$. A análise neste caso é semelhante à análise para o ponto (1, 0). O sistema linear apropriado é

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\-1{,}5 & -0{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}. \tag{28}$$

Os autovalores e autovetores desse sistema são

$$r_1 = -1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}; \qquad r_2 = -0{,}5, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \tag{29}$$

e sua solução geral é

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{-0,5t}. \tag{30}$$

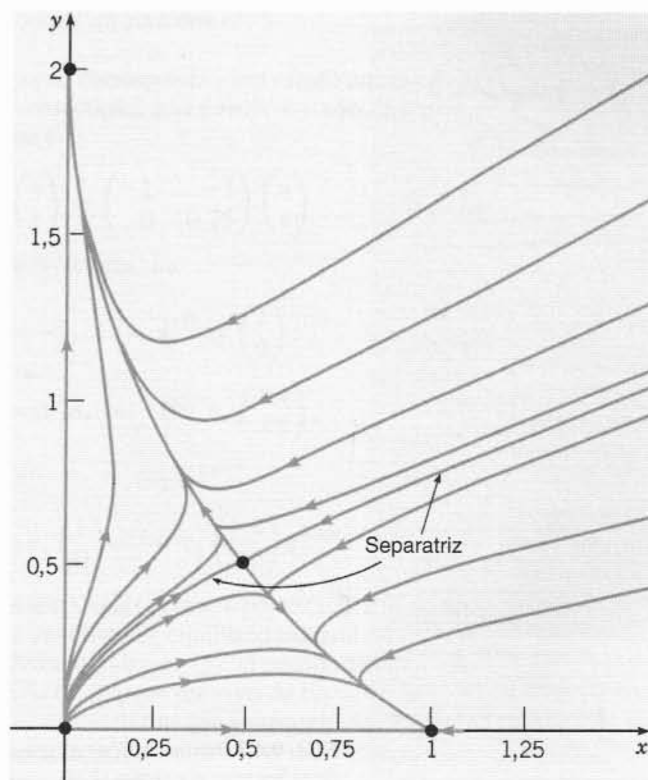


FIG. 9.4.4 Um retrato de fase do sistema (21).

Logo, o ponto crítico (0, 2) é um nó assintoticamente estável do sistema linear (28) e do sistema não-linear (21). Todas as trajetórias tendem ao ponto crítico ao longo do eixo dos y, exceto por uma trajetória que se aproxima ao longo da reta com coeficiente angular 3.

$x = 0{,}5$, $y = 0{,}5$. O sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}5 \\ -0{,}375 & -0{,}125 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Os autovalores e autovetores desse sistema são

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{-5+\sqrt{57}}{16} \cong 0{,}1594, \\ \xi^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ (-3-\sqrt{57})/8 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}3187 \end{pmatrix}, \\ r_2 &= \frac{-5-\sqrt{57}}{16} \cong -0{,}7844, \\ \xi^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ (-3+\sqrt{57})/8 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5687 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (32)$$

de modo que a solução geral é

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}3187 \end{pmatrix}e^{0{,}1594t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5687 \end{pmatrix}e^{-0{,}7844t}. \quad (33)$$

Como os autovalores têm sinais opostos, o ponto crítico (0,5; 0,5) é um ponto de sela e, portanto, instável, como tínhamos deduzido anteriormente. Um par de trajetórias se aproxima do ponto crítico quando $t \to \infty$; as outras se afastam dele. Ao se aproximar do ponto crítico, as trajetórias entram tangencialmente à reta com coeficiente angular $(\sqrt{57} - 3)/8 \cong 0{,}5687$, determinada pelo autovetor $\xi^{(2)}$.

A Fig. 9.4.4 mostra um retrato de fase do sistema (21). Perto de cada ponto crítico, as trajetórias do sistema não-linear se comportam como previsto pela aproximação linear correspondente. De interesse especial é o par de trajetórias que entra no ponto de sela. Essas trajetórias formam uma separatriz que divide o primeiro quadrante em duas baías de atração. As trajetórias começando acima da separatriz acabam se aproximando do nó em (0, 2), enquanto as trajetórias começando abaixo da separatriz tendem ao nó em (1, 0). Se o ponto inicial pertence à separatriz, então a solução (x, y) tende ao ponto de sela quando $t \to \infty$. No entanto, a menor perturbação ao se seguir essa trajetória vai deslocar o ponto (x, y) da separatriz e fazer com que ele se aproxime de um dos dois nós. Logo, na prática, uma espécie vai sobreviver à competição e a outra não.

Os Exemplos 1 e 2 mostram que, em alguns casos, a competição entre duas espécies leva a um estado de equilíbrio de coexistência, enquanto em outros casos a competição resulta, finalmente, na extinção de uma das espécies. Para compreender mais claramente como e por que isso acontece, e para aprender como prever qual situação vai ocorrer, vamos olhar, mais uma vez, para o sistema geral (2). Existem quatro casos a serem considerados, dependendo da orientação relativa das retas

$$\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y = 0 \quad \text{e} \quad \epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x = 0, \quad (34)$$

como mostra a Fig. 9.4.5. Essas retas são chamadas, respectivamente, de **nuliclinais** de x e y, já que x' se anula na primeira e y' na segunda. Denote por (X, Y) qualquer ponto crítico

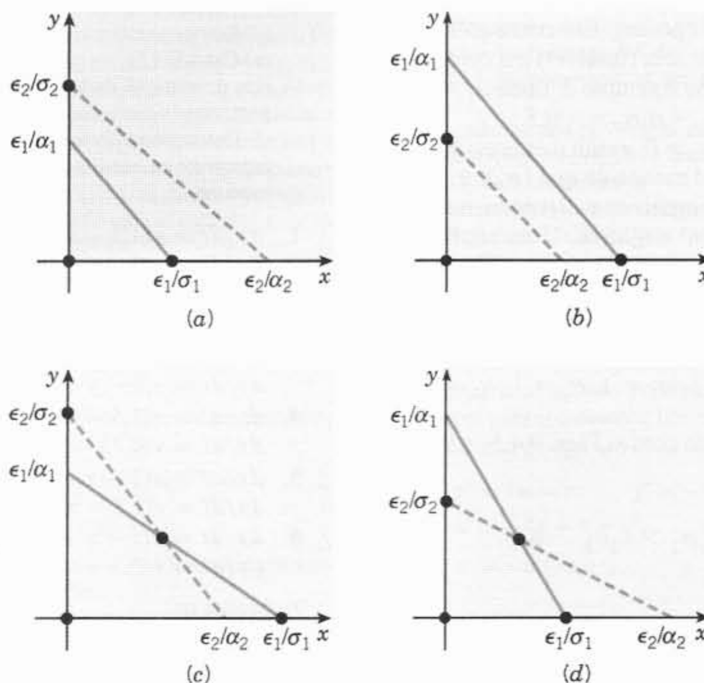


FIG. 9.4.5 Os diversos casos para o sistema de espécies em competição (2).

em qualquer um dos quatro casos. Como nos Exemplos 1 e 2, o sistema (2) é quase linear em uma vizinhança desse ponto, já que a expressão à direita do sinal de igualdade em cada equação diferencial é um polinômio de grau 2. Para estudar o sistema (2) em uma vizinhança desse ponto crítico, vamos olhar o sistema linear correspondente obtido da Eq. (13) da Seção 9.3,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 - 2\sigma_1 X - \alpha_1 Y & -\alpha_1 X \\ -\alpha_2 Y & \epsilon_2 - 2\sigma_2 Y - \alpha_2 X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Vamos usar, agora, a Eq. (35) para determinar as condições sob as quais o modelo descrito pelas Eqs. (2) permite a coexistência das duas espécies x e y. Dos quatro casos possíveis ilustrados na Fig. 9.4.5, a coexistência só é possível nos casos (c) e (d). Nesses casos, os valores não-nulos de X e Y são obtidos, imediatamente, resolvendo-se as equações algébricas (34); o resultado é

$$X = \frac{\epsilon_1\sigma_2 - \epsilon_2\alpha_1}{\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2}, \quad Y = \frac{\epsilon_2\sigma_1 - \epsilon_1\alpha_2}{\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2}. \quad (36)$$

Além disso, como $\epsilon_1 - \sigma_1 X - \alpha_1 Y = 0$ e $\epsilon_2 - \sigma_2 Y - \alpha_2 X = 0$, a Eq. (35) se reduz, imediatamente, a

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 X & -\alpha_1 X \\ -\alpha_2 Y & -\sigma_2 Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Os autovalores do sistema (37) são encontrados a partir da equação

$$r^2 + (\sigma_1 X + \sigma_2 Y)r + (\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2)XY = 0. \quad (38)$$

Logo,

$$r_{1,2} = \frac{-(\sigma_1 X + \sigma_2 Y) \pm \sqrt{(\sigma_1 X + \sigma_2 Y)^2 - 4(\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2)XY}}{2}. \quad (39)$$

Se $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 < 0$, então a expressão dentro da raiz quadrada na Eq. (39) é positiva e maior do que $(\sigma_1 X + \sigma_2 Y)^2$. Logo, os autovalores são reais e de sinais opostos. Em conseqüência, o ponto crítico (X, Y) é um ponto de sela (instável) e a coexistência não é possível. Esse é o caso no Exemplo 2, onde $\sigma_1 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\sigma_2 = 0{,}25$, $\alpha_2 = 0{,}75$ e $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 = -0{,}5$.

Por outro lado, se $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 > 0$, então a expressão dentro da raiz quadrada na Eq. (39) é menor do que $(\sigma_1 X + \sigma_2 Y)^2$. Então, os autovalores são reais negativos e distintos, ou complexos conjugados com parte real negativa. Uma análise direta da expressão dentro da raiz quadrada na Eq. (39) mostra que os autovalores não podem ser complexos (veja o Problema 7). Portanto, o ponto crítico é um nó assintoticamente estável e uma coexistência sustentável é possível. Isso está ilustrado no Exemplo 1, onde $\sigma_1 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\sigma_2 = 1$, $\alpha_2 = 0{,}5$ e $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 = 0{,}5$.

Vamos relacionar esse resultado com as Figs. 9.4.5*c* e 9.4.5*d*. Na Fig. 9.4.5*c*, temos

$$\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} > \frac{\epsilon_2}{\alpha_2} \quad \text{ou} \quad \epsilon_1\alpha_2 > \epsilon_2\sigma_1 \quad \text{e}$$
$$\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} > \frac{\epsilon_1}{\alpha_1} \quad \text{ou} \quad \epsilon_2\alpha_1 > \epsilon_1\sigma_2. \quad (40)$$

Essas desigualdades, acopladas com a condição de que X e Y dados pela Eq. (36) são positivos, nos leva à desigualdade $\sigma_1\sigma_2 < \alpha_1\alpha_2$. Logo, nesse caso, o ponto crítico é um ponto de sela. Por outro lado, na Fig. 9.4.5*d*, temos

$$\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} < \frac{\epsilon_2}{\alpha_2} \quad \text{ou} \quad \epsilon_1\alpha_2 < \epsilon_2\sigma_1 \quad \text{e}$$
$$\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} < \frac{\epsilon_1}{\alpha_1} \quad \text{ou} \quad \epsilon_2\alpha_1 < \epsilon_1\sigma_2. \quad (41)$$

A condição de que X e Y são positivos nos leva, agora, a $\sigma_1\sigma_2 > \alpha_1\alpha_2$. Portanto, o ponto crítico é assintoticamente estável. Para esse caso, podemos mostrar, também, que os outros pontos críticos $(0, 0)$, $(\epsilon_1/\sigma_1, 0)$ e $(0, \epsilon_2/\sigma_2)$ são instáveis. Assim, para quaisquer valores iniciais positivos para x e y, as duas populações vão tender ao estado de equilíbrio de coexistência dado pelas Eqs. (36).

As Eqs. (2) fornecem a interpretação biológica do resultado de que a coexistência ocorre ou não, dependendo se $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2$ é positivo ou negativo. Os σ medem o efeito inibitório que o crescimento de cada população tem sobre si mesma, enquanto os α medem o efeito inibitório que o crescimento de cada população tem sobre a outra. Então, quando $\sigma_1\sigma_2 > \alpha_1\alpha_2$, a interação (competição) é "fraca" e as espécies podem coexistir; quando $\sigma_1\sigma_2 < \alpha_1\alpha_2$, a interação é "forte" e as espécies não podem coexistir — uma tem que ser extinta.

Problemas

Cada um dos problemas de 1 a 6 pode ser interpretado como descrevendo a interação de duas espécies com populações x e y. Em cada um desses problemas, faça o seguinte:

(a) Desenhe um campo de direções e descreva como as soluções parecem se comportar.
(b) Encontre os pontos críticos.
(c) Para cada ponto crítico, encontre o sistema linear correspondente. Encontre os autovalores e autovetores do sistema linear; classifique cada ponto crítico em relação ao tipo e determine se é assintoticamente estável, estável ou instável.
(d) Esboce as trajetórias em uma vizinhança de cada ponto crítico.
(e) Calcule e faça o gráfico de um número suficiente de trajetórias do sistema dado de modo a mostrar, claramente, o comportamento das soluções.
(f) Determine o comportamento-limite de x e y quando $t \to \infty$ e interprete os resultados em termos das populações das duas espécies.

1. $dx/dt = x(1{,}5 - x - 0{,}5y)$
$dy/dt = y(2 - y - 0{,}75x)$
2. $dx/dt = x(1{,}5 - x - 0{,}5y)$
$dy/dt = y(2 - 0{,}5y - 1{,}5x)$
3. $dx/dt = x(1{,}5 - 0{,}5x - y)$
$dy/dt = y(2 - y - 1{,}125x)$
4. $dx/dt = x(1{,}5 - 0{,}5x - y)$
$dy/dt = y(0{,}75 - y - 0{,}125x)$
5. $dx/dt = x(1 - x - y)$
$dy/dt = y(1{,}5 - y - x)$
6. $dx/dt = x(1 - x + 0{,}5y)$
$dy/dt = y(2{,}5 - 1{,}5y + 0{,}25x)$
7. Mostre que

$$(\sigma_1 X + \sigma_2 Y)^2 - 4(\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2)XY = (\sigma_1 X - \sigma_2 Y)^2 + 4\alpha_1\alpha_2 XY.$$

Portanto, conclua que os autovalores dados pela Eq. (39) nunca podem ser complexos.

8. Duas espécies de peixe que competem por comida, mas um não é presa do outro, são *lepomis macrochirus*, um peixe de água fresca e cor azulada que habita as águas norte-americanas, e *lepomis microlofus*, um peixe do sudeste e centro dos Estados Unidos com guelra vermelha brilhante. Suponha que um lago está cheio desses dois tipos de peixes e denote por x e y, respectivamente, as populações de *lepomis macrochirus* e *lepomis microlofus* no instante t. Suponha, ainda, que a competição é modelada pelas equações

$$dx/dt = x(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y),$$
$$dy/dt = y(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x).$$

(a) Se $\epsilon_2/\alpha_2 > \epsilon_1/\sigma_1$ e $\epsilon_2/\sigma_2 > \epsilon_1/\alpha_1$, mostre que as únicas populações de equilíbrio no lago são sem as duas espécies, sem o peixe azulado ou sem o de guelra vermelha. O que vai acontecer?
(b) Se $\epsilon_1/\sigma_1 > \epsilon_2/\alpha_2$ e $\epsilon_1/\alpha_1 > \epsilon_2/\sigma_2$, mostre que as únicas populações de equilíbrio no lago são sem as duas espécies, sem o peixe azulado ou sem o de guelra vermelha. O que vai acontecer?

9. Considere a competição entre *lepomis macrochirus* e *lepomis microlofus* mencionada no Problema 8. Suponha que $\epsilon_2/\alpha_2 > \epsilon_1/\sigma_1$ e $\epsilon_1/\alpha_1 > \epsilon_2/\sigma_2$, de modo que, como mostrado no texto, existe um ponto de equilíbrio estável no qual ambas as espécies podem coexistir. É conveniente reescrever as equações do Problema 8 em termos das capacidades de saturação do lago para *lepomis macrochirus* ($B = \epsilon_1/\sigma_1$) na ausência de *lepomis microlofus*, e para *lepomis microlofus* ($R = \epsilon_2/\sigma_2$) na ausência de *lepomis macrochirus*.
(a) Mostre que as equações do Problema 8 tomam a forma

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon_1 x\left(1 - \frac{1}{B}x - \frac{\gamma_1}{B}y\right), \quad \frac{dy}{dt} = \epsilon_2 y\left(1 - \frac{1}{R}y - \frac{\gamma_2}{R}x\right),$$

onde $\gamma_1 = \alpha_1/\sigma_1$ e $\gamma_2 = \alpha_2/\sigma_2$. Determine o ponto de equilíbrio de coexistência (X, Y) em função de B, R, γ_1 e γ_2.
(b) Suponha, agora, que um pescador só pesca *lepomis macrochirus*, o que reduz B. Qual o efeito disso nas populações de equilíbrio? É possível, pescando, reduzir a população de *lepomis macrochirus* a tal nível a ponto de serem extintos?

10. Considere o sistema (2) no texto e suponha que $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 = 0$.
(a) Encontre todos os pontos críticos do sistema. Observe que o resultado depende se $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1$ é nulo ou não.
(b) Se $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1 > 0$, classifique cada ponto crítico e determine se é assintoticamente estável, estável ou instável. Note que o Problema 5 é desse tipo. Depois, faça o mesmo se $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1 < 0$.
(c) Analise a natureza das trajetórias quando $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1 = 0$.

11. Considere o sistema (13) no Exemplo 1 do texto. Lembre-se de que esse sistema tem um ponto crítico assintoticamente estável em (0,5; 0,5), correspondente à coexistência estável das populações das duas espécies. Suponha, agora, que a imigração ou emigração ocorram com taxas constantes δa e δb para as espécies x e y, respectivamente. Nesse caso, as Eqs. (3) são substituídas por

$$dx/dt = x(1 - x - y) + \delta a,$$
$$dy/dt = y(0{,}75 - y - 0{,}5x) + \delta b. \qquad \text{(i)}$$

A pergunta é que efeito isso tem na localização do ponto de equilíbrio estável.
(a) Para encontrar o novo ponto crítico, precisamos resolver as equações

$$x(1 - x - y) + \delta a = 0,$$
$$y(0{,}75 - y - 0{,}5x) + \delta b = 0. \qquad \text{(ii)}$$

Um modo de fazer isso é supor que x e y são dados por séries de potências no parâmetro δ; então,

$$x = x_0 + x_1\delta + \cdots, \qquad y = y_0 + y_1\delta + \cdots. \qquad \text{(iii)}$$

Substitua as Eqs. (iii) nas Eqs. (ii) e junte os termos de acordo com as potências de δ.
(b) Dos termos constantes (os termos que não envolvem δ), mostre que $x_0 = 0{,}5$ e $y_0 = 0{,}5$, confirmando, assim, que, na falta de imigração ou emigração, o ponto crítico é (0,5; 0,5).
(c) Dos termos lineares em δ, mostre que

$$x_1 = 4a - 4b, \qquad y_1 = -2a + 4b. \qquad \text{(iv)}$$

(d) Suponha que $a > 0$ e $b > 0$, de modo que a imigração ocorra em ambas as espécies. Mostre que a solução de equilíbrio resultante pode representar um aumento em ambas as populações, ou um acréscimo em uma e um decréscimo em outra. Explique, intuitivamente, por que esse é um resultado razoável.

12. O sistema

$$x' = -y, \quad y' = -\gamma y - x(x - 0{,}15)(x - 2)$$

resulta de uma aproximação das equações de Hodgkin-Huxley,[3] que moderam a transmissão de impulsos neurais ao longo de um axônio.[4]
(a) Encontre os pontos críticos e classifique-os, investigando o sistema linear aproximado próximo a cada um.
(b) Desenhe os retratos de fase para $\gamma = 0{,}8$ e $\gamma = 1{,}5$.
(c) Considere a trajetória que deixa o ponto crítico (2, 0). Encontre o valor de γ para o qual essa trajetória se aproxima da origem quando $t \to \infty$. Desenhe um retrato de fase para esse valor de γ.

Pontos de Bifurcação. Considere o sistema

$$x' = F(x, y, \alpha), y' = G(x, y, \alpha), \qquad \text{(i)}$$

onde α é um parâmetro. As equações

$$F(x, y, \alpha) = 0, G(x, y, \alpha) = 0 \qquad \text{(ii)}$$

determinam as nuliclinais de x e y, respectivamente; qualquer ponto onde uma nuliclinal de x intersecta uma nuliclinal de y é um ponto crítico. Quando α varia e a configuração das nuliclinais muda, pode acontecer que, para um determinado valor de α, dois pontos críticos se unem, transformando-se em um e que, para outra variação de α, o ponto crítico desaparece totalmente. Ou o processo pode acontecer em ordem inversa: para um determinado valor de α, duas nuliclinais que não se intersectavam antes passam a se intersectar, criando um ponto crítico que, por sua vez, pode se dividir em dois após outras mudanças de α. Um valor de α no qual pontos críticos são perdidos ou obtidos é um ponto de bifurcação. Como um retrato de fase de um sistema depende muito da localização e da natureza dos pontos críticos, uma compreensão de bifurcações é essencial para entender o comportamento global das soluções do sistema. Os problemas de 13 a 17 ilustram algumas das possibilidades.

Em cada um dos problemas de 13 a 16:
(a) Esboce as nuliclinais e descreva como os pontos críticos se movem quando α aumenta.
(b) Encontre os pontos críticos.
(c) Seja $\alpha = 2$. Classifique cada ponto crítico investigando o sistema linear correspondente. Desenhe um retrato de fase em um retângulo contendo os pontos críticos.
(d) Encontre o ponto de bifurcação α_0 no qual os pontos críticos coincidem. Localize esse ponto crítico e encontre os autovalores do sistema linear correspondente. Desenhe um retrato de fase.
(e) Para $\alpha > \alpha_0$, não existem pontos críticos. Escolha um desses valores para α e desenhe um retrato de fase.

13. $x' = -4x + y + x^2, \qquad y' = \frac{3}{2}\alpha - y$
14. $x' = \frac{3}{2}\alpha - y, \qquad y' = -4x + y + x^2$
15. $x' = -4x + y + x^2, \qquad y' = -\alpha - x + y$
16. $x' = -\alpha - x + y, \qquad y' = -4x + y + x^2$

[3] Alan L. Hodgkin (1914-1998) e Andrew F. Huxley (1917-) ganharam o prêmio Nobel em fisiologia e medicina em 1963 por seu trabalho sobre a excitação e a transmissão de impulsos neurais, publicado pela primeira vez em 1952, quando estavam na Universidade de Cambridge.
[4] Prolongamento da célula nervosa; cilindro-eixo. (*N.T.*)

17. Suponha que um determinado par de espécies em competição é descrito pelo sistema

$$dx/dt = x(4 - x - y), \qquad dy/dt = y(2 + 2\alpha - y - \alpha x),$$

onde $\alpha > 0$ é um parâmetro.
(a) Encontre os pontos críticos. Note que (2, 2) é um ponto crítico para todos os valores de α.
(b) Determine a natureza do ponto crítico (2, 2) para $\alpha = 0{,}75$ e para $\alpha = 1{,}25$. Existe um valor de α entre 0,75 e 1,25 onde a natureza do ponto crítico muda abruptamente. Denote esse valor por α_0; ele é chamado, também, de ponto de bifurcação, embora nenhum ponto crítico tenha sido obtido ou perdido.
(c) Encontre o sistema linear que aproxima o sistema dado perto do ponto (2, 2) em função de α.
(d) Encontre os autovalores do sistema linear no item (c) como funções de α. Depois determine o ponto de bifurcação α_0.
(e) Desenhe retratos de fase perto de (2, 2) para $\alpha = \alpha_0$ e para valores de α ligeiramente menores e ligeiramente maiores do que α_0. Explique como ocorre a transição no retrato de fase quando α passa por α_0.

9.5 Equações Predador-Presa

Na seção anterior, discutimos um modelo de duas espécies que interagem competindo por um suprimento comum de comida ou outro recurso natural. Nesta seção, vamos investigar a situação em que uma das espécies (predador) se alimenta da outra (presa), enquanto a presa se alimenta de outro tipo de comida. Considere, por exemplo, raposas e coelhos em uma floresta fechada: as raposas caçam os coelhos, que vivem da vegetação na floresta. Outros exemplos são peixes que se alimentam dos peixes de guelra vermelha, que encontramos anteriormente, em um mesmo lago ou joaninha como predador e pulgão como presa. Enfatizamos, mais uma vez, que um modelo envolvendo apenas duas espécies não pode descrever completamente as relações complexas que ocorrem, de fato, na natureza. Apesar disso, o estudo de modelos simples é o primeiro passo para a compreensão de fenômenos mais complicados.

Vamos denotar por x e y as populações, respectivamente, da presa e do predador, em um instante t. Ao construir a interação de duas espécies, fazemos as seguintes hipóteses:

1. Na ausência do predador, a população de presas aumenta a uma taxa proporcional à população atual; assim, $dx/dt = ax$, $a > 0$, quando $y = 0$.
2. Na ausência da presa, o predador é extinto; assim, $dy/dt = -cy$, $c > 0$, quando $x = 0$.
3. O número de encontros entre predador e presa é proporcional ao produto das duas populações. Cada um desses encontros tende a promover o crescimento da população de predadores e a inibir o crescimento da população de presas. Assim, a taxa de crescimento da população de predadores é aumentada por um termo da forma γxy, enquanto a taxa de crescimento para a população de presas é diminuída por um termo da forma $-\alpha xy$, onde γ e α são constantes positivas.

Em conseqüência dessas hipóteses, somos levados às equações

$$\begin{aligned} dx/dt &= ax - \alpha xy = x(a - \alpha y), \\ dy/dt &= -cy + \gamma xy = y(-c + \gamma x). \end{aligned} \tag{1}$$

As constantes a, c, α e γ são todas positivas; a e c são as taxas de crescimento da população de presas e a taxa de morte da população de predadores, respectivamente, e α e γ são medidas do efeito da interação entre as duas espécies. As Eqs. (1) são chamadas de equações de Lotka-Volterra. Foram desenvolvidas em artigos escritos por Lotka[5] em 1925 e por Volterra[6] em 1926. Embora essas equações sejam bem simples, elas caracterizam uma grande classe de problemas. Ao final desta seção e nos problemas, discutimos maneiras de torná-las mais realistas. Nosso objetivo aqui é determinar o comportamento qualitativo das soluções (trajetórias) do sistema (1) para valores iniciais positivos arbitrários de x e de y. Vamos fazer isso primeiro para um exemplo específico e voltaremos, depois, no final desta seção, às equações gerais (1).

Exemplo 1

Discuta as soluções do sistema

$$\begin{aligned} dx/dt &= x(1 - 0{,}5y) = x - 0{,}5xy, \\ dy/dt &= y(-0{,}75 + 0{,}25x) = -0{,}75y + 0{,}25xy \end{aligned} \tag{2}$$

para x e y positivos.

Os pontos críticos desse sistema são as soluções das equações algébricas

$$x(1 - 0{,}5y) = 0, \quad y(-0{,}75 + 0{,}25x) = 0, \tag{3}$$

a saber, os pontos (0, 0) e (3, 2). A Fig. 9.5.1 mostra os pontos críticos e um campo de direções para o sistema (2). Dessa figura podemos concluir que as trajetórias no primeiro quadrante podem ser curvas fechadas em torno do ponto crítico (3, 2).

Vamos examinar, a seguir, o comportamento local das soluções próximas a cada ponto crítico. Perto da origem, podemos desprezar os termos não-lineares nas Eqs. (2) para obter o sistema linear correspondente

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0{,}75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{4}$$

[5]Alfred J. Lotka (1880-1949), um biofísico americano, nasceu onde é hoje a Ucrânia e foi educado, principalmente, na Europa. É lembrado, em geral, por sua formulação das equações de Lotka-Volterra. Foi, também, o autor, em 1924, do primeiro livro sobre biologia matemática, disponível, atualmente, com o título de *Elements of Mathematical Biology* (Nova York: Dover, 1956).

[6]Vito Volterra (1860-1940), um matemático italiano importante, foi catedrático em Pisa, Turim e Roma. É famoso, principalmente, por seu trabalho em equações integrais e análise funcional. De fato, uma das maiores classes de equações integrais leva seu nome; veja o Problema 21 da Seção 6.6. Sua teoria de espécies interagindo foi motivada por dados obtidos por um amigo, D'Ancona, relativos à pesca no Mar Adriático. Uma tradução (para o inglês) de seu artigo de 1926 pode ser encontrada em um apêndice do livro de R. N. Chapman, *Animal Ecology with Special Reference to Insects* (Nova York: McGraw-Hill, 1931).

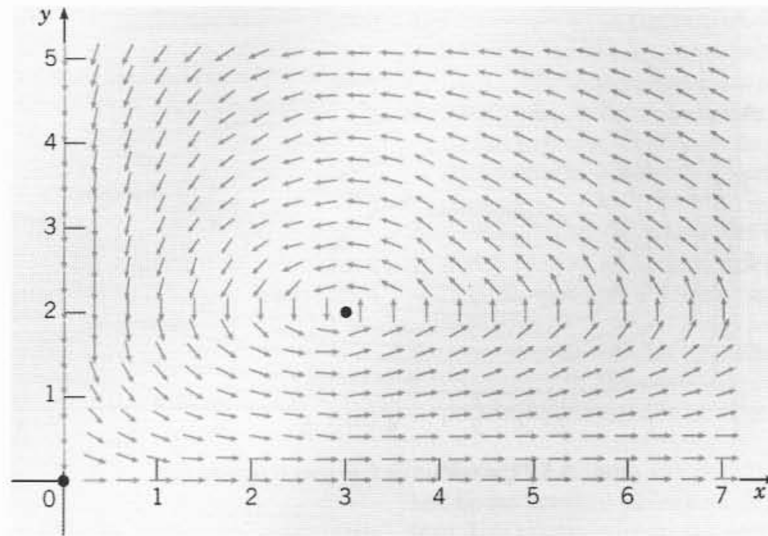


FIG. 9.5.1 Pontos críticos e campo de direções para o sistema predador-presa (2).

Os autovalores e autovetores da Eq. (4) são

$$r_1 = 1, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad\qquad r_2 = -0{,}75, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

de modo que a solução geral é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0{,}75t}. \tag{6}$$

Assim, a origem é um ponto de sela para ambos os sistemas, o linear (4) e o não-linear (2), e, portanto, instável. Um par de trajetórias entra na origem ao longo do eixo dos y; todas as outras trajetórias se afastam de uma vizinhança da origem.

Para examinar o ponto crítico (3, 2), podemos fazer a substituição

$$x = 3 + u, \qquad y = 2 + v \tag{7}$$

nas Eqs. (2) e depois desprezar os termos não-lineares em u e v, ou, então, nos referir à Eq. (13) da Seção 9.3. Em qualquer dos casos, obtemos o sistema linear

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1{,}5 \\ 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Os autovalores e autovetores desse sistema são

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}\,i}{2}, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i/\sqrt{3} \end{pmatrix}; \qquad\qquad r_2 = -\frac{\sqrt{3}\,i}{2}, \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i/\sqrt{3} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Como os autovalores são imaginários, o ponto crítico (3, 2) é um centro do sistema linear (8) e, portanto, é um ponto crítico estável para esse sistema. Lembre-se, da Seção 9.3, que esse é um dos casos em que o comportamento do sistema linear pode ser o mesmo, ou não, do sistema não-linear, de modo que a natureza do ponto (3, 2) para o sistema não-linear (2) não pode ser determinada por essa informação. A maneira mais simples de encontrar as trajetórias do sistema linear (8) é dividir a segunda das Eqs. (8) pela primeira, de modo a obter a equação diferencial

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv/dt}{du/dt} = \frac{0{,}5u}{-1{,}5v} = -\frac{u}{3v},$$

ou

$$u\,du + 3v\,dv = 0. \tag{10}$$

Em conseqüência,

$$u^2 + 3v^2 = k, \tag{11}$$

onde k é uma constante arbitrária, não-negativa, de integração. Logo, as trajetórias do sistema linear (8) são elipses centradas no ponto crítico e um tanto alongadas na direção horizontal.

Vamos voltar para o sistema não-linear (2). Dividindo a segunda das Eqs. (2) pela primeira, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-0{,}75 + 0{,}25x)}{x(1 - 0{,}5y)}. \tag{12}$$

A Eq. (12) é uma equação separável e pode ser colocada na forma

$$\frac{1 - 0{,}5y}{y}\,dy = \frac{-0{,}75 + 0{,}25x}{x}\,dx,$$

donde segue que

$$0{,}75 \ln x + \ln y - 0{,}5y - 0{,}25x = c, \tag{13}$$

onde c é uma constante de integração. Embora não possamos resolver a Eq. (13), explicitamente, usando apenas funções elementares, para qualquer uma das variáveis em função da outra, é possível mostrar que o gráfico da equação para um valor fixo de c é uma curva fechada em torno do ponto (3, 2). Logo, o ponto crítico também é um centro para o sistema não-linear (2), e as populações de predadores e presas exibem uma variação cíclica.

A Fig. 9.5.2 mostra um retrato de fase para o sistema (2). Para algumas condições iniciais, a trajetória representa pequenas variações em x e y em torno do ponto crítico e tem uma forma quase elíptica, como sugere o sistema linear. Para ou-

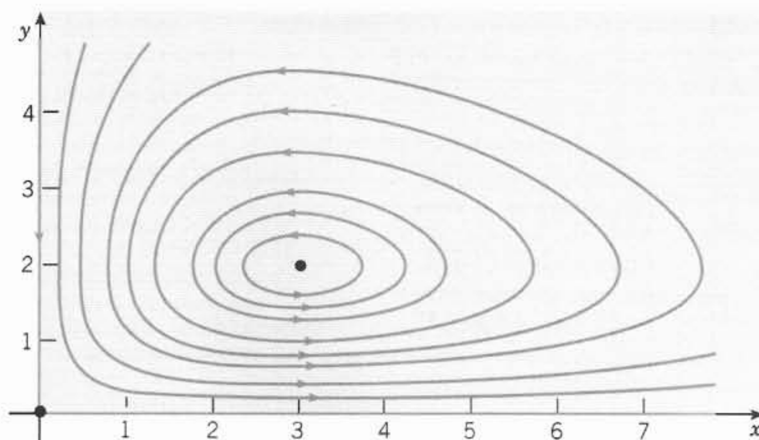


FIG. 9.5.2 Um retrato de fase para o sistema (2).

tras condições iniciais, as variações em x e y são mais pronunciadas e a forma da trajetória é ligeiramente diferente de uma elipse. Observe que as trajetórias são percorridas no sentido trigonométrico. A Fig. 9.5.3 mostra a dependência de x e y em t para um conjunto típico de condições iniciais. Note que x e y são funções periódicas de t, como têm que ser, já que as trajetórias são curvas fechadas. Além disso, a oscilação da população predadora vem depois da oscilação de presas. Começando em um estado no qual ambas as populações, de predadores e de presas, são relativamente pequenas, há primeiro um aumento no número de presas, já que há poucos predadores. Então a população de predadores, com comida abundante, também cresce. Isso aumenta a caça e a população de presas tende a diminuir. Finalmente, com uma disponibilidade menor de comida, a população de predadores também diminui, e o sistema volta ao seu estado original.

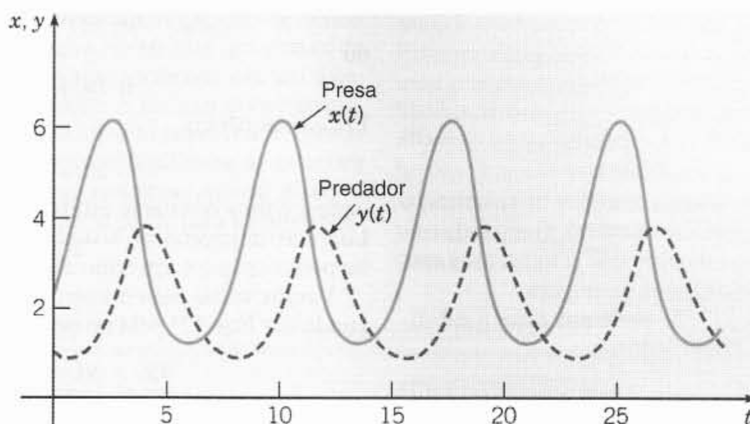


FIG. 9.5.3 Variações nas populações de presas e de predadores em relação ao tempo para o sistema (2).

O sistema geral (1) pode ser analisado exatamente do mesmo modo que no exemplo. Os pontos críticos do sistema (1) são as soluções de

$$x(a - \alpha y) = 0, \qquad y(-c + \gamma x) = 0,$$

isto é, os pontos (0, 0) e $(c/\gamma, a/\alpha)$. Vamos examinar, primeiro, as soluções do sistema linear correspondente perto de cada ponto crítico.

Em uma vizinhança da origem, o sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Os autovalores e autovetores são

$$r_1 = a, \quad \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad r_2 = -c, \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

de modo que a solução geral é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{at} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ct}. \tag{16}$$

Logo, a origem é um ponto de sela e, portanto, instável. A entrada no ponto de sela é através do eixo dos y; todas as

outras trajetórias se afastam de uma vizinhança do ponto crítico.

Vamos considerar, agora, o ponto crítico $(c/\gamma, a/\alpha)$. Se $x = (c/\gamma) + u$ e $y = (a/\alpha) + v$, então o sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha c/\gamma \\ \gamma a/\alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Os autovalores do sistema (17) são $r = \pm i\sqrt{ac}$, de modo que o ponto crítico é um centro (estável) para o sistema linear. Para encontrar as trajetórias do sistema (17), podemos dividir a segunda equação pela primeira para obter

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv/dt}{du/dt} = -\frac{(\gamma a/\alpha)u}{(\alpha c/\gamma)v}, \quad (18)$$

ou

$$\gamma^2 au\,du + \alpha^2 cv\,dv = 0. \quad (19)$$

Em conseqüência,

$$\gamma^2 au^2 + \alpha^2 cv^2 = k, \quad (20)$$

onde k é uma constante de integração não-negativa. Logo, as trajetórias do sistema linear são elipses, como no exemplo.

Voltando, rapidamente, ao sistema (1), note que ele pode ser reduzido a uma única equação,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y(-c+\gamma x)}{x(a-\alpha y)}. \quad (21)$$

A Eq. (21) é separável e tem solução

$$a \ln y - \alpha y + c \ln x - \gamma x = C, \quad (22)$$

onde C é uma constante de integração. Mais uma vez, é possível mostrar que o gráfico da Eq. (22) é uma curva fechada, para C fixo, em torno do ponto crítico $(c/\gamma, a/\alpha)$. Logo, o ponto crítico também é um centro para o sistema geral não-linear (1).

A variação cíclica das populações de predadores e de presas pode ser analisada em mais detalhe quando os desvios em relação ao ponto $(c/\gamma, a/\alpha)$ são pequenos e pode-se usar o sistema linear (17). A solução do sistema (17) pode ser escrita na forma

$$u = \frac{c}{\gamma}K\cos(\sqrt{ac}\,t + \phi),$$
$$v = \frac{a}{\alpha}\sqrt{\frac{c}{a}}K\,\mathrm{sen}(\sqrt{ac}\,t + \phi), \quad (23)$$

onde as constantes K e ϕ são determinadas pelas condições iniciais. Assim,

$$x = \frac{c}{\gamma} + \frac{c}{\gamma}K\cos(\sqrt{ac}\,t + \phi),$$
$$y = \frac{a}{\alpha} + \frac{a}{\alpha}\sqrt{\frac{c}{a}}K\,\mathrm{sen}(\sqrt{ac}\,t + \phi). \quad (24)$$

Essas equações são boas aproximações para as trajetórias quase elípticas perto do ponto crítico $(c/\gamma, a/\alpha)$. Podemos usá-las para tirar diversas conclusões sobre a variação cíclica das populações de predadores e de presas em tais trajetórias.

1. Os tamanhos das populações de predadores e de presas variam de forma senoidal com período $2\pi/\sqrt{ac}$. Esse período de oscilação é independente das condições iniciais.
2. As populações de predadores e presas estão defasadas por um quarto de ciclo. O número de presas aumenta primeiro, depois aumenta o número de predadores, como explicado no exemplo.
3. As amplitudes das oscilações são Kc/γ para a população de presas e $a\sqrt{c}K/\alpha\sqrt{a}$ para a de predadores e, portanto, dependem das condições iniciais, assim como dos parâmetros do problema.
4. As populações médias de predadores e de presas em um ciclo completo são c/γ e a/α, respectivamente. Elas são iguais a populações de equilíbrio; veja o Problema 10.

Variações cíclicas nas populações de predadores e de presas, como previsto pelas Eqs. (1), foram observadas na natureza. Um exemplo impressionante foi descrito por Odum (pp. 191-192); baseado nos registros da Companhia Hudson Bay do Canadá, a abundância de linces e de lebres, como indicado pelo número de peles compradas no período 1845-1935, mostra uma clara variação periódica com período de 9 a 10 anos. Os picos de abundância são seguidos por declínios rápidos, e os picos das populações de lince e de lebre estão defasados, com os das lebres antecedendo os dos linces por um ano ou mais.

O modelo de Lotka-Volterra revelou uma variação cíclica que talvez pudesse ter sido antecipada. Por outro lado, a aplicação do modelo de Lotka-Volterra em outras situações pode levar a conclusões que não são intuitivamente óbvias. Um exemplo que sugere uma possibilidade de perigo ao se usar inseticidas é dado no Problema 12.

Uma crítica das equações de Lotka-Volterra é que, na ausência de predadores, a população de presas aumenta sem limites. Isso pode ser corrigido permitindo-se o efeito natural inibidor que uma população crescente tem sobre a taxa de crescimento populacional; por exemplo, a primeira das Eqs. (1) pode ser modificada de modo que, quando $y = 0$, ela se reduza a uma equação logística para x (veja o Problema 13). A conseqüência mais importante dessa modificação é que o ponto crítico em $(c/\gamma, a/\alpha)$ se move para $(c/\gamma, a/\alpha - \sigma c/\alpha\gamma)$ e torna-se um ponto assintoticamente estável. Ele é um nó ou um ponto espiral, dependendo dos valores dos parâmetros nas equações diferenciais. Em qualquer dos casos, outras trajetórias não são mais curvas fechadas, mas se aproximam do ponto crítico quando $t \to \infty$.

Problemas

Cada um dos problemas de 1 a 5 pode ser interpretado como descrevendo a interação entre duas espécies com densidades populacionais x e y. Para cada um desses problemas, faça o seguinte:

(a) Desenhe um campo de direções e descreva como as soluções parecem se comportar.
(b) Encontre os pontos críticos.
(c) Para cada ponto crítico, ache o sistema linear correspondente. Encontre os autovalores e autovetores do sistema linear; classifique cada ponto crítico em relação a tipo e determine se é assintoticamente estável, estável ou instável.
(d) Esboce as trajetórias em uma vizinhança de cada ponto crítico.
(e) Desenhe um retrato de fase para o sistema.

(f) Determine o comportamento-limite de x e y quando $t \to \infty$ e interprete os resultados em termos das populações das duas espécies.

1. $dx/dt = x(1{,}5 - 0{,}5y)$
   $dy/dt = y(-0{,}5 + x)$
2. $dx/dt = x(1 - 0{,}5y)$
   $dy/dt = y(-0{,}25 + 0{,}5x)$
3. $dx/dt = x(1 - 0{,}5x - 0{,}5y)$
   $dy/dt = y(-0{,}25 + 0{,}5x)$
4. $dx/dt = x(1{,}125 - x - 0{,}5y)$
   $dy/dt = y(-1 + x)$
5. $dx/dt = x(-1 + 2{,}5x - 0{,}3y - x^2)$
   $dy/dt = y(-1{,}5 + x)$
6. Neste problema, vamos examinar a diferença de fase entre as variações cíclicas das populações de predadores e presas dadas pelas Eqs. (24) desta seção. Vamos supor que $K > 0$ e que o tempo t é medido a partir de um instante onde a população de presas (x) é máxima; então $\phi = 0$. Mostre que a população (y) de predadores tem um máximo em $t = \pi/2\sqrt{ac} = T/4$, onde T é o período da oscilação. Quando a população de presas está crescendo o mais rapidamente possível? Quando está diminuindo o mais rapidamente possível? Quando atinge um mínimo? Responda às mesmas perguntas para a população de predadores. Desenhe uma trajetória elíptica típica em torno do ponto $(c/\gamma, a/\alpha)$ e marque esses pontos nela.
7. (a) Encontre a razão entre as amplitudes das oscilações das populações de presas e de predadores em torno do ponto crítico $(c/\gamma, a/\alpha)$ usando a aproximação (24), válida para oscilações pequenas. Observe que a razão é independente das condições iniciais.
   (b) Calcule a razão encontrada no item (a) para o sistema (2).
   (c) Estime a razão entre as amplitudes para a solução do sistema não-linear (2) ilustrada na Fig. 9.5.3. Esse resultado está de acordo com o obtido da aproximação linear?
   (d) Determine a razão entre as amplitudes presa-predador para outras soluções do sistema (2), isto é, para soluções satisfazendo outras condições iniciais. A razão é independente das condições iniciais?
8. (a) Encontre o período de oscilação das populações de presas e de predadores, usando a aproximação (24), válida para pequenas oscilações. Note que o período independe da amplitude das oscilações.
   (b) Para a solução do sistema (2) ilustrada na Fig. 9.5.3, estime o período o melhor possível. O resultado é o mesmo que para a aproximação linear?
   (c) Calcule outras soluções do sistema (2), isto é, soluções satisfazendo outras condições iniciais, e determine seus períodos. O período é o mesmo para todas as condições iniciais?
9. Considere o sistema
   $$dx/dt = ax[1 - (y/2)], \qquad dy/dt = by[-1 + (x/3)],$$
   onde a e b são constantes positivas. Observe que esse sistema é o mesmo que o do exemplo no texto se $a = 1$ e $b = 0{,}75$. Suponha que as condições iniciais são $x(0) = 5$ e $y(0) = 2$.
   (a) Sejam $a = 1$ e $b = 1$. Desenhe a trajetória no plano de fase e determine (ou estime) o período da oscilação.
   (b) Repita o item (a) para $a = 3$ e $a = 1/3$, com $b = 1$.
   (c) Repita o item (a) para $b = 3$ e $b = 1/3$, com $a = 1$.
   (d) Descreva a dependência do período e da forma da trajetória em a e b.
10. As populações médias de presas e predadores são dadas por
   $$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_A^{A+T} x(t)\,dt, \qquad \bar{y} = \frac{1}{T}\int_A^{A+T} y(t)\,dt,$$
   respectivamente, onde T é o período de um ciclo completo e A é uma constante não-negativa arbitrária.
   (a) Usando a aproximação (24), que é válida perto do ponto crítico, mostre que $\bar{x} = c/\gamma$ e $\bar{y} = a/\alpha$.
   (b) Para a solução do sistema não-linear (2) ilustrada na Fig. 9.5.3, estime $\bar{x}$ e $\bar{y}$ o melhor que puder. Tente determinar se $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são dados por c/γ e a/α, respectivamente, nesse caso.
   Sugestão: Considere como você pode estimar o valor de uma integral mesmo sem ter uma fórmula para o integrando.
   (c) Calcule outras soluções do sistema (2), isto é, soluções satisfazendo outras condições iniciais e determine $\bar{x}$ e $\bar{y}$ para essas soluções. Os valores de $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são os mesmos para todas as soluções?
11. Suponha que as equações predador-presa (1) do texto descrevam raposas (y) e coelhos (x) em uma floresta. Uma companhia está preparando armadilhas para pegar raposas e coelhos, e vender as peles. Explique por que é razoável para a companhia conduzir suas operações de modo a tornar a população de cada espécie próxima do centro $(c/\gamma, a/\alpha)$. Quando é melhor pegar raposas? Coelhos? Raposas e coelhos? Nenhum dos dois?
   Sugestão: Veja o Problema 6. Basta um argumento intuitivo.
12. Suponha que uma população de insetos x seja controlada por uma população de predadores naturais y de acordo com o modelo (1), de modo que existem pequenas variações cíclicas das populações em torno do ponto crítico $(c/\gamma, a/\alpha)$. Suponha que se use um inseticida com o objetivo de reduzir a população de insetos e suponha que esse inseticida também é tóxico para os predadores; de fato, suponha que o inseticida mate tanto a presa quanto o predador a taxas proporcionais às suas respectivas populações. Escreva as equações diferenciais modificadas, determine os novos pontos de equilíbrio e compare com os pontos de equilíbrio originais.
   Certamente não seria prudente banir inseticidas baseado nesse modelo simples com resultados contra a intuição. Por outro lado, também não é prudente ignorar a possibilidade genuína de existência de um fenômeno sugerido por um tal modelo.
13. Como mencionado no texto, uma melhoria do modelo predador-presa é modificar a equação para a presa de modo que tenha a forma de uma equação logística na ausência do predador. Então, no lugar das Eqs. (1), vamos considerar o sistema
   $$dx/dt = x(a - \sigma x - \alpha y), \qquad dy/dt = y(-c + \gamma x),$$
   onde a, σ, α, c e γ são constantes positivas. Note que os Problemas 3 e 4 são dessa forma. Determine todos os pontos críticos e discuta sua natureza e características de estabilidade. Suponha que $a/\sigma \gg c/\gamma$. O que acontece para dados iniciais $x \neq 0$ e $y \neq 0$?

9.6 O Segundo Método de Liapunov

Mostramos, na Seção 9.3, como a estabilidade de um ponto crítico de um sistema quase linear pode ser estabelecida, em geral, através de um estudo do sistema linear correspondente. No entanto, nada se pode concluir quando o ponto crítico é um centro do sistema linear correspondente. Exemplos dessa situação são o pêndulo não-amortecido, as Eqs. (1) e (2) abaixo e o problema predador-presa discutido na Seção 9.5. Para um ponto crítico assintoticamente estável, pode ser importante, também, investigar a bacia de atração, isto é, o domínio no qual todas as soluções que começam nesse domínio tendem ao ponto crítico. Como a teoria de sistemas quase lineares é uma teoria local, ela não fornece informações sobre esse problema.

Nesta seção vamos discutir uma outra abordagem, conhecida como o **segundo método de Liapunov**[7] ou **método direto**. O

[7]Alexandr M. Liapunov (1857-1918), um aluno de Chebyshev em São Petersburgo, ensinou na Universidade de Kharkov de 1885 a 1901, quando se tornou acadêmico em matemática aplicada na Academia de Ciências de São Petersburgo. Em 1917 se mudou para Odessa, devido à saúde frágil de sua esposa. Sua pesquisa em estabilidade incluiu tanto a análise teórica quanto aplicações a diversos problemas físicos. Seu segundo método está em seu trabalho mais influente, *General Problem of Stability of Motion* (Problema Geral de Estabilidade do Movimento), publicado em 1892.

método também é conhecido como método direto porque não há necessidade de se conhecer algo sobre a solução do sistema de equações diferenciais. Em vez disso, chega-se a conclusões sobre a estabilidade ou instabilidade de um ponto crítico através de uma função auxiliar apropriada. Essa é uma técnica muito poderosa que fornece um tipo de informação mais global, por exemplo, uma estimativa da extensão da bacia de atração de um ponto crítico. O segundo método de Liapunov também pode ser usado para estudar sistemas de equações que não são quase lineares; no entanto, não discutiremos tais problemas.

Basicamente, o segundo método de Liapunov é uma generalização de dois princípios físicos para sistemas conservativos, a saber, (i) uma posição de repouso é estável se a energia potencial é um mínimo local, caso contrário é instável, e (ii) a energia total é constante durante todo o movimento. Para ilustrar esses conceitos, considere, novamente, o pêndulo não-amortecido (um sistema mecânico conservativo), que é governado pela equação

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0. \tag{1}$$

O sistema de primeira ordem correspondente é

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,x, \tag{2}$$

onde $x = \theta$ e $y = d\theta/dt$. Se omitirmos uma constante arbitrária, a energia potencial U é o trabalho feito ao se levantar o pêndulo para uma posição acima da sua posição mais baixa, a saber,

$$U(x, y) = mgL(1 - \cos x); \tag{3}$$

veja a Fig. 9.2.2. Os pontos críticos do sistema (2) são $x = \pm n\pi$, $y = 0$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, correspondendo a $\theta = \pm n\pi$, $d\theta/dt = 0$. Fisicamente, esperamos que os pontos $x = 0$, $y = 0$; $x = \pm 2\pi$, $y = 0$; ..., correspondendo a $\theta = 0, \pm 2\pi, \ldots$, sejam estáveis, já que, para eles, o eixo do pêndulo está na posição vertical com o peso para baixo; além disso, esperamos que os pontos $x = \pm\pi$, $y = 0$; $x = \pm 3\pi$, $y = 0$; ..., correspondendo a $\theta = \pm\pi, \pm 3\pi$, ..., sejam instáveis, já que, para eles, o eixo do pêndulo está na posição vertical com o peso para cima. Isso está de acordo com (i), já que nos pontos anteriores U é um mínimo igual a zero e nos pontos posteriores é um máximo igual a $2mgL$.

Considere, agora, a energia total V, que é a soma da energia potencial U com a energia cinética $\frac{1}{2}mL^2(d\theta/dt)^2$. Em termos de x e y,

$$V(x, y) = mgL(1 - \cos x) + \tfrac{1}{2}mL^2y^2. \tag{4}$$

Em uma trajetória correspondente à solução $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ das Eqs. (2), V pode ser considerada uma função de t. A derivada de $V[\phi(t), \psi(t)]$ em relação a t é chamada de taxa de variação de V ao longo da trajetória. Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned}\frac{dV[\phi(t), \psi(t)]}{dt} &= V_x[\phi(t), \psi(t)]\,\frac{d\phi(t)}{dt} + V_y[\phi(t), \psi(t)]\,\frac{d\psi(t)}{dt}\\ &= (mgL\,\mathrm{sen}\,x)\,\frac{dx}{dt} + mL^2y\,\frac{dy}{dt},\end{aligned} \tag{5}$$

onde está subentendido que $x = \phi(t)$ e $y = \psi(t)$. Finalmente, substituindo dx/dt e dy/dt na Eq. (5) pelas Eqs. (2), vemos que $dV/dt = 0$. Logo, V é constante ao longo de qualquer trajetória do sistema (2), o que é a afirmação (ii).

É importante observar que, em qualquer ponto (x, y), a taxa de variação de V ao longo da trajetória que passa por aquele ponto foi calculada *sem se resolver* o sistema (2). É precisamente esse fato que nos permite usar o segundo método de Liapunov para sistemas cujas soluções não conhecemos e essa é a principal razão de sua importância.

Nos pontos críticos estáveis, $x = \pm 2n\pi$, $y = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, a energia V é nula. Se o estado inicial, digamos (x_1, y_1), do pêndulo está suficientemente próximo de um ponto crítico, então a energia $V(x_1, y_1)$ é pequena e o movimento (trajetória) associado a essa energia permanece próximo do ponto crítico. Por exemplo, suponha que (x_1, y_1) está perto de $(0, 0)$ e que $V(x_1, y_1)$ é muito pequena. A equação da trajetória com energia $V(x_1, y_1)$ é

$$V(x, y) = mgL(1 - \cos x) + \tfrac{1}{2}mL^2y^2 = V(x_1, y_1).$$

Para x pequeno, temos $1 - \cos x = 1 - (1 - x^2/2! + \ldots) \approx x^2/2$. Logo, a equação da trajetória é, aproximadamente,

$$\tfrac{1}{2}mgLx^2 + \tfrac{1}{2}mL^2y^2 = V(x_1, y_1),$$

ou

$$\frac{x^2}{2V(x_1, y_1)/mgL} + \frac{y^2}{2V(x_1, y_1)/mL^2} = 1.$$

Isso é uma elipse em torno do ponto crítico $(0, 0)$; quanto menor $V(x_1, y_1)$, menores são os eixos da elipse. Fisicamente, a trajetória fechada corresponde a uma solução periódica no tempo — o movimento é uma pequena oscilação em torno do ponto de equilíbrio.

Se existe amortecimento, no entanto, é natural esperar que a amplitude do movimento diminua com o tempo e que o ponto crítico estável (centro) se torne um ponto crítico assintoticamente estável (ponto espiral). Veja o retrato de fase do pêndulo amortecido na Fig. 9.3.5. Isso quase que pode ser argumentado a partir de dV/dt. Para o pêndulo amortecido, a energia total ainda é dada pela Eq. (4), mas agora, pelas Eqs. (8) da Seção 9.3, $dx/dt = y$ e $dy/dt = -(g/L)\mathrm{sen}\,x - (c/Lm)y$. Substituindo dx/dt e dy/dt na Eq. (5), obtemos $dV/dt = -cLy^2 \leq 0$. Portanto, a energia é não-decrescente em qualquer trajetória e, exceto pela reta $y = 0$, o movimento é tal que a energia diminui. Logo, cada trajetória tem que se aproximar de um ponto de energia mínima — um ponto de equilíbrio estável. Se $dV/dt < 0$, em vez de $dV/dt \leq 0$, é razoável esperar que isso continue válido para todas as trajetórias que começam suficientemente próximas da origem.

Para continuar aprofundando essas idéias, considere o sistema autônomo

$$dx/dt = F(x, y), \qquad dy/dt = G(x, y), \tag{6}$$

e suponha que o ponto $x = 0$, $y = 0$ é um ponto crítico assintoticamente estável. Então existe algum domínio D contendo $(0, 0)$ tal que toda trajetória que começa em D tende à origem quando $t \to \infty$. Suponha que existe uma função "energia" V tal que $V \geq 0$ para (x, y) em D, com $V = 0$ apenas na origem. Como cada trajetória em D tende à origem quando $t \to \infty$, então, seguindo qualquer trajetória particular, V tende a zero quando t tende a infinito. O tipo de resultado que queremos provar é, essencialmente, a recíproca: se, em todas as trajetórias, V tende a zero quando t tende a infinito, então as trajetórias têm que se aproximar da origem quando $t \to \infty$ e, portanto, a origem é assintoticamente estável. Primeiro, no entanto, precisamos de várias definições.

Suponha que V está definida em um domínio D contendo a origem. A função V é dita **positiva definida** em D se $V(0, 0) = 0$ e $V(x, y) > 0$ em todos os outros pontos de D. Analogamente, V é **negativa definida** em D se $V(0, 0) = 0$ e $V(x, y) < 0$ para todos os outros pontos de D. Se as desigualdades $>$ e $<$ são substituídas por $\geq$ e $\leq$, então V é dita **positiva semidefinida** e **negativa semidefinida**, respectivamente. Enfatizamos que, ao se falar de uma função positiva definida (negativa definida, ...) em um domínio D contendo a origem, a função tem que se anular na origem, além de satisfazer a desigualdade apropriada em todos os outros pontos de D.

Exemplo 1

A função

$$V(x, y) = \text{sen}(x^2 + y^2)$$

é positiva definida em $x^2 + y^2 < \pi/2$, já que $V(0, 0) = 0$ e $V(x, y) > 0$ para $0 < x^2 + y^2 < \pi/2$. No entanto, a função

$$V(x, y) = (x + y)^2$$

só é positiva semidefinida, já que $V(x, y) = 0$ na reta $y = -x$.

Queremos considerar, também, a função

$$\dot{V}(x, y) = V_x(x, y)F(x, y) + V_y(x, y)G(x, y), \quad (7)$$

onde F e G são as funções das Eqs. (6). Vamos escolher essa notação porque $\dot{V}(x, y)$ pode ser identificada com a taxa de variação de V ao longo da trajetória do sistema (6) que passa pelo ponto (x, y). Em outras palavras, se $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ é uma solução do sistema (6), então

$$\begin{aligned}
&\frac{dV[\phi(t), \psi(t)]}{dt} \\
&= V_x[\phi(t), \psi(t)]\frac{d\phi(t)}{dt} + V_y[\phi(t), \psi(t)]\frac{d\psi(t)}{dt} \\
&= V_x(x, y)F(x, y) + V_y(x, y)G(x, y) \\
&= \dot{V}(x, y). \qquad (8)
\end{aligned}$$

Vamos nos referir à função $\dot{V}$, muitas vezes, como a derivada de V em relação ao sistema (6).

Vamos enunciar dois teoremas de Liapunov, o primeiro sobre estabilidade e o segundo sobre instabilidade.

Teorema 9.6.1

Suponha que o sistema autônomo (6) tenha um ponto crítico isolado na origem. Se existir uma função V, contínua com derivadas parciais contínuas, que seja positiva definida e para a qual a função $\dot{V}$, dada pela Eq. (7), seja negativa definida em algum domínio D no plano xy contendo a origem, então a origem é um ponto crítico assintoticamente estável. Se $\dot{V}$ for negativa semidefinida, então a origem é um ponto crítico estável.

Teorema 9.6.2

Suponha que a origem seja um ponto crítico isolado do sistema autônomo (6). Seja V uma função contínua com derivadas parciais contínuas. Suponha que $V(0, 0) = 0$ e que, em toda vizinhança da origem, existe pelo menos um ponto onde V é positiva (negativa). Se existir um domínio D contendo a origem tal que a função $\dot{V}$, dada pela Eq. (7), seja positiva definida (negativa definida) em D, então a origem é um ponto crítico instável.

A função V é chamada de uma **função de Liapunov**. Antes de esboçarmos argumentos geométricos para os Teoremas 9.6.1 e 9.6.2, observamos que a dificuldade na utilização desses teoremas é que eles não nos dizem como construir uma função de Liapunov, supondo que exista uma. Nos casos em que o sistema autônomo (6) representa um problema físico, é natural considerar, primeiro, a energia total do sistema como uma função de Liapunov possível. Entretanto, os Teoremas 9.6.1 e 9.6.2 podem ser aplicados em casos onde o conceito de energia física não é pertinente. Em tais casos, pode ser necessária uma abordagem envolvendo tentativa e erro.

Vamos considerar a segunda parte do Teorema 9.6.1, isto é, o caso em que $\dot{V} \leq 0$. Seja $c \geq 0$ uma constante e considere a curva no plano xy dada por $V(x, y) = c$. Para $c = 0$, a curva se reduz a um único ponto $x = 0$, $y = 0$. Vamos supor que, se $0 < c_1 < c_2$, então a curva $V(x, y) = c_1$ contém a origem e está contida no interior da curva $V(x, y) = c_2$, como ilustrado na Fig. 9.6.1a. Vamos mostrar que uma trajetória começando no interior de uma curva fechada $V(x, y) = c$ não pode cruzar a curva para sair. Logo, dado um círculo de raio ϵ em torno da origem, escolhendo c suficientemente pequeno, podemos garantir que toda trajetória começando

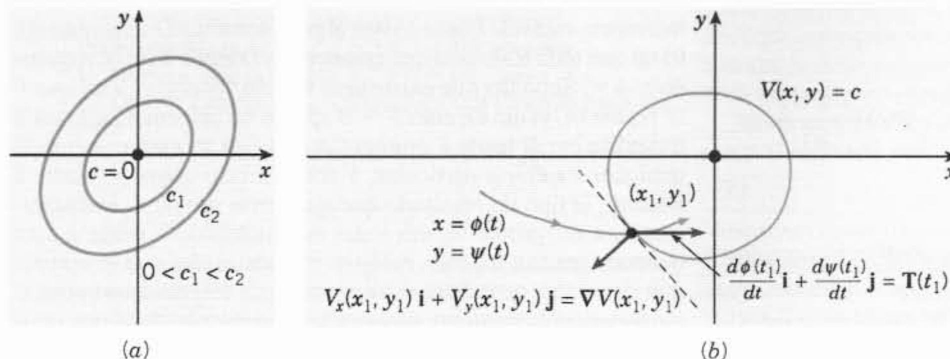


FIG. 9.6.1 Interpretação geométrica do método de Liapunov.

no interior da curva fechada $V(x, y) = c$, permanece no interior do círculo de raio ϵ; de fato, permanece dentro da própria curva $V(x, y) = c$. Portanto, a origem é um ponto crítico estável.

Para mostrar isso, lembre-se do cálculo que o vetor

$$\nabla V(x, y) = V_x(x, y)\mathbf{i} + V_y(x, y)\mathbf{j}, \qquad (9)$$

conhecido como o gradiente de V, é normal à curva $V(x, y) = c$ e aponta na direção do crescimento de V. No caso atual, V aumenta quando se afasta da origem, logo ∇V aponta para longe da origem, como indicado na Fig. 9.6.1*b*. Considere, agora, uma trajetória $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ do sistema (6) e lembre que o vetor $\mathbf{T}(t) = \phi'(t)\mathbf{i} + \psi'(t)\mathbf{j}$ é tangente à trajetória em cada ponto; veja a Fig. 9.6.1*b*. Sejam $x_1 = \phi(t_1)$, $y_1 = \psi(t_1)$ um ponto da trajetória e $V(x, y) = c$ uma curva fechada. Nesse ponto, $\phi'(t_1) = F(x_1, y_1)$, $\psi'(t_1) = G(x_1, y_1)$, logo, da Eq. (7), obtemos

$$\begin{aligned}\dot{V}&(x_1, y_1)\\ &= V_x(x_1, y_1)\phi'(t_1) + V_y(x_1, y_1)\psi'(t_1)\\ &= [V_x(x_1, y_1)\mathbf{i} + V_y(x_1, y_1)\mathbf{j}]\cdot[\phi'(t_1)\mathbf{i} + \psi'(t_1)\mathbf{j}]\\ &= \nabla V(x_1, y_1)\cdot\mathbf{T}(t_1).\end{aligned} \qquad (10)$$

Portanto, $\dot{V}(x_1, y_1)$ é o produto escalar do vetor $\nabla V(x_1, y_1)$ com o vetor $\mathbf{T}(t_1)$. Como $\dot{V}(x_1, y_1) \leq 0$, segue que o co-seno do ângulo entre $\nabla V(x_1, y_1)$ e $\mathbf{T}(t_1)$ também é menor ou igual a zero; portanto, o ângulo está no intervalo $[\pi/2, 3\pi/2]$. Logo, o movimento da trajetória, em relação a $V(x, y) = c$, é para dentro ou, no pior caso, é tangente a essa curva. As trajetórias que começam dentro de uma curva fechada $V(x_1, y_1) = c$ (não importa o quão pequeno seja c) não podem escapar, de modo que a origem é um ponto estável. Se $\dot{V}(x_1, y_1) < 0$, então as trajetórias passando por pontos na curva dirigem-se, de fato, para dentro. Em conseqüência, pode-se mostrar que as trajetórias começando suficientemente próximas da origem têm que se aproximar da origem; portanto, a origem é assintoticamente estável.

Um argumento geométrico para o Teorema 9.6.2 segue de maneira análoga. De fato, suponha que $\dot{V}$ é positiva definida e suponha que, dado qualquer círculo em torno da origem, existe um ponto interior (x_1, y_1) no qual $V(x_1, y_1) > 0$. Considere uma trajetória que comece em (x_1, y_1). Ao longo dessa trajetória, V tem que crescer, pela Eq. (8), já que $\dot{V}(x_1, y_1) > 0$; além disso, como $V(x_1, y_1) > 0$, a trajetória não pode se aproximar da origem, pois $V(0, 0) = 0$. Isso mostra que a origem não pode ser assintoticamente estável. Explorando mais o fato de que $\dot{V}(x_1, y_1) > 0$, é possível mostrar que a origem é um ponto estável; no entanto, não faremos esse argumento.

Exemplo 2

Use o Teorema 9.6.1 para mostrar que (0, 0) é um ponto crítico estável para as equações do pêndulo sem amortecimento (2). Use, também, o Teorema 9.6.2 para mostrar que $(\pi, 0)$ é um ponto crítico instável.

Seja V a energia total dada pela Eq. (4):

$$V(x, y) = mgL(1 - \cos x) + \tfrac{1}{2}mL^2y^2. \qquad (4)$$

Se escolhermos D como o domínio $-\pi/2 < x < \pi/2$, $-\infty < y < \infty$, então V é positiva aí exceto na origem, onde é zero. Logo, V é positiva definida em D. Além disso, como já vimos,

$$\dot{V} = (mgL\operatorname{sen} x)(y) + (mL^2y)(-g\operatorname{sen} x)/L = 0$$

para todo x e y. Logo $\dot{V}$ é negativa semidefinida em D. Em conseqüência, pela última parte no Teorema 9.6.1, a origem é um ponto crítico estável para o pêndulo não-amortecido. Observe que essa conclusão não pode ser obtida pelo Teorema 9.3.2, já que (0, 0) é um centro para o sistema linear correspondente.

Considere, agora, o ponto crítico $(\pi, 0)$. A função de Liapunov dada pela Eq. (4) não é mais apropriada, já que o Teorema 9.6.2 pede uma função V para a qual $\dot{V}$ é positiva ou negativa definida. Para analisar o ponto $(\pi, 0)$, é conveniente mover esse ponto para a origem através da mudança de variáveis $x = \pi + u$, $y = v$. Então, as equações diferenciais ficam

$$du/dt = v, \quad dv/dt = \frac{g}{L}\operatorname{sen} u, \qquad (11)$$

e o ponto crítico no plano uv é (0, 0). Considere a função

$$V(u, v) = v\operatorname{sen} u \qquad (12)$$

e seja D o domínio $-\pi/4 < u < \pi/4$, $-\infty < v < \infty$. Então,

$$\begin{aligned}\dot{V} &= (v\cos u)(v) + (\operatorname{sen} u)[(g/L)\operatorname{sen} u]\\ &= v^2\cos u + (g/L)\operatorname{sen}^2 u\end{aligned} \qquad (13)$$

é positiva definida em D. A única coisa que falta é verificar se existem pontos em todas as vizinhanças da origem onde o próprio V é positivo. Da Eq. (12), vemos que $V(u, v) > 0$ no primeiro quadrante (onde ambos sen u e v são positivos) e no terceiro quadrante (onde ambos são negativos). Logo, as condições do Teorema 9.6.2 são satisfeitas, e o ponto (0, 0) no plano uv, ou o ponto $(\pi, 0)$ no plano xy, é instável.

As equações para o pêndulo amortecido são discutidas no Problema 7.

De um ponto de vista prático, estamos mais interessados, muitas vezes, na bacia de atração. O teorema a seguir fornece alguma informação sobre o assunto.

Teorema 9.6.3

Suponha que a origem seja um ponto isolado do sistema autônomo (6). Seja V uma função contínua com derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Se existe um domínio limitado D_K, contendo a origem, onde $V(x, y) < K$, V é positiva definida e $\dot{V}$ é negativa definida, então toda solução das Eqs. (6) que começa em um ponto em D_K tende à origem quando t tende a ∞.

Em outras palavras, o Teorema 9.6.3 diz que, se $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ é uma solução das Eqs. (6) com dados iniciais em

D_K, então (x, y) tende ao ponto crítico $(0, 0)$ quando $t \to \infty$. Logo, D_K é uma região de estabilidade assintótica; é claro que pode não ser toda a bacia de atração. Esse teorema é demonstrado mostrando-se que (i) não existe solução periódica do sistema (6) em D_K, e (ii) não existem outros pontos críticos em D_K. Segue, então, que as trajetórias começando em D_K não podem escapar e, portanto, têm que tender à origem quando t tende a ∞.

Os Teoremas 9.6.1 e 9.6.2 fornecem condições suficientes para a estabilidade e a instabilidade, respectivamente. No entanto, essas condições não são necessárias, nem a nossa falha em determinar uma função de Liapunov adequada significa que não existe uma. Infelizmente, não existe método geral para a construção de funções de Liapunov; entretanto, já foi feito um extenso trabalho de construção de funções de Liapunov para classes especiais de equações. O próximo teorema, enunciado sem demonstração, fornece um resultado algébrico elementar que é útil, muitas vezes, na construção de funções positivas definidas ou negativas definidas.

Teorema 9.6.4

A função

$$V(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \tag{14}$$

é positiva definida se, e somente se,

$$a > 0 \quad \text{e} \quad 4ac - b^2 > 0, \tag{15}$$

e é negativa definida se, e somente se,

$$a < 0 \quad \text{e} \quad 4ac - b^2 > 0. \tag{16}$$

O uso do Teorema 9.6.4 é ilustrado no próximo exemplo.

Exemplo 3

Mostre que o ponto crítico $(0, 0)$ do sistema autônomo

$$dx/dt = -x - xy^2, \quad dy/dt = -y - x^2y \tag{17}$$

é assintoticamente estável.

Vamos tentar construir uma função de Liapunov da forma (14). Então $V_x(x, y) = 2ax + by$, $V_y(x, y) = bx + 2cy$, de modo que

$$\dot V(x, y) = (2ax + by)(-x - xy^2) + (bx + 2cy)(-y - x^2y)$$
$$= -[2a(x^2 + x^2y^2) + b(2xy + xy^3 + x^3y) + 2c(y^2 + x^2y^2)].$$

Se escolhermos $b = 0$ e a e c como sendo dois números positivos quaisquer, então $\dot V$ é negativa definida e V é positiva definida pelo Teorema 9.6.4. Logo, pelo Teorema 9.6.1, a origem é um ponto crítico assintoticamente estável.

Exemplo 4

Considere o sistema

$$\begin{aligned} dx/dt &= x(1 - x - y), \\ dy/dt &= y(0{,}75 - y - 0{,}5x). \end{aligned} \tag{18}$$

Vimos, no Exemplo 1 da Seção 9.4, que esse sistema modela um determinado par de espécies em competição e que o ponto crítico $(0{,}5; 0{,}5)$ é assintoticamente estável. Confirme essa conclusão encontrando uma função de Liapunov.

Simplifica se colocarmos o ponto $(0{,}5; 0{,}5)$ na origem. Para isso, sejam

$$x = 0{,}5 + u, \qquad y = 0{,}5 + v. \tag{19}$$

Então, substituindo x e y nas Eqs. (18), obtemos o novo sistema

$$\begin{aligned} du/dt &= -0{,}5u - 0{,}5v - u^2 - uv, \\ dv/dt &= -0{,}25u - 0{,}5v - 0{,}5uv - v^2. \end{aligned} \tag{20}$$

Para manter os cálculos relativamente simples, considere a função $V(u, v) = u^2 + v^2$ como uma função de Liapunov possível. Essa função é, claramente, positiva definida, de modo que precisamos, apenas, determinar se existe uma região contendo a origem no plano uv onde a derivada $\dot V$ em relação ao sistema (20) é negativa definida. Calculamos $\dot V(u,v)$ e encontramos

$$\dot V(u, v) = V_u \frac{du}{dt} + V_v \frac{dv}{dt}$$
$$= 2u(-0{,}5u - 0{,}5v - u^2 - uv) + 2v(-0{,}25u - 0{,}5v - 0{,}5uv - v^2),$$

ou

$$\begin{aligned} \dot V(u, v) = -[(u^2 + 1{,}5uv + v^2) \\ + (2u^3 + 2u^2v + uv^2 + 2v^3)], \end{aligned} \tag{21}$$

onde juntamos os termos quadráticos e os cúbicos. Queremos mostrar que a expressão entre colchetes na Eq. (21) é positiva definida, pelo menos para u e v suficientemente pequenos. Observe que os termos quadráticos podem ser escritos na forma

$$u^2 + 1{,}5uv + v^2 = 0{,}25(u^2 + v^2) + 0{,}75(u + v)^2, \tag{22}$$

de modo que esses termos são positivos definidos. Por outro lado, os termos cúbicos na Eq. (21) podem ter qualquer sinal. Precisamos mostrar, então, que, em alguma vizinhança de $u = 0$, $v = 0$, os termos cúbicos são menores, em módulo, do que os termos quadráticos, isto é,

$$\begin{aligned} &|2u^3 + 2u^2v + uv^2 + 2v^3| \\ &< 0{,}25(u^2 + v^2) + 0{,}75(u + v)^2. \end{aligned} \tag{23}$$

Para estimar a expressão à esquerda do sinal de desigualdade na Eq. (23), vamos introduzir coordenadas polares $u = r\cos\theta$, $v = r \operatorname{sen}\theta$. Então,

$$\begin{aligned} &|2u^3 + 2u^2v + uv^2 + 2v^3| \\ &= r^3|2\cos^3\theta + 2\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}^3\theta| \\ &\le r^3[2|\cos^3\theta| + 2\cos^2\theta|\operatorname{sen}\theta| + |\cos\theta|\operatorname{sen}^2\theta + 2|\operatorname{sen}^3\theta|] \\ &\le 7r^3, \end{aligned}$$

já que $|\text{sen}\,\theta|$, $|\cos\theta| \le 1$. Para satisfazer a Eq. (23), é, certamente, suficiente satisfazer a condição mais forte

$$7r^3 < 0{,}25(u^2 + v^2) = 0{,}25r^2,$$

que fornece $r < 1/28$. Logo, pelo menos nesse disco, as hipóteses do Teorema 9.6.1 são satisfeitas, de modo que a origem é um ponto crítico assintoticamente estável do sistema (20). O mesmo é verdade, então, para o ponto crítico (0,5; 0,5) do sistema original (18).

Referindo-nos ao Teorema 9.6.3, o argumento precedente mostra, também, que o disco com centro em (0,5; 0,5) e raio 1/28 é uma região de estabilidade assintótica para o sistema (18). Essa região é bem menor do que a bacia de atração inteira, como mostra a discussão na Seção 9.4. Para obter uma estimativa melhor da bacia de atração do Teorema 9.6.3, os termos na Eq. (23) teriam que ser estimados de modo mais preciso, ou teria que ser usada uma função de Liapunov melhor (e, possivelmente, mais complicada), ou ambos.

Problemas

Nos problemas de 1 a 4, construa uma função de Liapunov adequada da forma $ax^2 + cy^2$, onde a e c devem ser determinados. Depois, mostre que o ponto crítico na origem é do tipo indicado.

1. $dx/dt = -x^3+xy^2$, $dy/dt=-2x^2y-y^3$; assintoticamente estável
2. $dx/dt = -\frac{1}{2}x^3+2xy^2$, $dy/dt=-y^3$; assintoticamente estável
3. $dx/dt = -x^3+2y^3$, $dy/dt=-2xy^2$; estável (pelo menos)
4. $dx/dt = x^3 - y^3$, $dy/dt=-2xy^2+4x^2y+2y^3$; instável
5. Considere o sistema de equações

$$dx/dt = y - xf(x, y), \qquad dy/dt = -x - yf(x, y),$$

onde f é contínua e tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas. Mostre que, se $f(x, y) > 0$ em alguma vizinhança da origem, então a origem é um ponto crítico assintoticamente estável e, se $f(x, y) < 0$ em alguma vizinhança da origem, então a origem é um ponto crítico instável.
Sugestão: Construa uma função de Liapunov da forma $c(x^2 + y^2)$.

6. Uma generalização da equação do pêndulo não-amortecido é

$$d^2u/dt^2 + g(u) = 0, \qquad \text{(i)}$$

onde $g(0) = 0$, $g(u) > 0$ para $0 < u < k$ e $g(u) < 0$ para $-k < u < 0$, isto é, $ug(u) > 0$ para $u \neq 0$, $-k < u < k$. Note que $g(u) = \text{sen}\,u$ tem essa propriedade em $(-\pi/2, \pi/2)$.
(a) Fazendo $x = u$, $y = du/dt$, escreva a Eq. (i) como um sistema de duas equações e mostre que $x = 0$, $y = 0$ é um ponto crítico.
(b) Mostre que

$$V(x, y) = \tfrac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(s)\,ds, \qquad -k < x < k \qquad \text{(ii)}$$

é positiva definida e use esse resultado para mostrar que o ponto crítico (0, 0) é estável. Note que a função de Liapunov V dada pela Eq. (ii) corresponde à função energia $V(x, y) = (1/2)y^2 + (1 - \cos x)$ para o caso em que $g(u) = \text{sen}\,u$.

7. Introduzindo variáveis adimensionais adequadas, podemos escrever o sistema de equações não-lineares para o pêndulo amortecido [Eq. (18) da Seção 9.3] na forma

$$dx/dt = y, \qquad dy/dt = -y - \text{sen}\,x.$$

(a) Mostre que a origem é um ponto crítico.
(b) Mostre que, enquanto $V(x, y) = x^2 + y^2$ é positiva definida, $\dot{V}(x, y)$ toma valores positivos e negativos em qualquer domínio contendo a origem, logo V não é uma função de Liapunov.
Sugestão: $x - \text{sen}\,x > 0$ para $x > 0$ e $x - \text{sen}\,x < 0$ para $x < 0$. Considere os casos com y positivo, mas tão pequeno que y^2 pode ser desprezado se comparado a y.
(c) Usando a função de energia $V(x, y) = (1/2)y^2 + (1 - \cos x)$, mencionada no Problema 6(b), mostre que a origem é um ponto crítico estável. Como existe amortecimento no sistema, podemos esperar que a origem seja assintoticamente estável. No entanto, não é possível chegar a essa conclusão usando-se essa função de Liapunov.
(d) Para mostrar a estabilidade assintótica, é necessário construir uma função de Liapunov melhor do que a usada no item (c). Mostre que $V(x, y) = (1/2)(x + y)^2 + x^2 + (1/2)y^2$ é uma função de Liapunov e conclua que a origem é um ponto crítico assintoticamente estável.
Sugestão: Da fórmula de Taylor com resto, segue que $\text{sen}\,x = x - \alpha x^3/3!$, onde α depende de x, mas $0 < \alpha < 1$ para $-\pi/2 < x < \pi/2$. Então, fazendo $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, mostre que $\dot{V}(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) = -r^2[1 + h(r, \theta)]$, onde $|h(r, \theta)| < 1$ se r for suficientemente pequeno.

8. A equação de Liénard (Problema 28 da Seção 9.3) é

$$\frac{d^2u}{dt^2} + c(u)\frac{du}{dt} + g(u) = 0,$$

onde g satisfaz as condições do Problema 6 e $c(u) \ge 0$. Mostre que o ponto $u = 0$, $du/dt = 0$ é um ponto crítico estável.

9. (a) Um caso particular da equação de Liénard do Problema 8 é

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + g(u) = 0,$$

onde g satisfaz as condições do Problema 6. Fazendo $x = u$, $y = du/dt$, mostre que a origem é um ponto crítico do sistema resultante. Essa equação pode ser interpretada como descrevendo o movimento de um sistema massa-mola com amortecimento proporcional à velocidade e uma força restauradora não-linear. Usando a função de Liapunov do Problema 6, mostre que a origem é um ponto crítico estável, mas note que, mesmo com o amortecimento, não podemos concluir a estabilidade assintótica com essa função de Liapunov.
(b) A estabilidade assintótica do ponto crítico (0, 0) pode ser estabelecida construindo-se uma função de Liapunov melhor, como foi feito no item (d) do Problema 7. No entanto, a análise para uma função g geral é um pouco mais sofisticada e vamos mencionar, apenas, que uma forma apropriada para V é

$$V(x, y) = \tfrac{1}{2}y^2 + Ayg(x) + \int_0^x g(s)\,ds,$$

onde A é uma constante positiva a ser escolhida de modo que V seja positiva definida e $\dot{V}$ seja negativa definida. Para o problema do pêndulo [$g(x) = \text{sen}\,x$], use V como na equação precedente com $A = 1/2$ para mostrar que a origem é assintoticamente estável.
Sugestão: Use $\text{sen}\,x = x - \alpha x^3/3!$ e $\cos x = 1 - \beta x^2/2!$, onde α e β dependem de x, mas $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$ para $-\pi/2 < x < \pi/2$; sejam $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, e mostre que $\dot{V}(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) = -(1/2)r^2[1 + (1/2)\,\text{sen}\,2\theta + h(r, \theta)]$, onde $|h(r, \theta)| < 1/2$ para r suficientemente pequeno. Para mostrar que V é positiva definida, use o fato de $\cos x = 1 - x^2/2 + \gamma x^4/4!$, onde γ depende de x, mas $0 < \gamma < 1$ para $-\pi/2 < x < \pi/2$.

Nos Problemas 10 e 11, vamos provar parte do Teorema 9.3.2: se o ponto crítico (0, 0) do sistema quase linear

$$dx/dt = a_{11}x + a_{12}y + F_1(x, y),$$
$$dy/dt = a_{21}x + a_{22}y + G_1(x, y) \qquad \text{(i)}$$

é um ponto crítico assintoticamente estável do sistema linear correspondente

$$dx/dt = a_{11}x + a_{12}y, \quad dy/dt = a_{21}x + a_{22}y, \tag{ii}$$

então ele é um ponto crítico assintoticamente estável do sistema quase linear (i). O Problema 12 trata do resultado correspondente para a instabilidade.

10. Considere o sistema linear (ii).
(a) Como (0, 0) é um ponto crítico assintoticamente estável, mostre que $a_{11} + a_{22} < 0$ e $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$. (Veja o Problema 21 da Seção 9.1.)
(b) Construa uma função de Liapunov $V(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$ tal que V é positiva definida e $\dot{V}$ é negativa definida. Um modo de garantir que $\dot{V}$ seja negativa definida é escolher A, B e C tais que $\dot{V}(x, y) = -x^2 - y^2$. Mostre que isso leva ao resultado

$$A = -\frac{a_{21}^2 + a_{22}^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{2\Delta}, \quad B = \frac{a_{12}a_{22} + a_{11}a_{21}}{\Delta},$$
$$C = -\frac{a_{11}^2 + a_{12}^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{2\Delta},$$

onde $\Delta = (a_{11} + a_{22})(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$.
(c) Usando o resultado do item (a), mostre que $A > 0$ e depois mostre que (são necessários vários passos algébricos)

$$4AC - B^2 = \frac{(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2)(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + 2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2}{\Delta^2} > 0.$$

Logo, pelo Teorema 9.6.4, V é positiva definida.

11. Vamos mostrar, neste problema, que a função de Liapunov construída no problema precedente também é uma função de Liapunov para o sistema quase linear (i). Precisamos mostrar que existe alguma região contendo a origem na qual $\dot{V}$ é negativa definida.
(a) Mostre que

$$\dot{V}(x, y) = -(x^2 + y^2) + (2Ax + By)F_1(x, y) + (Bx + 2Cy)G_1(x, y).$$

(b) Lembre que $F_1(x, y)/r \to 0$ e $G_1(x, y)/r \to 0$ quando $r = (x^2 + y^2)^{1/2} \to 0$. Isso significa que, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um círculo $r = R$ em torno da origem tal que, se $0 < r < R$, então $|F_1(x, y)| < \epsilon r$ e $|G_1(x, y)| < \epsilon r$. Escolhendo M como o máximo entre $|2A|$, $|B|$ e $|2C|$, mostre, usando coordenadas polares, que R pode ser escolhido de modo que $\dot{V}(x, y) < 0$ para $r < R$.
Sugestão: Escolha ϵ suficientemente pequeno em função de M.

12. Neste problema, vamos provar uma parte do Teorema 9.3.2 relativa à instabilidade.
(a) Mostre que, se $a_{11} + a_{22} > 0$ e $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$, então o ponto crítico do sistema linear (ii) é instável.
(b) O mesmo resultado é válido para o sistema quase linear (i).
Como nos Problemas 10 e 11, construa uma função positiva definida V tal que $\dot{V}(x, y) = x^2 + y^2$, de modo que V é positiva definida, e invoque o Teorema 9.6.2.

9.7 Soluções Periódicas e Ciclos-Limite

Nesta seção, vamos discutir mais a fundo a possível existência de soluções periódicas de sistemas autônomos de segunda ordem da forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{1}$$

Tais soluções satisfazem a relação

$$\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t) \tag{2}$$

para todo t e para alguma constante não-negativa T chamada de período. As trajetórias correspondentes são *curvas fechadas* no plano de fase. Soluções periódicas, com freqüência, têm um papel importante em problemas físicos, pois representam fenômenos que ocorrem repetidamente. Em muitas situações, uma solução periódica representa um "estado final" para o qual todas as soluções "vizinhas" tendem quando a parte transiente, devido às condições iniciais, vai sumindo.

Um caso particular de solução periódica é a solução constante $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$, que corresponde a um ponto crítico do sistema autônomo. Tal solução é, claramente, periódica com qualquer período. Nesta seção, ao falarmos de solução periódica, queremos dizer uma solução periódica não-constante. Nesse caso, o período T é positivo e escolhido, em geral, como o menor número positivo para o qual a Eq. (2) é válida.

Lembre-se de que as soluções do sistema autônomo linear

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{3}$$

são periódicas se, e somente se, os autovalores da matriz $\mathbf{A}$ são imaginários puros. Nesse caso, o ponto crítico na origem é um centro, como discutido na Seção 9.1. Enfatizamos que, se os autovalores de $\mathbf{A}$ forem imaginários puros, então toda solução do sistema linear (3) será periódica, enquanto se os autovalores não forem imaginários puros, então vão existir soluções periódicas (não-constantes). As equações predador-presa discutidas na Seção 9.5, embora não-lineares, comportam-se de maneira análoga: todas as soluções no primeiro quadrante são periódicas. O exemplo a seguir ilustra um modo diferente em que podem aparecer soluções periódicas de sistemas autônomos não-lineares.

Exemplo 1

Discuta as soluções do sistema

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y + x - x(x^2 + y^2) \\ -x + y - y(x^2 + y^2) \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Não é difícil mostrar que (0, 0) é o único ponto crítico do sistema (4) e, também, que o sistema é quase linear em uma vizinhança da origem. O sistema linear correspondente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{5}$$

tem autovalores $1 \pm i$. Logo, a origem é um ponto espiral instável, tanto para o sistema linear (5), quanto para o sistema não-linear (4). Assim, qualquer solução que comece próxima à origem no plano de fase vai se afastar da origem ao longo de uma espiral. Como não existem outros pontos críticos, poderíamos imaginar que todas as soluções das Eqs. (4) correspondem a trajetórias que tendem a infinito ao longo de espirais. No entanto, vamos mostrar que isso não está correto, porque, muito longe da origem, as trajetórias estão orientadas na direção da origem.

É conveniente usar coordenadas polares r e θ, onde

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \tag{6}$$

e $r \geq 0$. Se multiplicarmos a primeira das Eqs. (4) por x, a segunda por y e depois somar, obtemos

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2. \tag{7}$$

Como $r^2 = x^2 + y^2$ e $r(dr/dt) = x(dx/dt) + y(dy/dt)$, segue da Eq. (27) que

$$r\frac{dr}{dt} = r^2(1 - r^2). \tag{8}$$

Isso é semelhante às equações discutidas na Seção 2.5. Os pontos críticos (para $r \geq 0$) são a origem e o ponto $r = 1$, que corresponde ao círculo unitário no plano de fase. Da Eq. (8), segue que $dr/dt > 0$ se $r < 1$ e $dr/dt < 0$ se $r > 1$. Logo, no interior do círculo unitário, as trajetórias estão orientadas para fora, enquanto no exterior estão orientadas para dentro. Aparentemente, o círculo $r = 1$ é uma trajetória-limite para esse sistema.

Para determinar uma equação para θ, multiplicamos a primeira das Eqs. (4) por y, a segunda por x e subtraímos, obtendo

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = x^2 + y^2. \tag{9}$$

Calculando dx/dt e dy/dt das Eqs. (6), vemos que a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (9) é $-r^2(d\theta/dt)$, de modo que a Eq. (9) se reduz a

$$\frac{d\theta}{dt} = -1. \tag{10}$$

O sistema de Eqs. (8), (10) para r e θ é equivalente ao sistema original (4). Uma solução do sistema (8), (10) é

$$r = 1, \qquad \theta = -t + t_0, \tag{11}$$

onde t_0 é uma constante arbitrária. Quando t aumenta, um ponto que satisfaz as Eqs. (11) move-se no sentido horário em cima do círculo. Assim, o sistema autônomo (4) tem uma solução periódica. Outras soluções podem ser obtidas resolvendo-se a Eq. (8) pelo método de separação de variáveis; se $r \neq 0$ e $r \neq 1$, então

$$\frac{dr}{r(1 - r^2)} = dt. \tag{12}$$

A Eq. (12) pode ser resolvida usando-se frações parciais para se reescrever a expressão à esquerda do sinal de igualdade e, depois, integrar. Fazendo esses cálculos, encontramos que a solução das Eqs. (10) e (12) é

$$r = \frac{1}{\sqrt{1 + c_0 e^{-2t}}}, \qquad \theta = -t + t_0, \tag{13}$$

onde c_0 e t_0 são constantes arbitrárias. A solução (13) contém, também, a solução (11), que pode ser obtida fazendo-se $c_0 = 0$ na primeira das Eqs. (13).

A solução satisfazendo as condições iniciais $r = \rho$, $\theta = \alpha$ em $t = 0$ é dada por

$$r = \frac{1}{\sqrt{1+[(1/\rho^2)-1]e^{-2t}}}, \qquad \theta = -(t - \alpha). \tag{14}$$

Se $\rho < 1$, então $r \to 1$ por dentro quando $t \to \infty$; se $\rho > 1$, então $r \to 1$ por fora quando $t \to \infty$. Logo, em todos os casos, as trajetórias são espirais que se aproximam do círculo $r = 1$ quando $t \to \infty$. A Fig. 9.7.1 mostra diversas trajetórias.

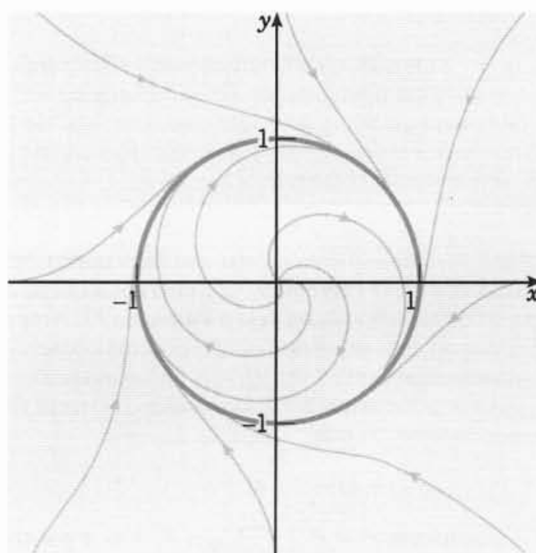


FIG. 9.7.1 Trajetórias do sistema (4); um ciclo-limite.

Nesse exemplo, o círculo $r = 1$ não corresponde, apenas, a soluções periódicas do sistema (4), mas também atrai outras trajetórias não-fechadas que tendem a ele, em forma de espiral, quando $t \to \infty$. Em geral, uma trajetória fechada no plano de fase tal que outras trajetórias tendem a ela, por dentro ou por fora, quando $t \to \infty$, é chamada de **ciclo-limite**. Então, o círculo $r = 1$ é um ciclo-limite para o sistema (4). Se todas as trajetórias que começam perto de uma trajetória fechada (tanto dentro quanto fora) se aproximam da trajetória fechada quando $t \to \infty$, então o circuito-limite é **assintoticamente estável**. Como a trajetória-limite é, ela própria, uma órbita periódica, em vez de um ponto de equilíbrio, esse tipo de estabilidade é chamado, muitas vezes, de **estabilidade orbital**. Se as trajetórias de um lado tendem à trajetória fechada, enquanto as do outro lado se afastam quando $t \to \infty$, então o ciclo-limite é dito **semi-estável**. Se as trajetórias de ambos os lados da trajetória fechada se afastam quando $t \to \infty$, então a trajetória fechada é **instável**. Também é possível existir trajetórias fechadas tais que outras trajetórias nem se aproximam nem se afastam dela, por exemplo, as soluções periódicas das equações predador-presa na Seção 9.5. Nesse caso, a trajetória fechada é **estável**.

A existência de um ciclo-limite assintoticamente estável foi estabelecida no Exemplo 1, resolvendo-se as equações explicitamente. Infelizmente, isso não é possível em geral, de modo que vale a pena conhecer teoremas gerais relativos à existência ou não-existência de ciclos-limite para sistemas autônomos não-lineares. Para discutir esses teoremas, é conveniente escrever o sistema (1) em forma escalar:

$$dx/dt = F(x, y), \qquad dy/dt = G(x, y). \tag{15}$$

Teorema 9.7.1

Suponha que as funções F e G tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio D do plano xy. Uma trajetória fechada do sistema (15) tem, necessariamente, que conter, em seu interior, pelo menos um ponto crítico (de equilíbrio). Se contém apenas um ponto crítico, esse ponto não pode ser de sela.

Não vamos demonstrar esse teorema, mas é fácil mostrar exemplos dele. Um é dado pelo Exemplo 1 e Fig. 9.7.1, no qual a trajetória fechada contém, em seu interior, o ponto crítico (0, 0), um ponto espiral. Um outro exemplo é o sistema de equações predador-presa na Seção 9.5; veja a Fig. 9.5.2. Cada trajetória fechada contém, em seu interior, o ponto crítico (3, 2); nesse caso, o ponto crítico é um centro.

O Teorema 9.7.1 também é útil de maneira negativa. Se uma dada região não contém pontos críticos, não podem existir trajetórias fechadas inteiramente contidas na região. A mesma conclusão pode ser obtida se a região contém um único ponto crítico que é de sela. Por exemplo, no Exemplo 2 da Seção 9.4, um exemplo sobre espécies em competição, o único ponto crítico no interior do primeiro quadrante é o ponto de sela (0,5; 0,5). Portanto, esse sistema não tem trajetórias fechadas contidas no primeiro quadrante.

Um segundo resultado sobre a não-existência de trajetórias fechadas é dado pelo teorema a seguir.

Teorema 9.7.2

Suponha que as funções F e G tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio simplesmente conexo D do plano xy. Se $F_x + G_y$ tem o mesmo sinal em todos os pontos de D, então não existe trajetória fechada do sistema (15) inteiramente contida em D.

Um domínio simplesmente conexo em duas dimensões é um que não tem buracos. O Teorema 9.7.2 é uma conseqüência direta do Teorema de Green no plano; veja o Problema 13. Note que, se $F_x + G_y$ muda de sinal no domínio, não podemos concluir coisa alguma; podem existir ou não trajetórias fechadas em D.

Para ilustrar o Teorema 9.7.2, considere o sistema (4). Um cálculo rotineiro mostra que

$$F_x(x,y)+G_y(x,y) = 2-4(x^2+y^2) = 2(1-2r^2), \quad (16)$$

onde, como de hábito, $r^2 = x^2 + y^2$. Logo, $F_x + G_y$ é positiva para $0 \le r < 1/\sqrt{2}$, de modo que não existe trajetória fechada nesse disco. É claro, mostramos no Exemplo 1 que não existe trajetória fechada na região maior $r < 1$. Isso ilustra que a informação dada pelo Teorema 9.7.2 pode não ser o melhor resultado possível. Referindo-nos, mais uma vez, à Eq. (16), note que $F_x + G_y < 0$ para $r > 1/\sqrt{2}$. No entanto, o teorema não se aplica nesse caso, já que essa região anular não é simplesmente conexa. De fato, como mostramos no Exemplo 1, ela contém um ciclo-limite.

O teorema a seguir nos dá condições que garantem a existência de uma trajetória fechada.

Teorema 9.7.3

(Teorema de Poincaré-Bendixson).[8] Sejam F e G funções com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio D no plano xy. Seja D_1 um subdomínio limitado de D e seja R a região que consiste na união de D_1 a sua fronteira (todos os pontos de R pertencem a D). Suponha que R não contenha pontos críticos do sistema (15). Se existe uma constante t_0 tal que $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ é uma solução do sistema (15) que existe e permanece em R para todo $t \ge t_0$, então, ou $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ é uma solução periódica (trajetória fechada) ou $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ tende a uma trajetória fechada quando $t \to \infty$. Em qualquer dos casos, o sistema (15) tem uma solução periódica em R.

Note que, se R contém uma trajetória fechada, então, necessariamente, pelo Teorema 9.7.1, a trajetória tem que conter um ponto crítico em seu interior. No entanto, esse ponto crítico não pode pertencer a R. Logo, R não pode ser simplesmente conexo; tem que ter um buraco.

Como aplicação do Teorema de Poincaré-Bendixson, considere, novamente, o sistema (4). Como a origem é um ponto crítico, ela tem que ser excluída. Por exemplo, podemos considerar a região R definida por $0{,}5 \le r \le 2$. A seguir, precisamos mostrar que existe uma solução cuja trajetória permanece em R para todo t maior ou igual a algum t_0. Isso segue imediatamente da Eq. (8). Para $r = 0{,}5$, $dr/dt > 0$, de modo que r aumenta, enquanto para $r = 2$, $dr/dt < 0$, de modo que r diminui. Logo, qualquer trajetória que cruza a fronteira de R está entrando em R. Em conseqüência, qualquer solução das Eqs. (4) que começam em R em $t = t_0$ não podem sair, mas têm que permanecer em R para $t > t_0$. É claro que outros números, diferentes de 0,5 e 2, podem ser usados; o importante é que incluam $r = 1$.

Não deveríamos inferir, dessa discussão dos teoremas precedentes, que é fácil determinar se um sistema autônomo não-linear dado tem soluções periódicas; muitas vezes isso não é, absolutamente, simples. Com freqüência, os Teoremas 9.7.1 e 9.7.2 não são conclusivos, e, para o Teorema 9.7.3, é difícil, muitas vezes, determinar uma região R e uma solução que permanece nela.

Vamos encerrar esta seção com um outro exemplo de um sistema não-linear que tem um ciclo-limite.

Exemplo 2

A equação de van der Pol[9]

$$u'' - \mu(1 - u^2)u' + u = 0, \quad (17)$$

onde μ é uma constante não-negativa, descreve a corrente u em um oscilador tríodo. Discuta as soluções dessa equação.

Se $\mu = 0$, a Eq. (17) se reduz a $u'' + u = 0$, cujas soluções são ondas de seno ou co-seno de período 2π. Para $\mu > 0$, o segundo termo na expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (17) também tem que ser considerado. Esse é o termo da resistência, proporcional a u', com um coeficiente $-\mu(1 - u^2)$ que depende de u. Para valores grandes de u, esse termo é positivo e age, como de hábito, para reduzir a amplitude da resposta. No entanto, para u pequeno, o termo de resistência é negativo e, portanto, faz com que a resposta cresça. Isso sugere que talvez exista uma solução de tamanho intermediário para a qual outras soluções tendam quando t aumenta.

[8] Ivar Otto Bendixson (1861-1935) foi um matemático sueco. Esse teorema apareceu em um artigo publicado por ele na revista *Acta Mathematica* em 1901.

[9] Balthasar van der Pol (1889-1959) foi um físico e engenheiro elétrico holandês que trabalhou no Laboratório de Pesquisa da Philips em Eindhoven. Foi pioneiro no estudo experimental de fenômenos não-lineares e investigou a equação que tem seu nome em um artigo publicado em 1926.

Para analisar a Eq. (17) com mais cuidado, vamos escrevê-la como um sistema de segunda ordem através das variáveis $x = u$, $y = u'$. Segue, então, que

$$x' = y, \qquad y' = -x + \mu(1 - x^2)y. \qquad (18)$$

O único ponto crítico do sistema (18) é a origem. Perto da origem, o sistema linear correspondente é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad (19)$$

cujos autovalores são $(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4})/2$. Logo, a origem é um ponto espiral instável para $0 < \mu < 2$ e um nó instável para $\mu \geq 2$. Em todos os casos, uma solução que começa próxima da origem cresce quando t aumenta.

Em relação a soluções periódicas, os Teoremas 9.7.1 e 9.7.2 fornecem, apenas, informação parcial. Do Teorema 9.7.1 concluímos que, se existirem trajetórias fechadas, então a origem tem que estar em seu interior. Calculando $F_x(x, y) + G_y(x, y)$, obtemos

$$F_x(x, y) + G_y(x, y) = \mu(1 - x^2). \qquad (20)$$

Logo, segue do Teorema 9.7.2 que, se existirem trajetórias fechadas, então elas não podem estar contidas na faixa $|x| < 1$, onde $F_x + G_y > 0$.

A aplicação do teorema de Poincaré-Bendixson a esse problema não é tão simples quanto no Exemplo 1. Usando coordenadas polares, encontramos que a equação para a variável radial r é

$$r' = \mu(1 - r^2 \cos^2 \theta) r \operatorname{sen}^2 \theta. \qquad (21)$$

Novamente, considere a região anular R dada por $r_1 \leq r \leq r_2$, onde r_1 é pequeno e r_2 é grande. Quando $r = r_1$, o termo linear à direita do sinal de igualdade na Eq. (21) domina e $r' > 0$, exceto no eixo dos y, onde $\operatorname{sen} \theta = 0$ e, portanto, $r' = 0$ também. Logo, as trajetórias estão entrando em R em todos os pontos do círculo $r = r_1$, com a possível exceção dos contidos no eixo dos x, onde as trajetórias são tangentes ao círculo. Quando $r = r_2$, o termo cúbico à direita do sinal de igualdade na Eq. (21) é o dominante. Logo, $r' < 0$, exceto nos pontos pertencentes ao eixo dos x, onde $r' = 0$, e nos pontos próximos ao eixo dos y, onde $r^2 \cos^2 \theta < 1$ e o termo linear faz com que $r' > 0$. Portanto, não importa o quão grande seja o círculo, sempre haverá pontos sobre ele (a saber, os pontos pertencentes ou próximos ao eixo dos y) onde as trajetórias estão saindo de R. Logo, o teorema de Poincaré-Bendixson não é aplicável, a não ser que consideremos regiões mais complicadas.

É possível mostrar, por uma análise mais elaborada, que a equação de van der Pol tem um único ciclo-limite. No entanto, não prosseguiremos com essa linha de argumentação. Em vez disso, vamos considerar uma abordagem diferente, onde fazemos o gráfico de soluções calculadas numericamente. Observações experimentais indicam que a equação de van der Pol tem uma solução periódica assintoticamente estável cujo período e amplitude dependem do parâmetro μ. Olhando gráficos de trajetórias no plano de fase e de u em função de t podemos entender melhor esse comportamento periódico.

A Fig. 9.7.2 mostra duas trajetórias da equação de van der Pol no plano de fase para $\mu = 0,2$. A trajetória que começa próxima da origem afasta-se em forma de espiral e está orientada no sentido horário; isso é consistente com o comportamento da aproximação linear perto da origem. A outra trajetória passa pelo ponto $(-3, 2)$ e vai para dentro, novamente no sentido horário. Ambas as trajetórias se aproximam de uma curva fechada que corresponde a uma solução periódica estável. A Fig. 9.7.3 mostra os gráficos de u em função de t para as soluções

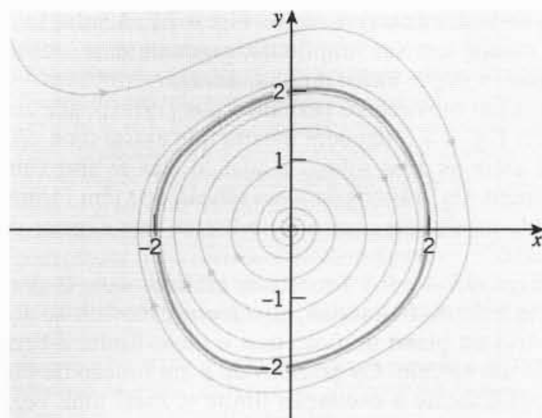


FIG. 9.7.2 Trajetórias da equação de van der Pol (17) para $\mu = 0,2$.

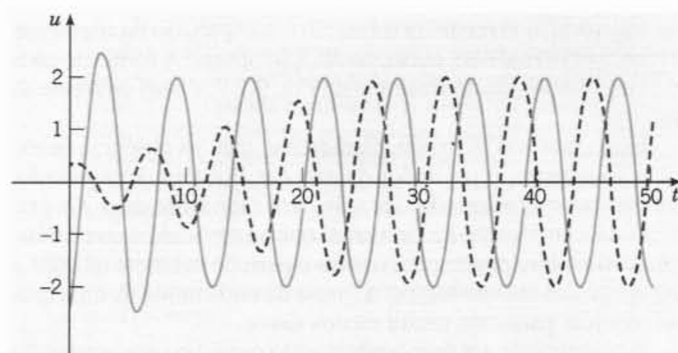


FIG. 9.7.3 Gráficos de u em função de t para as trajetórias na Fig. 9.7.2.

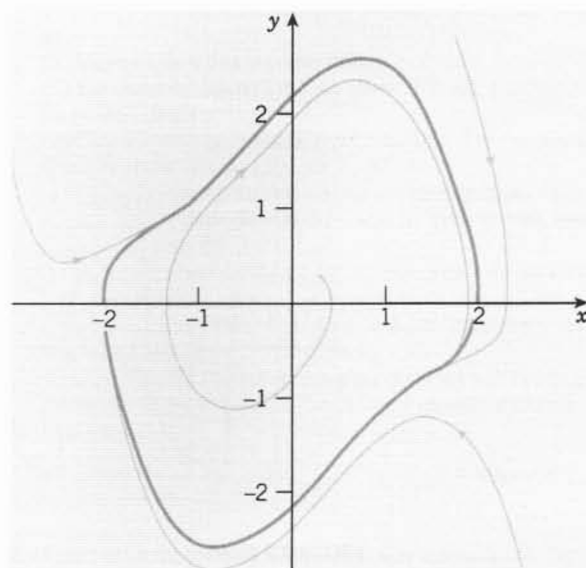


FIG. 9.7.4 Trajetórias da equação de van der Pol (17) para $\mu = 1$.

correspondentes às trajetórias na Fig. 9.7.2. A solução inicialmente menor tem sua amplitude, gradualmente, aumentada, enquanto a solução maior diminui devagar. Ambas as soluções tendem a um movimento periódico que corresponde ao ciclo-limite. A Fig. 9.7.3 também mostra que existe uma diferença de fase entre as duas soluções quando elas se aproximam do ciclo-limite. Os gráficos de u em função de t têm forma quase senoidal, consistente com o ciclo-limite, que é quase circular nesse caso.

As Figs. 9.7.4 e 9.7.5 mostram gráficos semelhantes para o caso $\mu = 1$. As trajetórias, novamente, movem-se no sentido horário no plano de fase, mas o ciclo-limite é bem diferente de um círculo. Os gráficos de u em função de t tendem mais rapidamente à oscilação-limite e, mais uma vez, mostram uma diferença de fase. As oscilações são um pouco menos simétricas nesse caso, com uma subida mais íngreme do que a descida.

A Fig. 9.7.6 mostra o plano de fase para $\mu = 5$. O movimento permanece no sentido horário, e o ciclo-limite é ainda mais alongado, especialmente na direção do eixo dos y. A Fig. 9.7.7 mostra um gráfico de u em função de t. Embora a solução comece longe do ciclo-limite, a oscilação-limite é praticamente alcançada em uma fração de um período. Começando em um de seus valores extremos no eixo dos x no plano de fase, a solução move-se para a outra posição extrema, começando devagar, mas, depois de atingir um determinado ponto na trajetória, o restante da transição é completado rapidamente. O processo é repetido, então, na direção oposta. A forma de onda do ciclo-limite, como ilustrado na Fig. 9.7.7, é bem diferente de um seno.

Esses gráficos mostram, claramente, que, na ausência de excitação externa, o oscilador de van der Pol tem determinados modos característicos de vibração para cada valor de μ. Os gráficos de u em função de t mostram que a amplitude dessa oscilação varia muito pouco com μ, mas o período aumenta quando μ aumenta. Ao mesmo tempo, a forma da onda muda de uma quase senoidal para uma muito menos suave.

A presença de um único movimento periódico que atrai todas as soluções (próximas), isto é, de um ciclo-limite assintoticamente estável, é um dos fenômenos característicos associados a equações diferenciais não-lineares.

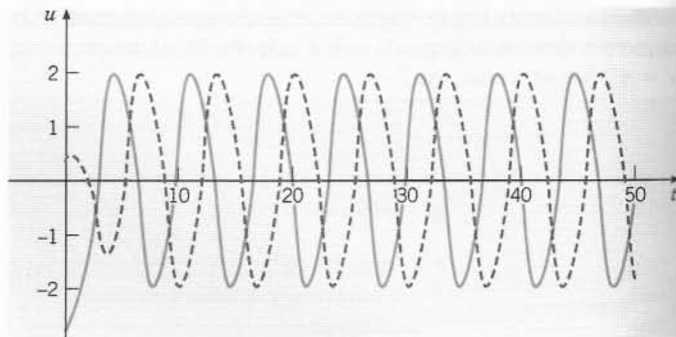


FIG. 9.7.5 Gráficos de u em função de t para as trajetórias na Fig. 9.7.4.

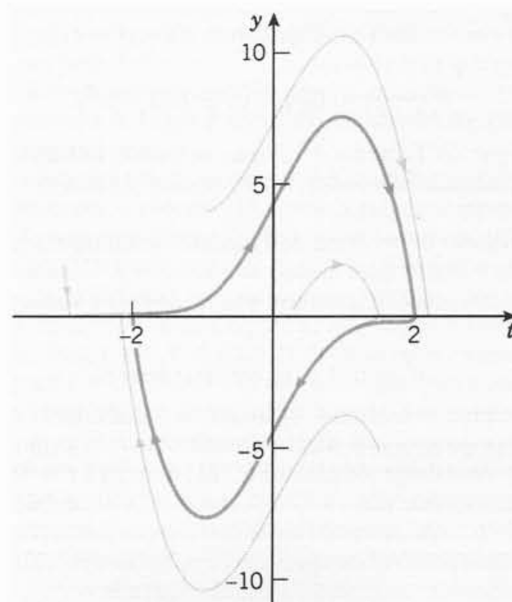


FIG. 9.7.6 Trajetórias da equação de van der Pol (17) para $\mu = 5$.

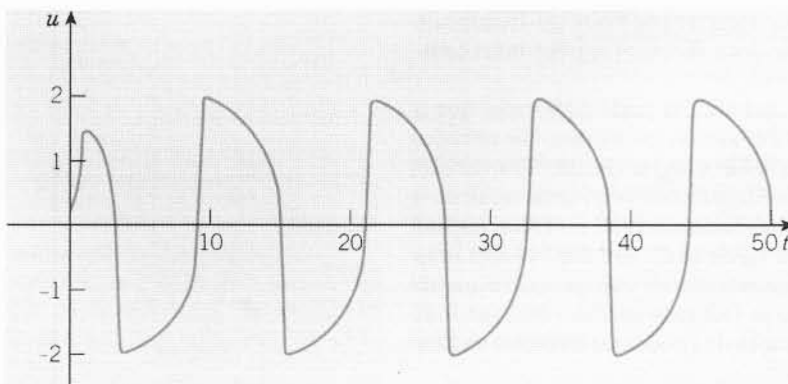


FIG. 9.7.7 Gráfico de u em função de t para a trajetória que vai para fora na Fig. 9.7.6.

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, um sistema autônomo está expresso em coordenadas polares. Determine todas as soluções periódicas, todos os ciclos-limite e suas características de estabilidade.

1. $dr/dt = r^2(1 - r^2), \quad d\theta/dt = 1$
2. $dr/dt = r(1 - r)^2, \quad d\theta/dt = -1$
3. $dr/dt = r(r - 1)(r - 3), \quad d\theta/dt = 1$
4. $dr/dt = r(1 - r)(r - 2), \quad d\theta/dt = -1$
5. $dr/dt = \operatorname{sen} \pi r, \quad d\theta/dt = 1$
6. $dr/dt = r|r - 2|(r - 3), \quad d\theta/dt = -1$
7. Se $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, mostre que $y(dx/dt) - x(dy/dt) = -r^2(d\theta/dt)$.
8. (a) Mostre que o sistema

$$dx/dt = -y + xf(r)/r, \qquad dy/dt = x + yf(r)/r$$

tem soluções periódicas correspondentes aos zeros de $f(r)$. Qual o sentido do movimento nas trajetórias fechadas no plano de fase?
(b) Seja $f(r) = r(r - 2)^2(r^2 - 4r + 3)$. Determine todas as soluções periódicas e suas características de estabilidade.

9. Determine as soluções periódicas, se existirem, do sistema

$$\frac{dx}{dt} = y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x^2 + y^2 - 2),$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x^2 + y^2 - 2).$$

10. Usando o Teorema 9.7.2, mostre que o sistema autônomo linear

$$dx/dt = a_{11}x + a_{12}y, \qquad dy/dt = a_{21}x + a_{22}y$$

não tem solução periódica (diferente de $x = 0$, $y = 0$) se $a_{11} + a_{22} \neq 0$.

Nos Problemas 11 e 12, mostre que o sistema dado não tem soluções periódicas não-constantes.

11. $dx/dt = x + y + x^3 - y^2, \quad dy/dt = -x + 2y + x^2y + y^3/3$
12. $dx/dt = -2x - 3y - xy^2, \quad dy/dt = y + x^3 - x^2y$
13. Prove o Teorema 9.7.2 completando o argumento a seguir. De acordo com o teorema de Green no plano, se C for uma curva fechada simples suficientemente suave, e se F e G são funções contínuas com derivadas parciais de primeira ordem contínuas, então

$$\int_C [F(x, y)\, dy - G(x, y)\, dx] = \iint_R [F_x(x, y) + G_y(x, y)]\, dA,$$

onde C é percorrida no sentido trigonométrico e R é a região limitada por C. Suponha que $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ é uma solução do sistema (15) que é periódica com período T. Seja C a curva fechada dada por $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ para $0 \le t \le T$. Mostre que, para essa curva, a integral de linha é zero. Depois, mostre que a conclusão do Teorema 9.7.2 tem que seguir.

14. (a) Examinando os gráficos de u em função de t nas Figs. 9.7.3, 9.7.5 e 9.7.7, estime o período T do oscilador de van der Pol nesses casos.
(b) Calcule e faça o gráfico das soluções da equação de van der Pol para outros valores do parâmetro μ. Estime o período T também nesses casos.
(c) Faça o gráfico dos valores estimados de T em função de μ. Descreva como T depende de μ.

15. A equação

$$u'' - \mu(1 - \tfrac{1}{3}u'^2)u' + u = 0$$

é chamada, muitas vezes, de equação de Rayleigh.[10]
(a) Escreva a equação de Rayleigh como um sistema de duas equações de primeira ordem.
(b) Mostre que a origem é o único ponto crítico desse sistema. Determine seu tipo e se é estável ou instável.
(c) Seja $\mu = 1$. Escolha condições iniciais e calcule a solução correspondente para o sistema em um intervalo como $0 \le t \le 20$, ou maior. Faça o gráfico de u em função de t e faça, também, o gráfico da trajetória no plano de fase. Observe que a trajetória tende a uma curva fechada (um ciclo-limite). Estime a amplitude A e o período T do ciclo-limite.
(d) Repita o item (c) para outros valores de μ, como $\mu = 0{,}2$; $0{,}5$; 2 e 5. Em cada caso, estime a amplitude A e o período T.
(e) Descreva como o ciclo-limite muda quando μ aumenta. Por exemplo, faça uma tabela e/ou um gráfico de A e T em função de μ.

16. Considere o sistema de equações

$$x' = \mu x + y - x(x^2 + y^2), \quad y' = -x + \mu y - y(x^2 + y^2), \qquad \text{(i)}$$

onde μ é um parâmetro. Observe que esse sistema é o mesmo que o no Exemplo 1, exceto pelo parâmetro μ.
(a) Mostre que a origem é o único ponto crítico.
(b) Encontre o sistema linear que aproxima as Eqs. (i) perto da origem e ache seus autovalores. Determine o tipo e estabilidade do ponto crítico na origem. Como essa classificação depende de μ?
(c) Olhando o Exemplo 1 se necessário, reescreva as Eqs. (i) em coordenadas polares.
(d) Mostre que, quando $\mu > 0$, existe uma solução periódica $r = \sqrt{\mu}$. Resolvendo o sistema encontrado no item (c), ou fazendo o gráfico de soluções calculadas numericamente, conclua que essa solução periódica atrai todas as outras soluções não-nulas. *Obs.*: Quando o parâmetro μ aumenta e passa pelo valor zero, o ponto crítico na origem, anteriormente assintoticamente estável, perde sua estabilidade e, simultaneamente, aparece uma nova solução assintoticamente estável (o ciclo-limite). Logo o ponto $\mu = 0$ é um ponto de bifurcação; esse tipo de bifurcação é chamado de **bifurcação de Hopf**.[11]

17. Existem determinadas reações químicas nas quais as concentrações constituintes oscilam periodicamente ao longo do tempo. O sistema

$$x' = 1 - (b + 1)x + x^2y/4, \qquad y' = bx - x^2y/4$$

é um caso particular de um modelo, conhecido como o Brusselator, desse tipo de reação. Suponha que b é um parâmetro positivo e considere soluções no primeiro quadrante do plano xy.
(a) Mostre que o único ponto crítico é $(1, 4b)$.
(b) Encontre os autovalores do sistema linear correspondente no ponto crítico.
(c) Classifique o ponto crítico em relação a tipo e estabilidade. Como a classificação depende de b?
(d) Quando b aumenta e passa por um determinado valor b_0, o ponto crítico muda de assintoticamente estável para instável. Qual o valor de b_0?
(e) Faça o gráfico de trajetórias no plano de fase para valores de b ligeiramente menores e ligeiramente maiores do que b_0. Observe o ciclo-limite quando $b > b_0$; o Brusselator tem um ponto de bifurcação de Hopf em b_0.
(f) Faça o gráfico de trajetórias para diversos valores de $b > b_0$ e observe como o ciclo-limite deforma quando b aumenta.

18. O sistema

$$x' = 3(x + y - \tfrac{1}{3}x^3 - k), \qquad y' = -\tfrac{1}{3}(x + 0{,}8y - 0{,}7)$$

[10] John William Strutt (1842-1919), terceiro Lord Rayleigh, fez contribuições notáveis em diversas áreas da física matemática. Fora os cinco anos que esteve como professor em Cambridge na cátedra Cavendish, trabalhou, basicamente, em seu laboratório particular em casa. Ganhou o prêmio Nobel em 1904 pela descoberta do argônio.

[11] Eberhard Hopf (1902-1983) nasceu na Áustria e estudou na Universidade de Berlim, mas passou a maior parte de sua vida nos Estados Unidos, principalmente na Universidade de Indiana. As bifurcações de Hopf receberam esse nome em homenagem ao tratamento rigoroso que deu a elas em um artigo de 1942.

é um caso particular das equações de Fitzhugh-Nagumo[12], que modelam a transmissão de impulsos neurais ao longo de um axônio. O parâmetro k corresponde ao estímulo externo.

(a) Mostre que o sistema tem um ponto crítico qualquer que seja o valor de k.

(b) Encontre o ponto crítico para $k = 0$ e mostre que é um ponto espiral assintoticamente estável. Repita a análise para $k = 0{,}5$ e mostre que o ponto crítico agora é um ponto espiral instável. Desenhe um retrato de fase para o sistema em cada caso.

(c) Encontre o valor k_0 onde o ponto crítico muda de assintoticamente estável para instável. Encontre o ponto crítico e desenhe um retrato de fase para o sistema para $k = k_0$.

(d) Para $k > k_0$ o sistema apresenta um ciclo-limite assintoticamente estável; o sistema tem uma bifurcação de Hopf em k_0. Desenhe um retrato de fase para $k = 0{,}4$; $0{,}5$ e $0{,}6$; observe que o ciclo-limite não é pequeno quando k está perto de k_0. Faça, também, o gráfico de x em função de t e estime o período T em cada caso.

(e) Quando k aumenta mais, existe um valor k_1 no qual o ponto crítico se torna, novamente, assintoticamente estável e o ciclo-limite desaparece. Encontre k_1.

9.8 Caos e Atratores Estranhos: As Equações de Lorenz

Em princípio, os métodos descritos neste capítulo para sistemas autônomos de segunda ordem também podem ser aplicados para sistemas de ordem maior. Na prática, aparecem diversas dificuldades quando tentamos fazer isso. Um problema é que existe um número maior de casos que podem ocorrer e esse número cresce com a ordem do sistema (e a dimensão do espaço de fase). Outro problema é a dificuldade em se fazer gráficos de trajetórias de maneira precisa em um espaço de fase com dimensão maior do que dois; mesmo em três dimensões, pode não ser fácil construir um gráfico claro e compreensível das trajetórias, e isso torna-se mais difícil quando o número de variáveis aumenta. Finalmente, e isso só se tornou claro nos últimos anos, existem fenômenos diferentes e muito complexos que podem ocorrer, e o fazem com freqüência, em sistemas de terceira ordem ou maior, que não ocorrem em sistemas de segunda ordem. Nosso objetivo, nesta seção, é dar uma breve introdução a alguns desses fenômenos, discutindo um sistema autônomo particular de terceira ordem que tem sido estudado intensamente em anos recentes. Em alguns aspectos, a apresentação aqui é semelhante ao tratamento da equação de diferença logística na Seção 2.9.

Um problema importante em meteorologia e em outras aplicações de dinâmica dos fluidos trata do movimento de uma camada de fluido, como a atmosfera da Terra, que é mais quente embaixo do que em cima; veja a Fig. 9.8.1. Se a diferença de temperatura vertical ΔT é pequena, então existe uma variação linear com a altitude, mas não um movimento significativo da camada de fluido. No entanto, se ΔT é suficientemente grande, então o ar quente sobe, deslocando o ar frio que está sobre ele, o que resulta em um movimento regular que se propaga. Se as diferenças de temperatura aumentam ainda mais, então, finalmente, o fluxo regular em propagação transforma-se em um movimento mais complexo e turbulento.

[12]Richard Fitzhugh (1922-) do Serviço de Saúde Pública dos Estados Unidos e Jin-Ichi Nagumo (1926-1999) da Universidade de Tóquio propuseram, independentemente, uma simplificação do modelo de Hodgkin-Huxley de transmissão neural em torno de 1961.

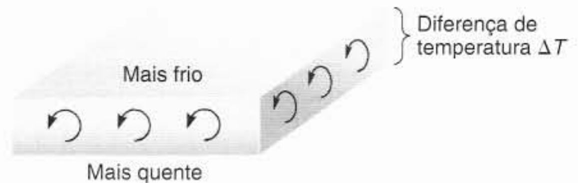


FIG. 9.8.1 Uma camada de fluido aquecida por baixo.

Ao investigar esse fenômeno, Edward N. Lorenz[13] foi levado (por um processo muito complicado para ser descrito aqui) ao sistema não-linear autônomo de terceira ordem

$$\begin{aligned} dx/dt &= \sigma(-x + y), \\ dy/dt &= rx - y - xz, \\ dz/dt &= -bz + xy. \end{aligned} \tag{1}$$

As Eqs. (1) são chamadas, geralmente, de equações de Lorenz.[14] Observe que a segunda e a terceira equações contêm termos não-lineares quadráticos. No entanto, exceto por ser um sistema de terceira ordem, as equações de Lorenz parecem, superficialmente, não mais complicadas do que as equações para duas espécies em competição, ou predador-presa, discutidas nas Seções 9.4 e 9.5. A variável x nas Eqs. (1) está relacionada à intensidade do movimento do fluido, enquanto as variáveis y e z estão relacionadas às variações de temperatura nas direções horizontal e vertical. As equações de Lorenz envolvem, também, três parâmetros σ, r e b, todos reais e positivos. Os parâmetros σ e b dependem do material e das propriedades geométricas da camada de fluido. Para a atmosfera da Terra, valores razoáveis para esses parâmetros são $\sigma = 10$ e $b = 8/3$; atribuiremos esses valores na maior parte do que segue, nesta seção. O parâmetro r, por outro lado, é proporcional à diferença de temperatura ΔT e nosso objetivo é investigar como a natureza das soluções das Eqs. (1) variam com r.

O primeiro passo para se analisar as equações de Lorenz é localizar os pontos críticos, resolvendo o sistema algébrico

$$\begin{aligned} \sigma x - \sigma y &= 0, \\ rx - y - xz &= 0, \\ -bz + xy &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Da primeira equação, temos $y = x$. Então, eliminando y da segunda e terceira equações, obtemos

$$x(r - 1 - z) = 0, \tag{3}$$

$$-bz + x^2 = 0. \tag{4}$$

Um modo de satisfazer a Eq. (3) é escolher $x = 0$. Segue, então, que $y = 0$ e, da Eq. (4), que $z = 0$. Podemos, também, satisfazer a Eq. (3) escolhendo $z = r - 1$. Então, para que a Eq. (4) seja válida, temos que ter $x = \pm\sqrt{b(r-1)}$ e, então, $y = \pm\sqrt{b(r-1)}$ também. Observe que essas expressões para x e y só são reais quando $r \geq 1$. Logo, $(0, 0, 0)$, que denotaremos por P_1, é um ponto crítico

[13]Edward N. Lorenz (1917-), um meteorologista americano, recebeu seu Ph.D. do Instituto de Tecnologia de Massachusetts em 1948 e ficou associado a essa instituição ao longo de sua carreira. As equações de Lorenz foram estudadas por ele, pela primeira vez, em um artigo famoso, publicado em 1963, que tratava da estabilidade de fluxos de fluidos na atmosfera.

[14]O livro de Sparrow, listado nas referências ao final deste capítulo, contém um tratamento bastante completo das equações de Lorenz.

para todos os valores de r e é o único ponto crítico para $r < 1$. No entanto, quando $r > 1$, existem outros pontos críticos, a saber, $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ e $(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$. Vamos denotar esses dois pontos por P_2 e P_3, respectivamente. Note que todos os três pontos críticos coincidem quando $r = 1$. Quando r aumenta, passando por 1, o ponto crítico P_1 na origem *bifurca* e os pontos críticos P_2 e P_3 aparecem.

Vamos determinar, agora, o comportamento local das soluções em uma vizinhança de cada ponto crítico. Embora a maior parte da análise a ser feita funcione para valores arbitrários de σ e b, vamos simplificar nosso trabalho usando os valores $\sigma = 10$ e $b = 8/3$. Perto da origem (do ponto crítico P_1), a aproximação linear é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Os autovalores são determinados da equação

$$\begin{vmatrix} -10-\lambda & 10 & 0 \\ r & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -8/3-\lambda \end{vmatrix} \tag{6}$$

$$= -(8/3+\lambda)[\lambda^2 + 11\lambda - 10(r-1)] = 0.$$

Logo,

$$\lambda_1 = -\frac{8}{3}, \qquad \lambda_2 = \frac{-11-\sqrt{81+40r}}{2}, \qquad \lambda_3 = \frac{-11+\sqrt{81+40r}}{2}. \tag{7}$$

Note que todos os três autovalores são negativos para $r < 1$; por exemplo, quando $r = 1/2$, os autovalores são $\lambda_1 = -8/3$, $\lambda_2 = -10{,}52494$ e $\lambda_3 = -0{,}47506$. Portanto, a origem é assintoticamente estável para r nesse intervalo, tanto para a aproximação linear (5), quanto para o sistema original (1). No entanto, λ_3 muda de sinal quando $r = 1$ e é positivo quando $r > 1$. O valor $r = 1$ corresponde ao início da propagação do fluxo no problema físico descrito anteriormente. A origem é instável para $r > 1$; todas as soluções começando perto da origem tendem a crescer, exceto as que pertencem ao plano determinado pelos autovetores associados a λ_1 e λ_2 [ou, para o sistema não-linear (1), em uma determinada superfície tangente a esse plano na origem].

Vamos considerar, agora, a vizinhança do ponto crítico $P_2(\sqrt{8(r-1)/3}, \sqrt{8(r-1)/3}, r-1)$ para $r > 1$. Se u, v e w são as perturbações do ponto crítico nas direções dos eixos de x, y e z, respectivamente, então o sistema linear aproximado é

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{8(r-1)/3} \\ \sqrt{8(r-1)/3} & \sqrt{8(r-1)/3} & -8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Os autovalores da matriz de coeficientes da Eq. (8) são determinados pela equação

$$3\lambda^3 + 41\lambda^2 + 8(r+10)\lambda + 160(r-1) = 0, \tag{9}$$

que é obtida através de cálculos algébricos diretos, que omitimos aqui. As soluções da Eq. (9) dependem de r da seguinte maneira:

Para $1 < r < r_1 \approx 1{,}3456$, existem três autovalores reais negativos.

Para $r_1 < r < r_2 \approx 24{,}737$, existe um autovalor real negativo e dois autovalores complexos com parte real negativa.

Para $r_2 < r$, existe um autovalor real negativo e dois autovalores complexos com parte real positiva.

Os mesmos resultados são obtidos para o ponto crítico P_3. Logo, existem diversas situações diferentes.

Para $0 < r < 1$, o único ponto crítico é P_1 e ele é assintoticamente estável. Todas as soluções tendem a esse ponto (a origem) quando $t \to \infty$.

Para $1 < r < r_1$, os pontos críticos P_2 e P_3 são assintoticamente estáveis e P_1 é instável. Todas as soluções próximas tendem a um dos pontos P_2 e P_3 exponencialmente.

Para $r_1 < r < r_2$, os pontos críticos P_2 e P_3 são assintoticamente estáveis e P_1 é instável. Todas as soluções próximas tendem a um dos pontos P_2 e P_3; a maior parte delas tem forma de espiral entrando no ponto crítico.

Para $r_2 < r$, todos os três pontos críticos são instáveis. A maior parte das soluções próximas de P_2 ou P_3 tem forma espiral e se afasta do ponto crítico.

No entanto, esse não é o final da história. Vamos considerar soluções para r um pouco maior do que r_2. Nesse caso P_1 tem um autovalor positivo e cada um dos pontos P_2 e P_3 tem autovalor complexo com parte real positiva. Uma trajetória só pode tender a um dos pontos críticos para caminhos altamente restritivos. O menor desvio desses caminhos faz com que a trajetória se afaste do ponto crítico. Como nenhum dos pontos críticos é estável, poderíamos esperar que a maior parte das trajetórias tendesse a infinito para t muito grande. Entretanto, pode-se mostrar que todas as soluções permanecem limitadas quando $t \to \infty$; veja o Problema 5. De fato, pode-se mostrar que todas as soluções acabam tendendo a um certo conjunto-limite de pontos com volume nulo. Aliás, isso não é válido só para $r > r_2$, mas para todos os valores positivos de r.

A Fig. 9.8.2 mostra um gráfico de valores calculados de x em função de t para uma solução típica com $r > r_2$. Note que a solução oscila entre valores positivos e negativos de um modo um tanto errático. De fato, o gráfico de x em função de t parece com uma vibração aleatória, embora as equações de Lorenz sejam inteiramente determinísticas e a solução esteja completamente determinada pelas condições iniciais. De qualquer modo, a solução exibe, também, uma certa *regularidade*, no sentido em que a freqüência e a amplitude permanecem, essencialmente, constantes no tempo.

As soluções das equações de Lorenz são, também, extremamente sensíveis a perturbações nas condições iniciais. A Fig. 9.8.3 mostra os gráficos dos valores calculados de x em função de t para duas soluções com condições iniciais (5, 5, 5) e (5,01; 5; 5). O gráfico pontilhado é o mesmo que o da Fig. 9.8.2, enquanto o gráfico sólido começa em um ponto próximo. As duas soluções permanecem próximas até t chegar perto de 10, quando elas se tornam bem diferentes e, de fato, parecem não ter relação entre si. Foi essa propriedade que atraiu a atenção de Lorenz em seu estudo original dessas equações e fez com que ele concluísse que predições de tempo a longo prazo são, provavelmente, impossíveis.

O conjunto atrator nesse caso, embora de volume nulo, tem uma estrutura bastante complicada e é chamado de **atrator estranho**. O termo **caótico** tem sido usado, em geral, para descrever soluções como as ilustradas nas Figs. 9.8.2 e 9.8.3.

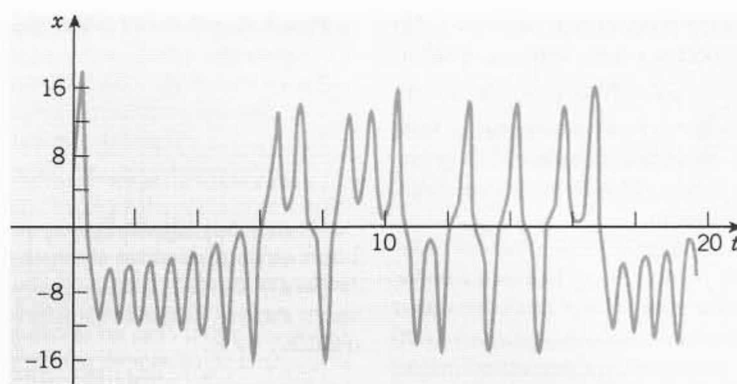


FIG. 9.8.2 Um gráfico de x em função de t para as equações de Lorenz (1) com $r = 28$; o ponto inicial é (5, 5, 5).

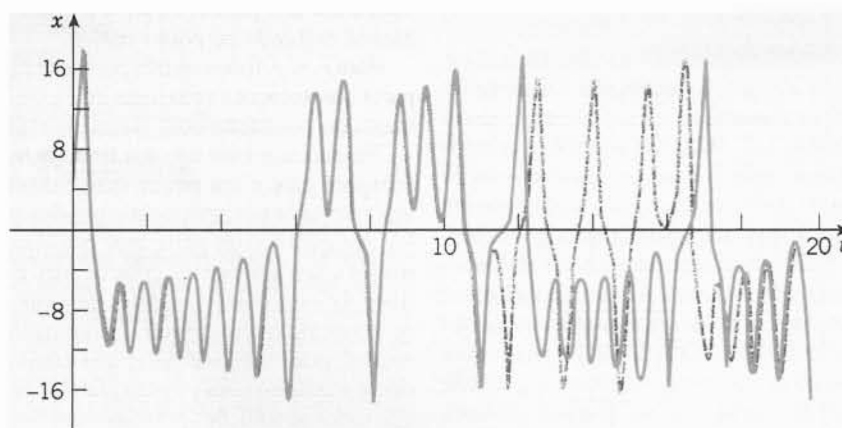


FIG. 9.8.3 Gráficos de x em função de t para duas soluções próximas das equações de Lorenz com $r = 28$; o ponto inicial para a curva pontilhada é (5, 5, 5) e para a curva sólida é (5,01, 5, 5).

Para determinar como e por que o atrator estranho é criado, pode ajudar a investigar soluções para valores menores de r. Para $r = 21$, a Fig. 9.8.4 mostra soluções que começam próximas de três pontos iniciais diferentes. Para o ponto inicial (3, 8, 0), a solução começa a convergir para o ponto P_3 quase que imediatamente; veja a Fig. 9.8.4*a*. Para o segundo ponto inicial (5, 5, 5), existe um intervalo razoavelmente curto de comportamento transiente, depois do qual a solução converge para P_2; veja a Fig. 9.8.4*b*. No entanto, como mostra a Fig. 9.8.4*c*, para o terceiro ponto inicial (5, 5, 10), existe um intervalo muito mais longo de comportamento transiente caótico, antes de a solução acabar convergindo para P_2. Quando r aumenta, a duração do comportamento caótico transiente também aumenta. Quando $r = r_3 \approx 24{,}06$, o comportamento caótico transiente parece durar indefinidamente e aparece o atrator estranho.

Pode-se mostrar, também, as trajetórias das equações de Lorenz no espaço de fase tridimensional ou, pelo menos, projeções delas em diversos planos. As Figs. 9.8.5 e 9.8.6 mostram projeções nos planos xy e xz, respectivamente, da trajetória começando em (5, 5, 5). Observe que os gráficos nessas figuras parecem se cruzar repetidamente, mas isso não pode ser verdade para as trajetórias no espaço tridimensional, devido ao teorema geral de unicidade. Esses cruzamentos aparentes são devidos ao caráter bidimensional das figuras.

A sensibilidade das soluções a perturbações nos dados iniciais tem implicações, também, para cálculos numéricos, como os apresentados aqui. Tamanhos de passos diferentes, algoritmos numéricos diferentes ou mesmo a execução do mesmo algoritmo em máquinas diferentes vão introduzir pequenas diferenças na solução calculada numericamente, o que acaba levando a grandes desvios. Por exemplo, a seqüência exata de laços negativos e positivos na solução calculada numericamente depende fortemente do algoritmo numérico escolhido e de sua implementação, além das condições iniciais. No entanto, a aparência geral da solução e a estrutura do conjunto atrator são independentes de todos esses fatores.

Soluções das equações de Lorenz para outros intervalos do parâmetro exibem outros tipos interessantes de comportamento. Por exemplo, para determinados valores de r maiores do que r_2, o comportamento caótico intermitente separa intervalos longos de oscilação periódica aparentemente regular. Para outros intervalos de r, as soluções mostram a propriedade de dobro de período que vimos na Seção 2.9 para a equação de diferença logística. Algumas dessas características aparecem nos problemas.

Desde 1975, as equações de Lorenz e outros sistemas autônomos de ordem mais alta têm sido estudados intensamente, e essa é uma das áreas mais ativas da pesquisa matemática atual. O comportamento caótico de soluções parece ser muito mais comum do que se suspeitava anteriormente e muitas perguntas permanecem sem resposta. Algumas delas são de natureza matemática, enquanto outras estão relacionadas a aplicações físicas ou interpretação de soluções.

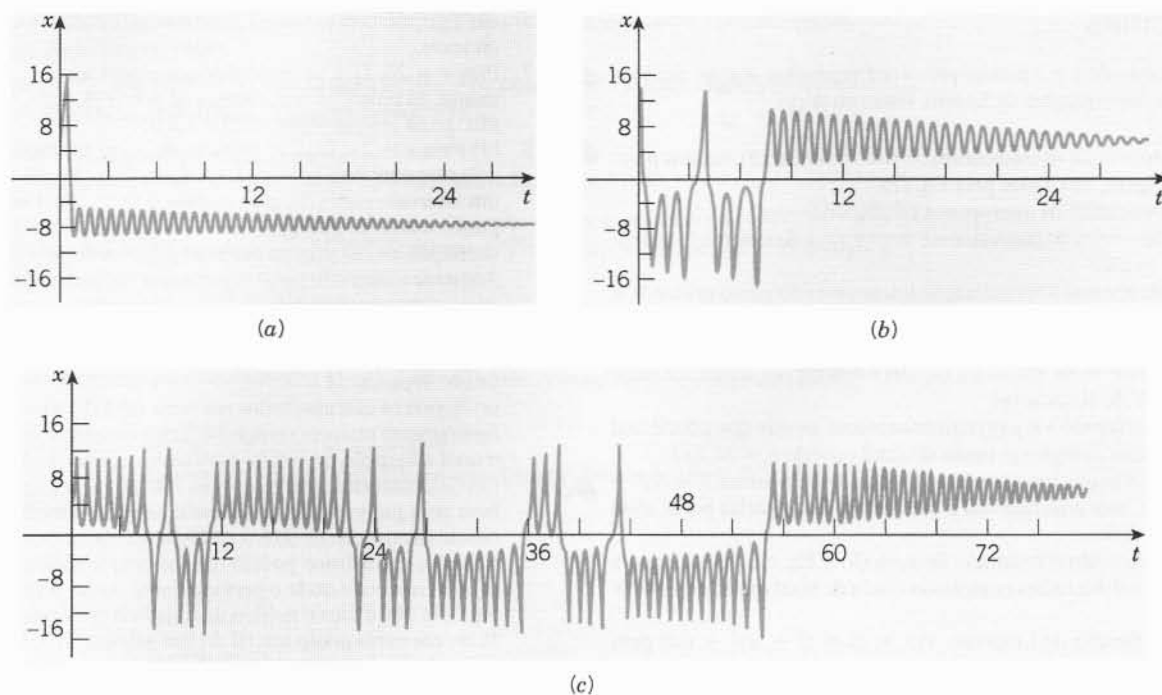


FIG. 9.8.4 Gráficos de x em função de t para três soluções das equações de Lorenz com $r = 21$. (*a*) O ponto inicial é (3, 8, 0). (*b*) O ponto inicial é (5, 5, 5). (*c*) O ponto inicial é (5, 5, 10).

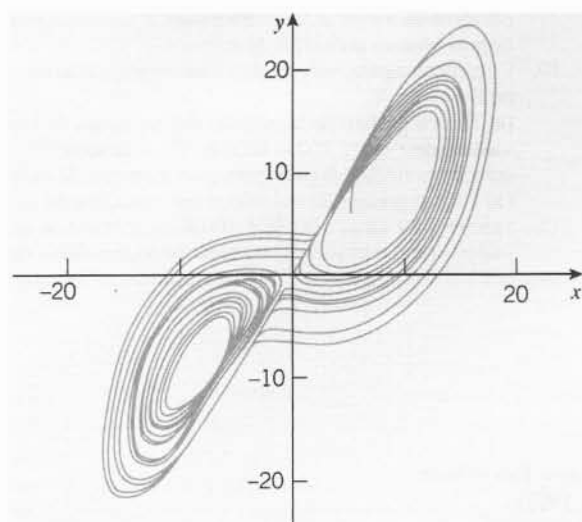


FIG. 9.8.5 Projeções de uma trajetória das equações de Lorenz (com $r = 28$) no plano xy.

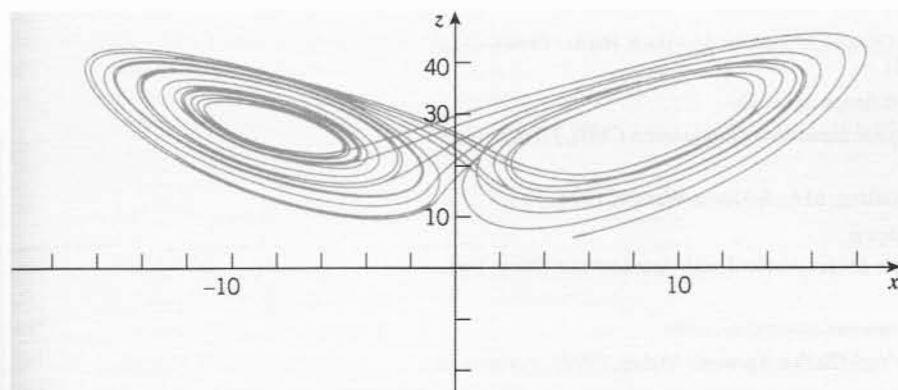


FIG. 9.8.6 Projeções de uma trajetória das equações de Lorenz (com $r = 28$) no plano xz.

Problemas

Os problemas de 1 a 3 pedem para você preencher alguns detalhes da análise das equações de Lorenz feitas no texto.

1. (a) Mostre que os autovalores do sistema linear (5), válidos perto da origem, são dados pela Eq. (7).
(b) Determine os autovetores correspondentes.
(c) Determine os autovalores e autovetores do sistema (5) quando $r = 28$.
2. (a) Mostre que a aproximação linear perto do ponto crítico P_2 é dada pela Eq. (8).
(b) Mostre que os autovalores do sistema (8) satisfazem a Eq. (9).
(c) Para $r = 28$, resolva a Eq. (9) e determine, assim, os autovalores do sistema (8).
3. (a) Resolvendo a Eq. (9) numericamente, mostre que a parte real das raízes complexas muda de sinal quando $r \approx 24{,}737$.
(b) Mostre que um polinômio de grau três da forma $x^3 + Ax^2 + Bx + C$ tem uma raiz real e duas raízes imaginárias puras só se $AB = C$.
(c) Aplicando o resultado do item (b) à Eq. (9), mostre que a parte real das raízes complexas muda de sinal quando $r = 470/19$.
4. Use a função de Liapunov $V(x, y, z) = x^2 + \sigma y^2 + \sigma Z^2$ para mostrar que a origem é um ponto crítico global assintoticamente estável para as equações de Lorenz (1) se $r < 1$.
5. Considere o elipsóide

$$V(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2 = c > 0.$$

(a) Calcule dV/dt ao longo das trajetórias das equações de Lorenz (1).
(b) Determine uma condição suficiente sobre c para que toda trajetória cruzando $V(x, y, z) = c$ esteja orientada para dentro.
(c) Calcule a condição encontrada no item (b) no caso em que $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$.

Nos problemas de 6 a 10, faça as investigações pedidas sobre as equações de Lorenz.

6. Para $r = 28$, faça o gráfico de x em função de t para os casos ilustrados nas Figs. 9.8.2 e 9.8.3. Seus gráficos são iguais aos das figuras? Lembre-se da discussão sobre cálculos numéricos no texto.
7. Para $r = 28$, faça as projeções nos planos xy e xz, respectivamente, da trajetória que começa no ponto (5, 5, 5). Os gráficos são iguais aos das Figs. 9.8.5 e 9.8.6?
8. (a) Para $r = 21$, faça os gráficos de x em função de t para as soluções com pontos iniciais (3, 8, 0), (5, 5, 5) e (5, 5, 10). Use um intervalo para t de, pelo menos, $0 \le t \le 30$. Compare seus gráficos com os da Fig. 9.8.4.
(b) Repita os cálculos da parte (a) para $r = 22$, $r = 23$ e $r = 24$. Aumente o intervalo para t o quanto for necessário para que você possa determinar quando cada solução começa a convergir para um dos pontos críticos. Registre a duração aproximada do estado transiente caótico em cada caso. Descreva como essa quantidade depende de r.
(c) Repita os cálculos feitos nos itens (a) e (b) para valores de r ligeiramente maiores do que 24. Tente estimar o valor de r para o qual a duração do estado transiente caótico tende a infinito.
9. Em determinados intervalos para r, as equações de Lorenz exibem uma propriedade de dobrar o período semelhante ao que ocorre na equação de diferença logística discutida na Seção 2.9. Cálculos cuidadosos podem revelar esse fenômeno.
(a) Um intervalo onde o período dobra inclui o valor $r = 100$. Seja $r = 100$ e faça o gráfico da trajetória que começa em (5, 5, 5) ou em outro ponto inicial de sua escolha. A solução parece ser periódica? De que período?
(b) Repita os cálculos do item (a) para valores ligeiramente menores de r. Quando $r \approx 99{,}98$, você pode ser capaz de observar que o período da solução dobra. Tente observar esse resultado fazendo cálculos para valores próximos de r.
(c) Quando r diminui mais, o período da solução dobra repetidamente. O próximo valor de r para o qual o período dobra é em torno de $r = 99{,}629$. Tente observar isso traçando trajetórias para valores próximos de r.
10. Considere, agora, valores de r ligeiramente maiores do que os no Problema 9.
(a) Faça o gráfico de trajetórias das equações de Lorenz para valores de r entre 100 e 100,78. Você deveria observar uma solução periódica regular para esse intervalo de valores de r.
(b) Faça o gráfico de trajetórias das equações de Lorenz para valores de r entre 100,78 e 100,8. Determine, o melhor que puder, como e quando a trajetória periódica deixa de existir.

REFERÊNCIAS

Existem muitos livros recentes que tratam em maiores detalhes o material deste capítulo. Eles incluem

Drazin, P. G., *Nonlinear Systems* (Cambridge: Cambridge University Press, 1992).

Glendinning, P., *Stability, Instability, and Chaos* (Cambridge: Cambridge University Press, 1994).

Grimshaw, R., *Nonlinear Ordinary Differential Equations* (Oxford: Blackwell Scientific Publications, 1990).

Hubbard, J. H., e West, B. H., *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach, Higher Dimensional Systems* (New York/Berlin: Springer-Verlag, 1995).

Dois livros especialmente importantes do ponto de vista de aplicações são:

Danby, J. M. A., *Computer Applications to Differential Equations* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985).

Strogatz, S. H., *Nonlinear Dynamics and Chaos* (Reading, MA: Addison-Wesley, 1994).

Uma boa referência sobre o segundo método de Liapunov é:

LaSalle, J., and Lefschetz, S., *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications* (New York: Academic Press, 1961).

Entre o grande número de livros mais extensos sobre equações diferenciais, estão:

Arnol'd, V. I., *Ordinary Differential Equations* (New York/Berlin: Springer-Verlag, 1992). Tradução da 3.ª edição russa, por Roger Cooke.

Brauer, F., and Nohel, J., *Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations* (New York: Benjamin, 1969; New York: Dover, 1989).

Guckenheimer, J. C., and Holmes, P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (New York/Berlin: Springer-Verlag, 1983).

Uma referência clássica sobre ecologia é:

Odum, E. P., *Fundamentals of Ecology* (3rd ed.) (Philadelphia: Saunders, 1971).

Dois livros que tratam de ecologia e dinâmica populacional em um nível mais matemático são:

May, R. M., *Stability and Complexity in Model Ecosystems* (Princeton, NJ: Princeton University Press, 1973).

Pielou, E. C., *Mathematical Ecology* (New York: Wiley, 1977).

O artigo original sobre as equações de Lorenz é:

Lorenz, E. N., "Deterministic Nonperiodic Flow," *Journal of the Atmospheric Sciences 20* (1963), pp. 130–141.

Um tratamento bastante detalhado das equações de Lorenz é:

Sparrow, C., *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors* (New York/Berlin: Springer-Verlag, 1982).

CAPÍTULO 10

Equações Diferenciais Parciais e Séries de Fourier

Em muitos problemas físicos importantes, existem duas ou mais variáveis independentes, de modo que o modelo matemático correspondente envolve equações diferenciais parciais, em vez de ordinárias. Este capítulo trata de um método importante para se resolver equações diferenciais parciais, conhecido como método de separação de variáveis. Sua característica essencial é a substituição da equação diferencial parcial por um conjunto de equações diferenciais ordinárias, que têm que ser resolvidas sujeitas a condições iniciais ou de contorno. A primeira seção deste capítulo trata de algumas propriedades básicas de problemas de valores de contorno para equações diferenciais ordinárias. A solução desejada da equação diferencial parcial é expressa, então, como uma soma, uma série infinita, em geral, formada por soluções das equações diferenciais ordinárias. Em muitos casos, acabaremos tendo que lidar com uma série em senos e/ou co-senos, de modo que parte deste capítulo é dedicada a uma discussão de tais séries, conhecidas como séries de Fourier. Após o estudo da base matemática necessária, ilustramos, então, o uso do método de separação de variáveis em diversos problemas ligados à condução de calor, à propagação de ondas e à teoria do potencial.

10.1 Problemas de Valores de Contorno para Fronteiras com Dois Pontos

Até agora, neste livro, tratamos de problemas de valores iniciais que consistem em uma equação diferencial junto com condições iniciais apropriadas em um ponto dado. Um exemplo típico, bastante discutido no Cap. 3, é a equação diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \tag{1}$$

com as condições iniciais

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_0'. \tag{2}$$

Aplicações físicas levam, muitas vezes, a um outro tipo de problema, no qual o valor da variável dependente y ou de sua derivada é especificado em dois pontos *diferentes*. Tais condições são chamadas **condições de contorno**, para distingui-las das condições iniciais que especificam os valores de y e de y' no *mesmo* ponto. Uma equação diferencial e uma condição de contorno apropriada formam um **problema de valores de contorno com dois pontos**. Um exemplo típico é a equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{3}$$

com as condições de contorno

$$y(\alpha) = y_0, \quad y(\beta) = y_1. \tag{4}$$

A ocorrência natural de problemas de contorno envolve, em geral, uma coordenada espacial como variável independente, de modo que usamos x em vez de t nas Eqs. (3) e (4). Para resolver o problema de valores de contorno (3), (4), precisamos encontrar uma função $y = \phi(x)$ que satisfaz a equação diferencial (3) no intervalo $\alpha < x < \beta$ e que tem os valores especificados y_0 e y_1, nos extremos do intervalo. Em geral, procuramos, primeiro, a solução geral da equação diferencial e depois usamos as condições de contorno para determinar os valores das constantes arbitrárias.

Problemas de valores de contorno também podem ser postos para equações não-lineares, mas vamos nos restringir a uma consideração apenas de equações lineares. Uma classificação importante de problemas de contorno lineares é se são homogêneos ou não. Se a função g tem valor nulo para todo x e se os valores y_0 e y_1 também são nulos, então o problema (3), (4) é dito **homogêneo**. Caso contrário, o problema é **não-homogêneo**.

Embora os problemas de valor inicial (1), (2) e de contorno (3), (4) possam parecer, superficialmente, bem semelhantes, suas soluções diferem sob aspectos importantes. Os problemas de valor inicial, sob condições relativamente fracas, têm, certamente, uma única solução. Por outro lado, problemas de contorno sob condições semelhantes podem ter uma única solução, mas podem, também, não ter solução ou, em alguns casos, ter uma infinidade de soluções. Sob esse aspecto, problemas de contorno lineares se assemelham a equações algébricas lineares.

Vamos lembrar alguns fatos (veja a Seção 7.3) sobre o sistema

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{5}$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz dada $n \times n$, $\mathbf{b}$ é um vetor dado $n \times 1$ e $\mathbf{x}$ é um vetor $n \times 1$ a ser determinado. Se $\mathbf{A}$ for invertível, então o sistema (5) tem uma única solução para qualquer $\mathbf{b}$. Se $\mathbf{A}$ for singular, então o sistema (5) não tem solução, a não ser que $\mathbf{b}$ satisfaça uma determinada condição adicional, caso em que o sistema tem uma infinidade de soluções. Vamos considerar, agora, o sistema homogêneo correspondente

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}, \tag{6}$$

obtido do sistema (5) quando $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. O sistema homogêneo (6) sempre tem a solução $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Se $\mathbf{A}$ for invertível, então essa é a única solução, mas, se $\mathbf{A}$ for singular, então existem uma infinidade de soluções (não-nulas). Note que é impossível para o sistema homogêneo não ter solução. Esses resultados podem, também, ser enunciados do seguinte modo: o sistema não-homogêneo (5) tem uma única solução se, e somente se, o sistema homogêneo (6) só tem a solução $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, e o sistema não-homogêneo (5) não tem solução ou tem uma infinidade de soluções se, e somente se, o sistema homogêneo (6) tem soluções não-nulas.

Vamos ver alguns exemplos de problemas de contorno lineares que têm comportamento semelhante. Uma discussão mais geral sobre problemas de contorno lineares aparece no Cap. 11.

Exemplo 1

Resolva o problema de valores de contorno

$$y'' + 2y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0. \tag{7}$$

A solução geral da equação diferencial (7) é

$$y = c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{2}x. \tag{8}$$

Para que a primeira condição de contorno seja satisfeita, é preciso que $c_1 = 1$. A segunda condição de contorno implica que $c_1 \cos\sqrt{2}\pi + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{2}\pi = 0$, de modo que $c_2 = -\cot\sqrt{2}\pi \cong -0{,}2762$. Logo, a solução do problema de valores de contorno (7) é

$$y = \cos\sqrt{2}x - \cot\sqrt{2}\pi \operatorname{sen}\sqrt{2}x. \tag{9}$$

Esse exemplo ilustra o caso de um problema de valores de contorno não-homogêneo com uma única solução.

Exemplo 2

Resolva o problema de valores de contorno

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y(\pi) = a, \tag{10}$$

onde a é um número dado.

A solução geral dessa equação diferencial é

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x \tag{11}$$

e, da primeira condição de contorno, vemos que $c_1 = 1$. A segunda condição de contorno requer, agora, que $-c_1 = a$. Essas duas condições sobre c_1 são incompatíveis se $a \neq -1$, de modo que o problema não tem solução nesse caso. No entanto, se $a = -1$, então ambas as condições de contorno são satisfeitas desde que $c_1 = 1$, independente do valor de c_2. Nesse caso, existe uma infinidade de soluções, todas elas da forma

$$y = \cos x + c_2 \operatorname{sen} x, \tag{12}$$

onde c_2 permanece arbitrário. Esse exemplo ilustra o fato de que um problema de valores de contorno não-homogêneo pode não ter solução e, também, que, sob condições especiais, pode ter uma infinidade de soluções.

Correspondendo ao problema de valores de contorno não-homogêneo (3), (4), existe um problema homogêneo, que consiste na equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{13}$$

e nas condições de contorno

$$y(\alpha) = 0, \quad y(\beta) = 0. \tag{14}$$

Observe que esse problema tem solução $y = 0$ para todo x, independentemente dos coeficientes $p(x)$ e $q(x)$. Essa solução é chamada, muitas vezes, de solução trivial e, raramente, é de interesse. O que queremos saber, em geral, é se o problema tem outras soluções, não-nulas. Considere os dois exemplos a seguir.

Exemplo 3

Resolva o problema de valores de contorno

$$y'' + 2y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \tag{15}$$

A solução geral da equação diferencial é, novamente, dada pela Eq. (8),

$$y = c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{2}x.$$

A primeira condição de contorno requer que $c_1 = 0$, e a segunda nos leva a $c_2 \operatorname{sen}\sqrt{2}\pi = 0$. Como $\operatorname{sen}\sqrt{2}\pi \neq 0$, segue que $c_2 = 0$. Em conseqüência, $y = 0$ para todo x é a única solução do problema (15). Esse exemplo ilustra o fato de que um problema de valores de contorno homogêneo pode ter somente a solução trivial $y = 0$.

Exemplo 4

Resolva o problema de valores de contorno

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \qquad (16)$$

A solução geral é dada pela Eq. (11),

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x,$$

e a primeira condição de contorno requer que $c_1 = 0$. Como sen $\pi = 0$, a segunda condição de contorno é satisfeita independente do valor de c_2. Logo, a solução do problema (16) é $y = c_2$ sen x, onde c_2 permanece arbitrário. Esse exemplo ilustra que um problema de valores de contorno homogêneo pode ter uma infinidade de soluções.

Os exemplos de 1 a 4 ilustram (mas não provam, é claro) que a relação entre problemas de valores de contorno homogêneos e não-homogêneos é a mesma que existe entre sistemas algébricos lineares homogêneos e não-homogêneos. Um problema de valores de contorno não-homogêneo (Exemplo 1) tem uma única solução e o problema homogêneo correspondente (Exemplo 3) só tem a solução trivial. Além disso, um problema não-homogêneo (Exemplo 2) não tem solução ou tem uma infinidade de soluções e o problema homogêneo correspondente (Exemplo 4) tem soluções não-triviais.

Problemas de Autovalores. Lembre que a equação matricial

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \qquad (17)$$

foi discutida na Seção 7.3. A Eq. (17) tem solução $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todo valor de λ, mas, para determinados valores de λ, chamados autovalores, existem, também, soluções não-nulas, chamadas autovetores. A situação é semelhante para problemas de valores de contorno.

Considere o problema que consiste na equação diferencial

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad (18)$$

junto com as condições de contorno

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \qquad (19)$$

Observe que o problema (18), (19) é igual aos problemas nos Exemplos 3 e 4 se $\lambda = 2$ e $\lambda = 1$, respectivamente. Lembrando dos resultados desses exemplos, notamos que, para $\lambda = 2$, as Eqs. (18), (19) têm apenas a solução trivial $y = 0$, enquanto para $\lambda = 1$, o problema (18), (19) tem outras soluções, não-nulas. Estendendo a terminologia associada à Eq. (17), os valores de λ para os quais existem soluções não-triviais do problema (18), (19) são chamados de **autovalores** e as soluções não-triviais são as **autofunções**. Enunciando os resultados dos Exemplos 3 e 4 de outro modo, vimos que $\lambda = 1$ é um autovalor do problema (18), (19) e que $\lambda = 2$ não é. Além disso, qualquer múltiplo não-nulo de sen x é uma autofunção correspondente ao autovalor $\lambda = 1$.

Vamos considerar, agora, o problema de encontrar outros autovalores e autofunções do problema (18), (19). Vamos precisar considerar, separadamente, os casos $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda < 0$, já que a forma da solução da Eq. (18) é diferente em cada um desses casos. Suponha, primeiro, que $\lambda > 0$. Para evitar o aparecimento freqüente de raízes quadradas, é conveniente fazer $\lambda = \mu^2$ e escrever a Eq. (18) como

$$y'' + \mu^2 y = 0. \qquad (20)$$

O polinômio característico para a Eq. (20) é $r^2 + \mu^2 = 0$, com raízes $r = \pm i\mu$, de modo que a solução geral é

$$y = c_1 \cos \mu x + c_2 \operatorname{sen} \mu x. \qquad (21)$$

Note que μ é diferente de zero (já que $\lambda > 0$) e não há perda de generalidade em supor que μ é positivo. A primeira condição de contorno requer que $c_1 = 0$ e, então, a segunda se reduz a

$$c_2 \operatorname{sen} \mu\pi = 0. \qquad (22)$$

Estamos procurando soluções não-triviais, de modo que precisamos que $c_2 \neq 0$. Em conseqüência, sen $\mu\pi$ tem que ser zero e nossa tarefa é escolher μ tal que isso ocorra. Sabemos que a função seno tem valor zero em todos os múltiplos inteiros de π, de modo que podemos escolher μ como sendo qualquer inteiro (positivo). Os valores correspondentes de λ são os quadrados dos inteiros positivos, de modo que encontramos que

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 9, \ldots, \quad \lambda_n = n^2, \ldots \qquad (23)$$

são autovalores do problema (18), (19). As autofunções são dadas pela Eq. (21) com $c_1 = 0$, de modo que são, simplesmente, os múltiplos da função sen nx para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Observe que a constante c_2 na Eq. (21) nunca está determinada, de modo que as autofunções estão determinadas a menos de uma constante multiplicativa arbitrária [como os autovetores do problema matricial (17)]. Vamos escolher, em geral, essa constante multiplicativa como sendo 1 e escrever as autofunções como

$$y_1(x) = \operatorname{sen} x, \; y_2(x) = \operatorname{sen} 2x, \ldots, \; y_n(x) = \operatorname{sen} nx, \ldots, \qquad (24)$$

lembrando que múltiplos dessas funções também são autofunções.

Vamos supor, agora, que $\lambda < 0$. Fazendo $\lambda = -\mu^2$, a Eq. (18) fica

$$y'' - \mu^2 y = 0. \qquad (25)$$

A equação característica para a Eq. (25) é $r^2 - \mu^2 = 0$, com raízes $r = \pm\mu$, de modo que a solução geral pode ser escrita como

$$y = c_1 \cosh \mu x + c_2 \operatorname{senh} \mu x. \qquad (26)$$

Escolhemos as funções hiperbólicas $\cosh(\mu x)$ e $\operatorname{senh}(\mu x)$, em vez de $\exp(\mu x)$ e $\exp(-\mu x)$, como um conjunto fundamental de soluções por conveniência no cálculo das condições de contorno. A primeira condição de contorno requer que $c_1 = 0$ e, então, a segunda nos dá c_2 senh $\mu\pi = 0$. Como $\mu \neq 0$, segue que senh $\mu\pi \neq 0$ e, portanto, $c_2 = 0$. Logo, $y = 0$ e não existem soluções não-triviais quando $\lambda < 0$. Em outras palavras, o problema (18), (19) não tem autovalores negativos.

Finalmente, vamos considerar o caso $\lambda = 0$. Então, a Eq. (18) fica

$$y'' = 0, \qquad (27)$$

e sua solução geral é

$$y = c_1 x + c_2. \qquad (28)$$

As condições de contorno (19) só podem ser satisfeitas se $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$, logo só existe a solução trivial $y = 0$ também nesse caso, isto é, $\lambda = 0$ não é um autovalor.

Resumindo nossos resultados: mostramos que o problema (18), (19) tem uma seqüência infinita de autovalores positivos $\lambda_n = n^2$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e que as autofunções correspondentes são proporcionais a sen nx. Além disso, não existem outros autovalores reais. Resta a possibilidade de autovalores complexos; lembre-se de que uma matriz com coeficientes reais pode muito bem ter autovalores complexos. No Problema (23), esboçamos um argumento que mostra que o problema particular (18), (19) não pode ter autovalores complexos. Mais adiante, na Seção 11.2, discutiremos uma classe importante de problemas de valores de contorno que inclui (18), (19). Uma das propriedades úteis dessa classe é que todos os autovalores são reais.

Em seções mais adiante neste capítulo, vamos encontrar, muitas vezes, o problema

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(L) = 0, \tag{29}$$

cuja única diferença do problema (18), (19) é que a segunda condição de contorno é imposta em um ponto arbitrário $x = L$, em vez de $x = \pi$. O processo de solução para $\lambda > 0$ é exatamente o mesmo que antes até o passo onde se aplica a segunda condição de contorno. Para o problema (29), essa condição requer que

$$c_2 \operatorname{sen} \mu L = 0 \tag{30}$$

em vez da Eq. (22), como no caso anterior. Logo, μL tem que ser um múltiplo inteiro de π, de modo que $\mu = n\pi/L$, onde n é um inteiro positivo. Portanto, os autovalores e autovetores do problema (29) são dados por

$$\lambda_n = n^2\pi^2/L^2, \; y_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/L), \; n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{31}$$

Como de hábito, as autofunções $y_n(x)$ estão determinadas a menos de uma constante multiplicativa. Do mesmo modo que para o problema (18), (19), você pode mostrar que o problema (29) não tem autovalores ou autofunções fora os da Eq. (31).

Os problemas desta seção exploram, de algum modo, o efeito de condições de contorno diferentes sobre autovalores e autofunções. Uma discussão mais sistemática de problema de valores de contorno com dois pontos aparece no Cap. 11.

Problemas

Nos problemas de 1 a 13, resolva o problema de valores de contorno dado ou mostre que não tem solução.

1. $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 1$
2. $y'' + 2y = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y'(\pi) = 0$
3. $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$
4. $y'' + y = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(L) = 0$
5. $y'' + y = x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
6. $y'' + 2y = x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
7. $y'' + 4y = \cos x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
8. $y'' + 4y = \operatorname{sen} x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
9. $y'' + 4y = \cos x, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$
10. $y'' + 3y = \cos x, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$
11. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, y(1) = -1, y(2) = 1$
12. $x^2y'' + 3xy' + y = x^2, y(1) = 0, y(e) = 0$
13. $x^2y'' + 5xy' + (4 + \pi^2)y = \ln x, y(1) = 0, y(e) = 0$

Nos problemas de 14 a 20, encontre os autovalores e autofunções do problema de valores de contorno dado. Suponha que todos os autovalores são reais.

14. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$
15. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
16. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$
17. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(L) = 0$
18. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0$
19. $y'' - \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0$
20. $x^2y'' - xy' + \lambda y = 0, y(1) = 0, y(L) = 0, L > 1$
21. O fluxo laminar axialmente simétrico de um fluido incompressível viscoso ao longo de um cano com seção reta circular sob um gradiente de pressão axial constante é conhecido como fluxo de Poiseuille[1]. A velocidade axial w é uma função só da variável radial r e satisfaz o problema de valores de contorno

$$w'' + \frac{1}{r}w' = -\frac{G}{\mu}, \; w(R) = 0, \; w(r)$$

limitado para $0 < r < R$, onde R é o raio da seção reta do cano, G é o gradiente de pressão e μ é o coeficiente de viscosidade do fluido.
(a) Encontre a velocidade axial $w(r)$.
(b) Integrando $w(r)$ sobre uma seção reta, mostre que a taxa de fluxo total Q é dada por

$$Q = \pi R^4 G/8\mu.$$

Como Q, R e G podem ser medidos, esse resultado fornece um modo prático de determinar a viscosidade μ.
(c) Suponha que R é reduzido a $^3/_4$ de seu valor original. Qual a redução correspondente para Q? Esse resultado tem implicações para o fluxo de sangue através de artérias reduzidas pela presença de placas.
22. Considere uma viga horizontal de metal com comprimento L sujeita a uma carga vertical $f(x)$ por unidade de comprimento. O deslocamento vertical resultante da viga $y(x)$ satisfaz a equação diferencial

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = f(x),$$

onde E é o módulo de Young e I é o momento de inércia da seção reta em torno de um eixo perpendicular ao plano xy contendo o centróide. Suponha que $f(x)/EI$ é uma constante k. Para cada uma das condições de contorno dadas a seguir, resolva para o deslocamento $y(x)$ e faça o gráfico de y em função de x no caso em que $L = 1$ e $k = -1$.
(a) Apoiada nas duas extremidades: $y(0) = y''(0) = y(L) = y''(L) = 0$.
(b) Presa nas duas extremidades: $y(0) = y'(0) = y(L) = y'(L) = 0$.
(c) Presa em $x = 0$, livre em $x = L$: $y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0$.
23. Vamos esboçar, neste problema, uma demonstração de que os autovalores do problema de valores de contorno (18), (19) são reais.
(a) Escreva a solução da Eq. (18) como $y = k_1\exp(i\mu x) + k_2\exp(-i\mu x)$, onde $\lambda = \mu^2$, e imponha as condições de contorno (19). Mostre que existem soluções não-triviais se, e somente se,

$$\exp(i\mu\pi) - \exp(-i\mu\pi) = 0. \tag{i}$$

(b) Seja $\mu = \nu + i\sigma$ e use a relação de Euler $\exp(i\nu\pi) = \cos(\nu\pi) + i\operatorname{sen}(\nu\pi)$ para determinar as partes real e imaginária da Eq. (i).
(c) Considerando as equações encontradas no item (b), mostre que ν é inteiro e que $\sigma = 0$. Em conseqüência, μ é real e λ também.

[1]Jean Louis Marie Poiseuille (1797-1869) foi um médico francês que também estudou matemática e física. Ele se interessava particularmente pelo fluxo de sangue e publicou seu primeiro artigo sobre o assunto em 1840.

10.2 Séries de Fourier

Mais adiante, ainda neste capítulo, você vai descobrir como resolver muitos problemas importantes envolvendo equações diferenciais parciais, desde que possa expressar uma função dada como uma série infinita de senos e/ou co-senos. Nesta e nas duas próximas seções, vamos explicar em detalhe como isso pode ser feito. Essas séries trigonométricas são chamadas **séries de Fourier**;[2] elas são análogas às séries de Taylor no sentido de que ambos os tipos de séries fornecem um modo de se expressar funções bastante complicadas em termos de certas funções elementares familiares.

Vamos começar com uma série da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi x}{L} + b_m \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\right). \qquad (1)$$

No conjunto de pontos onde a série (1) converge, ela define uma função f, cujos valores em cada ponto x é a soma da série para aquele valor de x. Nesse caso, dizemos que a série (1) é a série de Fourier de f. Nossos objetivos imediatos são determinar que funções podem ser representadas como uma soma de uma série de Fourier e encontrar maneiras de calcular os coeficientes na série correspondente a uma função dada. O primeiro termo na série (1) é escrito como $a_0/2$, em vez de simplesmente a_0, para simplificar uma fórmula para os coeficientes que deduziremos mais adiante. Além de sua associação ao método de separação de variáveis e às equações diferenciais parciais, as séries de Fourier são, também, úteis de muitas outras maneiras, como na análise de sistemas mecânicos ou elétricos sob a ação de forças externas periódicas.

Periodicidade das Funções Seno e Co-seno. Para discutir as séries de Fourier, é necessário desenvolver certas propriedades das funções trigonométricas $\operatorname{sen}(m\pi x/L)$ e $\cos(m\pi x/L)$, onde m é um inteiro positivo. A primeira propriedade é seu caráter periódico. Uma função f é dita **periódica** com período $T > 0$ se o domínio de f contém $x + T$ sempre que contiver x e se

$$f(x+T) = f(x) \qquad (2)$$

para todo valor de x. A Fig. 10.2.1 mostra um exemplo de uma função periódica. Segue imediatamente da definição que, se T é um período de f, então $2T$ também o é como, de fato, qualquer múltiplo inteiro de T. O menor valor de T para o qual a Eq. (2) é válida é chamado **período fundamental** de f. Uma função constante é periódica com período arbitrário, mas não tem período fundamental.

Se f e g são duas funções periódicas com período comum T, então seu produto fg e qualquer combinação linear $c_1f + c_2g$ também são periódicas com período T. Para provar essa

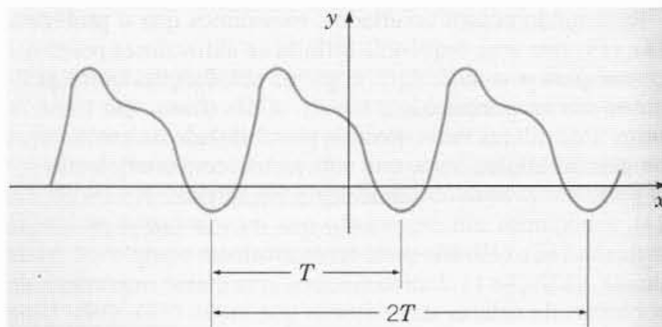


FIG. 10.2.1 Uma função periódica.

última afirmação, seja $F(x) = c_1f(x) + c_2g(x)$; então, para qualquer x,

$$F(x+T) = c_1 f(x+T) + c_2 g(x+T) = c_1 f(x) + c_2 g(x) = F(x). \qquad (3)$$

Além disso, pode-se mostrar que a soma de qualquer número finito, ou até a soma de uma série infinita convergente, de funções de período T também é periódica com período T.

Em particular, as funções $\operatorname{sen}(m\pi x/L)$ e $\cos(m\pi x/L)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, são periódicas com período fundamental $T = 2L/m$. Para ver isso, lembre-se de que sen x e cos x têm período fundamental 2π e que sen αx e cos αx têm período fundamental $2\pi/\alpha$. Escolhendo $\alpha = m\pi/L$, vemos que o período T de $\operatorname{sen}(m\pi x/L)$ e de $\cos(m\pi x/L)$ é dado por $T = 2\pi L/m\pi = 2L/m$.

Além disso, como todo múltiplo inteiro de um período também é um período, cada uma das funções $\operatorname{sen}(m\pi x/L)$ e $\cos(m\pi x/L)$ tem o período comum $2L$.

Ortogonalidade das Funções Seno e Co-seno. Para descrever uma segunda propriedade essencial das funções $\operatorname{sen}(m\pi x/L)$ e $\cos(m\pi x/L)$, vamos generalizar o conceito de ortogonalidade de vetores (veja a Seção 7.2). O **produto interno** padrão (u, v) de duas funções reais u e v no intervalo $\alpha \le x \le \beta$ é definido por

$$(u, v) = \int_\alpha^\beta u(x)v(x)\,dx. \qquad (4)$$

As funções u e v são ditas **ortogonais** em $\alpha \le x \le \beta$ se seu produto interno é nulo, isto é, se

$$\int_\alpha^\beta u(x)v(x)\,dx = 0. \qquad (5)$$

Um conjunto de funções é dito um **conjunto ortogonal** se cada par de funções diferentes pertencentes ao conjunto é ortogonal.

As funções $\operatorname{sen}(m\pi x/L)$ e $\cos(m\pi x/L)$, $m = 1, 2, \ldots$, formam um conjunto ortogonal de funções no intervalo $-L \le x \le L$. De fato, elas satisfazem as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0, & m \ne n, \\ L, & m = n; \end{cases} \qquad (6)$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0, \quad \text{para todo } m, n; \qquad (7)$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0, & m \ne n, \\ L, & m = n. \end{cases} \qquad (8)$$

[2]O nome séries de Fourier é em homenagem a Joseph Fourier, o primeiro a fazer uso sistemático dessas séries, embora em uma investigação não completamente rigorosa, em seus artigos de 1807 e 1811 sobre a condução de calor. De acordo com Riemann, quando Fourier apresentou seu primeiro artigo na Academia de Paris em 1807, dizendo que uma função arbitrária podia ser expressa como uma série da forma (1), o matemático Lagrange ficou tão surpreso que negou, categoricamente, que isso fosse possível. Embora a afirmação de Fourier seja forte demais, seus resultados inspiraram um fluxo de pesquisa importante que continua até hoje. Veja os livros de Grattan-Guinness ou de Carslaw [Introdução Histórica] para uma história detalhada das séries de Fourier.

Esses resultados podem ser obtidos por integração direta. Por exemplo, para deduzir a Eq. (8), note que

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\cos\frac{(m-n)\pi x}{L} - \cos\frac{(m+n)\pi x}{L}\right]dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{L}{\pi}\left\{\frac{\operatorname{sen}[(m-n)\pi x/L]}{m-n} - \frac{\operatorname{sen}[(m+n)\pi x/L]}{m+n}\right\}\Bigg|_{-L}^{L} \\ &= 0,\end{aligned}$$

desde que $m+n$ e $m-n$ sejam diferentes de zero. Como m e n são positivos, $m+n \neq 0$. Por outro lado, se $m-n=0$, então $m=n$ e a integral tem que ser calculada de outra maneira. Nesse caso,

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx &= \int_{-L}^{L}\left(\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[1-\cos\frac{2m\pi x}{L}\right]dx \\ &= \frac{1}{2}\left\{x - \frac{\operatorname{sen}(2m\pi x/L)}{2m\pi/L}\right\}\Bigg|_{-L}^{L} \\ &= L.\end{aligned}$$

Isso prova a Eq. (8); as Eqs. (6) e (7) podem ser verificadas por cálculos análogos.

As Fórmulas de Euler-Fourier. Vamos supor, agora, que uma série da forma (1) converge e vamos chamar essa soma de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m\cos\frac{m\pi x}{L} + b_m\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\right). \quad (9)$$

Como conseqüência das condições de ortogonalidade (6), (7) e (8), podemos encontrar a relação entre os coeficientes a_m, b_m e $f(x)$. Primeiro, multiplique a Eq. (9) por $\cos(n\pi x/L)$, onde n é um inteiro positivo ($n > 0$) *fixo*, e integre em relação a x de $-L$ a L. Supondo que a série pode ser integrada termo a termo,[3] obtemos

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} a_m\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx. \quad (10)\end{aligned}$$

Mantendo em mente que n está fixo enquanto m varia sobre todos os inteiros positivos, segue das relações de ortogonalidade (6) e (7) que o único termo não-nulo à direita do sinal de igualdade na Eq. (10) é o termo onde $m = n$ no primeiro somatório. Logo,

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = La_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \quad (11)$$

Para determinar a_0, podemos integrar a Eq. (9) de $-L$ a L, obtendo

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx &= \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\,dx = La_0, \quad (12)\end{aligned}$$

já que cada integral envolvendo uma função trigonométrica é zero. Assim,

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \quad (13)$$

Escrevendo o termo constante na Eq. (9) como $a_0/2$, é possível calcular todos os a_n da Eq. (13). Caso contrário, teríamos que usar uma fórmula separada para a_0.

Uma expressão semelhante para b_n pode ser obtida multiplicando-se a Eq. (9) por $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$, integrando termo a termo de $-L$ a L e usando as relações de ortogonalidade (7) e (8); assim,

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \quad (14)$$

As Eqs. (13) e (14) são conhecidas como as fórmulas de Euler-Fourier para os coeficientes de uma série de Fourier. Portanto, se a série (9) converge para $f(x)$ e se a série pode ser integrada termo a termo, então os coeficientes *têm que ser dados* pelas Eqs. (13) e (14).

Note que as Eqs. (13) e (14) são fórmulas explícitas para a_n e b_n em função de f e que a determinação de qualquer coeficiente particular é independente de qualquer outro coeficiente. É claro que a dificuldade em calcular as integrais nas Eqs. (13) e (14) depende muito da função particular f.

Observe, também, que as fórmulas (13) e (14) dependem apenas dos valores de $f(x)$ no intervalo $-L \le x \le L$. Como cada um dos termos na série de Fourier (9) é periódico com período $2L$, a série converge para todo x sempre que convergir em $-L \le x \le L$ e sua soma também é uma função periódica de período $2L$. Logo, $f(x)$ é determinada para todo x por seus valores no intervalo $-L \le x \le L$.

É possível mostrar (veja o Problema 27) que, se g é periódica com período T, então todas as integrais de g em um intervalo de comprimento T têm o mesmo valor. Aplicando esse resultado às fórmulas de Euler-Fourier (13) e (14), segue que o intervalo de integração, $-L \le x \le L$, pode ser substituído, caso seja mais conveniente, por qualquer intervalo de comprimento $2L$.

[3]Essa é uma hipótese não-trivial, já que nem todas as séries convergentes com termos variáveis podem ser integradas desse modo. Para o caso especial de séries de Fourier, no entanto, a integração termo a termo sempre pode ser justificada.

Exemplo 1

Suponha que existe uma série de Fourier convergindo para a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \le x < 0, \\ x, & 0 \le x < 2; \end{cases} \quad (15)$$

$$f(x+4) = f(x).$$

Determine os coeficientes dessa série de Fourier.

Essa função representa uma onda triangular (veja a Fig. 10.2.2) e é periódica com período 4. Então, nesse caso, $L = 2$ e a série de Fourier tem a forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{2} + b_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{2} \right), \quad (16)$$

onde os coeficientes são calculados pelas Eqs. (13) e (14) com $L = 2$. Substituindo $f(x)$ na Eq. (13) com $m = 0$, temos

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^{0} (-x)\, dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{2} x\, dx = 1 + 1 = 2. \quad (17)$$

Para $m > 0$, a Eq. (13) nos dá

$$a_m = \frac{1}{2} \int_{-2}^{0} (-x) \cos \frac{m\pi x}{2}\, dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{2} x \cos \frac{m\pi x}{2}\, dx.$$

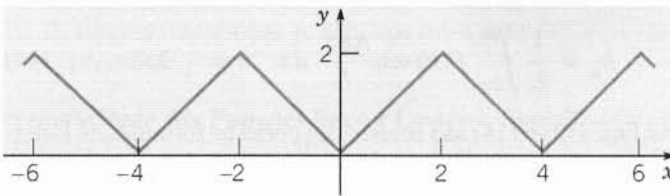


FIG. 10.2.2 Onda triangular.

Essas integrais podem ser calculadas integrando-se por partes, com o resultado que

$$a_m = \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{m\pi} x \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{2} - \left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 \cos \frac{m\pi x}{2} \right] \Bigg|_{-2}^{0}$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{2}{m\pi} x \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{2} + \left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 \cos \frac{m\pi x}{2} \right] \Bigg|_{0}^{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 + \left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 \cos m\pi + \left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 \cos m\pi - \left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{4}{(m\pi)^2} (\cos m\pi - 1), \qquad m = 1, 2, \ldots$$

$$= \begin{cases} -8/(m\pi)^2 & m \text{ ímpar}, \\ 0, & m \text{ par}. \end{cases} \quad (18)$$

Finalmente, segue, de maneira análoga, da Eq. (14) que

$$b_m = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots. \quad (19)$$

Substituindo os coeficientes encontrados nas Eqs. (17), (18) e (19) na série (16), obtemos a série de Fourier de f:

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{2} + \cdots \right)$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\cos(m\pi x/2)}{m^2}$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2}. \quad (20)$$

Exemplo 2

Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x < -1, \\ 1, & -1 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 3 \end{cases} \quad (21)$$

e suponha que $f(x + 6) = f(x)$; veja a Fig. 10.2.3. Encontre os coeficientes da série de Fourier de f.

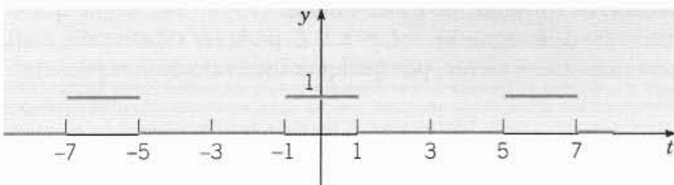


FIG. 10.2.3 Gráfico de $f(x)$ no Exemplo 2.

Como f tem período 6, segue que $L = 3$ neste problema. Logo, a série de Fourier de f tem a forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{3} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3} \right), \quad (22)$$

onde os coeficientes a_n e b_n são dados pelas Eqs. (13) e (14) com $L = 3$. Temos

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_{-3}^{3} f(x)\, dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} dx = \frac{2}{3}. \quad (23)$$

Analogamente,

$$a_n = \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} \cos \frac{n\pi x}{3}\, dx = \frac{1}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{3} \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3},$$

$$n = 1, 2, \ldots, \quad (24)$$

e

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}\,dx = -\frac{1}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{3}\bigg|_{-1}^{1} = 0,$$

$$n = 1, 2, \ldots. \tag{25}$$

Logo, a série de Fourier de f é

$$f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}\cos\frac{n\pi x}{3}$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\left[\cos(\pi x/3) + \frac{\cos(2\pi x/3)}{2} - \frac{\cos(4\pi x/3)}{4} - \frac{\cos(5\pi x/3)}{5} + \cdots\right]. \tag{26}$$

Exemplo 3

Considere, novamente, a função no Exemplo 1 e sua série de Fourier (20). Investigue a velocidade de convergência da série. Em particular, determine quantos termos são necessários para que o erro não seja maior do que 0,01 para todo x.

A m-ésima soma parcial nessa série,

$$s_m(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{m} \frac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2}, \tag{27}$$

pode ser usada para aproximar a função f. Os coeficientes diminuem como $(2n-1)^{-2}$, de modo que a série converge razoavelmente rápido. Isso é confirmado pela Fig. 10.2.4, onde aparece o gráfico para as somas com $m = 1$ e $m = 2$. Para investigar a convergência em maiores detalhes, vamos considerar o erro $e_m(x) - f(x) - s_m(x)$. A Fig. 10.2.5 mostra o gráfico de $|e_6(x)|$ em função de x para $0 \leq x \leq 2$. Observe que $|e_6(x)|$ é maior nos pontos $x = 0$ e $x = 2$, onde o gráfico de $f(x)$ tem bicos. É mais difícil para a série aproximar a função perto desses pontos, resultando em um erro maior aí para um dado n. Gráficos semelhantes podem ser obtidos para outros valores de m.

Uma vez compreendendo que o erro máximo sempre ocorre em $x = 0$ ou $x = 2$, você pode obter uma cota *uniforme* para

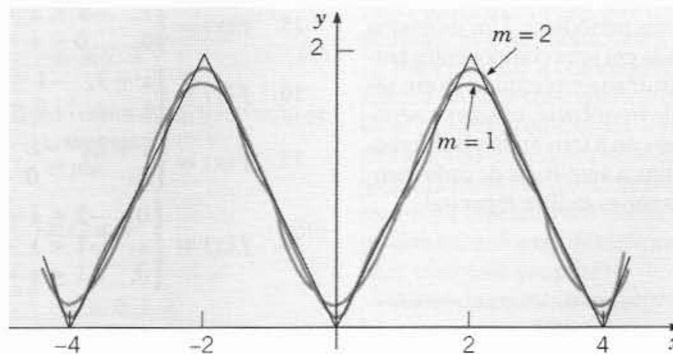


FIG. 10.2.4 Somas parciais da série de Fourier, Eq. (20), para a onda triangular.

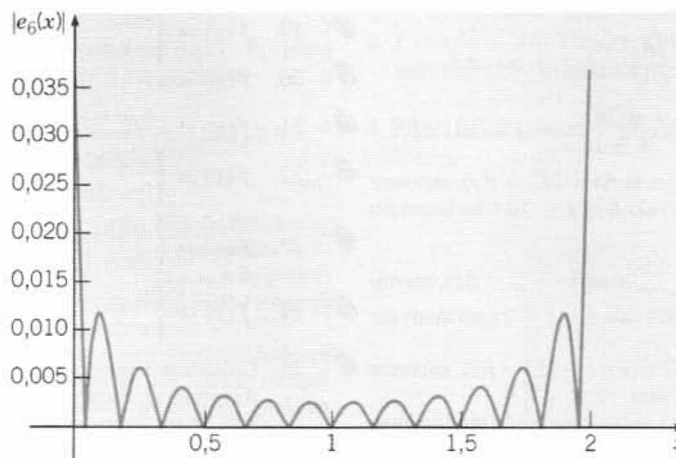


FIG. 10.2.5 Gráfico de $|e_6(x)|$ em função de x para a onda triangular.

o erro para cada m calculando, simplesmente, $|e_m(x)|$ em um desses pontos. Por exemplo, para $m = 6$, temos $e_6(2) = 0{,}03370$, de modo que $|e_6(x)| < 0{,}034$ para $0 \leq x \leq 2$ e, em conseqüência, para todo x. A Tabela 10.2.1 mostra dados correspondentes a outros valores de m; esses dados estão colocados em um gráfico na Fig. 10.2.6. Dessa informação, você pode começar a estimar o número de termos da série que são necessários para se obter um nível de precisão dado na aproximação. Por exemplo, para garantir que $|e_m(x)| \leq 0{,}01$, precisamos escolher $m = 21$.

TABELA 10.2.1 Valores do Erro $e_m(2)$ para a Onda Triangular

m	$e_m(2)$
2	0,09937
4	0,05040
6	0,03370
10	0,02025
15	0,01350
20	0,01013
25	0,00810

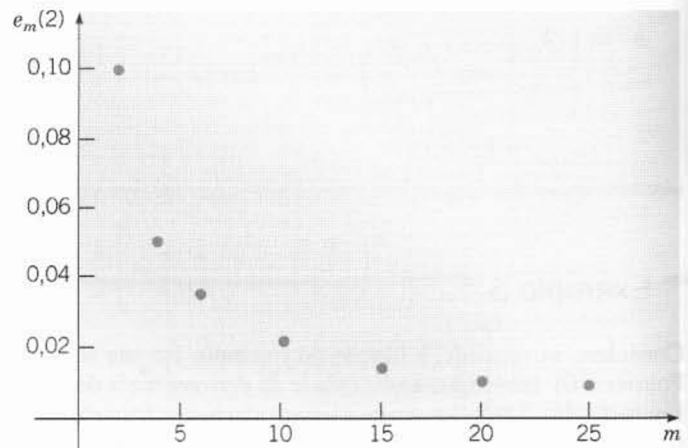


FIG. 10.2.6 Gráfico de $e_m(2)$ em função de m para a onda triangular.

Neste livro, as séries de Fourier aparecem principalmente como um meio de resolver determinados problemas em equações diferenciais parciais. No entanto, tais séries têm uma aplicação muito mais ampla em ciência e engenharia, e, em geral, são ferramentas valiosas na investigação de fenômenos periódicos. Um problema básico é decompor um sinal de entrada em seus componentes harmônicos, o que corresponde a construir sua representação em série de Fourier. Em algumas bandas de freqüência, os termos separados correspondem a cores diferentes ou a tons audíveis diferentes. O módulo do coeficiente determina a amplitude de cada componente. Esse processo é conhecido como análise espectral.

Problemas

Nos problemas de 1 a 8, determine se a função dada é periódica. Se for, encontre seu período fundamental.

1. $\operatorname{sen} 5x$
2. $\cos 2\pi x$
3. $\operatorname{senh} 2x$
4. $\operatorname{sen} \pi x/L$
5. $\operatorname{tg} \pi x$
6. x^2
7. $f(x) = \begin{cases} 0, & 2n-1 \leq x < 2n, \\ 1, & 2n \leq x < 2n+1; \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
8. $f(x) = \begin{cases} (-1)^n, & 2n-1 \leq x < 2n, \\ 1, & 2n \leq x < 2n+1; \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
9. Se $f(x) = -x$ para $-L < x < L$ e se $f(x + 2L) = f(x)$, encontre uma fórmula para $f(x)$ no intervalo $L < x < 2L$ e no intervalo $-3L < x < -2L$.
10. Se $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 < x < 1, \end{cases}$ e se $f(x + 2) = f(x)$, encontre uma fórmula para $f(x)$ no intervalo $1 < x < 2$ e no intervalo $8 < x < 9$.
11. Se $f(x) = L - x$ para $0 < x < 2L$ e se $f(x + 2L) = f(x)$, encontre uma fórmula para $f(x)$ no intervalo $-L < x < 0$.
12. Verifique as Eqs. (6) e (7) desta seção integrando diretamente.

Nos problemas de 13 a 18:
(a) Esboce o gráfico da função dada por três períodos.
(b) Encontre a série de Fourier da função dada.

13. $f(x) = -x, \quad -L \leq x < L; \quad f(x + 2L) = f(x)$
14. $f(x) = \begin{cases} 1, & -L \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < L; \end{cases} \quad f(x + 2L) = f(x)$
15. $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < \pi; \end{cases} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$
16. $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0, \\ 1-x, & 0 \leq x < 1; \end{cases} \quad f(x + 2) = f(x)$
17. $f(x) = \begin{cases} x+L, & -L \leq x \leq 0, \\ L, & 0 < x < L; \end{cases} \quad f(x + 2L) = f(x)$
18. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x \leq -1, \\ x, & -1 < x < 1, \\ 0, & 1 \leq x < 2; \end{cases} \quad f(x + 4) = f(x)$

Nos problemas de 19 a 24:
(a) Esboce o gráfico da função dada por três períodos.
(b) Encontre a série de Fourier da função dada.
(c) Faça o gráfico de $s_m(x)$ em função de x para $m = 5$, 10 e 20.
(d) Descreva como a série de Fourier parece estar convergindo.

19. $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < 2; \end{cases} \quad f(x + 4) = f(x)$
20. $f(x) = x, \quad -1 \leq x < 1; \quad f(x + 2) = f(x)$
21. $f(x) = x^2/2, \quad -2 \leq x \leq 2; \quad f(x + 4) = f(x)$
22. $f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \leq x < 0, \\ 2-2x, & 0 \leq x < 2; \end{cases} \quad f(x + 4) = f(x)$
23. $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x, & -2 \leq x < 0, \\ 2x - \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x < 2; \end{cases} \quad f(x + 4) = f(x)$
24. $f(x) = \begin{cases} 0, & -3 \leq x \leq 0, \\ x^2(3-x), & 0 < x < 3; \end{cases} \quad f(x + 6) = f(x)$
25. Considere a função f definida no Problema 21 e seja $e_m(x) = f(x) - s_m(x)$. Faça o gráfico de $|e_m(x)|$ em função de x para $0 \leq x \leq 2$ para diversos valores de m. Encontre o menor valor de m para o qual $|e_m(x)| \leq 0{,}01$ para todo x.
26. Considere a função f definida no Problema 24 e seja $e_m(x) = f(x) - s_m(x)$. Faça o gráfico de $|e_m(x)|$ em função de x para $0 \leq x \leq 3$

para diversos valores de m. Encontre o menor valor de m para o qual $|e_m(x)| \leq 0{,}1$ para todo x.

27. Suponha que g é uma função integrável e periódica com período T.
(a) Se $0 \leq a \leq T$, mostre que
$$\int_0^T g(x)\,dx = \int_a^{a+T} g(x)\,dx.$$
Sugestão: Mostre, primeiro, que $\int_0^a g(x)\,dx = \int_T^{a+T} g(x)\,dx$. Considere a mudança de variável $s = x - T$ na segunda integral.
(b) Mostre que, para qualquer valor de a, não necessariamente $0 \leq a \leq T$,
$$\int_0^T g(x)\,dx = \int_a^{a+T} g(x)\,dx.$$
(c) Mostre que, para quaisquer valores de a e b,
$$\int_a^{a+T} g(x)\,dx = \int_b^{b+T} g(x)\,dx.$$

28. Se f é diferenciável e periódica com período T, mostre que f' também é periódica com período T. Determine se
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$
é sempre periódica.

29. Neste problema, indicamos algumas semelhanças entre vetores geométricos tridimensionais e séries de Fourier.
(a) Sejam $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ três vetores ortogonais dois a dois em três dimensões, e seja $\mathbf{u}$ qualquer vetor tridimensional. Mostre que
$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3, \qquad \text{(i)}$$
onde
$$a_i = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i}, \qquad i = 1, 2, 3. \qquad \text{(ii)}$$
Mostre que a_i pode ser interpretado como sendo a projeção de $\mathbf{u}$ na direção de $\mathbf{v}_i$ dividida pelo comprimento de $\mathbf{v}_i$.
(b) Defina o produto interno (u, v) por
$$(u, v) = \int_{-L}^{L} u(x)v(x)\,dx. \qquad \text{(iii)}$$
Sejam
$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \cos(n\pi x/L), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \\ \psi_n(x) &= \operatorname{sen}(n\pi x/L), \qquad n = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \qquad \text{(iv)}$$
Mostre que a Eq. (10) pode ser escrita na forma
$$(f, \phi_n) = \frac{a_0}{2}(\phi_0, \phi_n) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m(\phi_m, \phi_n) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m(\psi_m, \phi_n). \quad \text{(v)}$$
(c) Use a Eq. (v) e a equação correspondente para (f, ψ_n) junto com as relações de ortogonalidade para mostrar que
$$a_n = \frac{(f, \phi_n)}{(\phi_n, \phi_n)}, \ n = 0, 1, 2, \ldots; \quad b_n = \frac{(f, \psi_n)}{(\psi_n, \psi_n)}, \ n = 1, 2, \ldots. \qquad \text{(vi)}$$
Note a semelhança entre as Eqs. (vi) e a Eq. (ii). As funções ϕ_n e ψ_n têm um papel semelhante ao dos vetores ortogonais $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ no espaço tridimensional. Os coeficientes a_n e b_n podem ser interpretados como sendo as projeções da função f sobre as funções da base ϕ_n e ψ_n.
Observe, também, que qualquer vetor tridimensional pode ser expresso como uma combinação linear de três vetores ortogonais dois a dois. De um modo um pouco semelhante, qualquer função suficientemente suave definida em $-L \leq x \leq L$ pode ser expressa como uma combinação linear das funções ortogonais $\cos(n\pi x/L)$ e $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$, isto é, como uma série de Fourier.

10.3 O Teorema de Convergência de Fourier

Na seção precedente, mostramos que, se a série de Fourier
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\frac{m\pi x}{L} + b_m \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\right) \qquad (1)$$
converge e, assim, define uma função f, então f é periódica com período $2L$ e os coeficientes a_m e b_m estão relacionados a $f(x)$ pelas fórmulas de Euler-Fourier
$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots; \quad (2)$$
$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\,dx, \qquad m = 1, 2, \ldots. \quad (3)$$
Nesta seção vamos supor que é dada uma função f. Se essa função é periódica com período $2L$ e integrável no intervalo $[-L, L]$, então pode-se calcular um conjunto de coeficientes a_m e b_m pelas Eqs. (2) e (3), e pode-se construir, formalmente, uma série da forma (1). O problema é saber se essa série converge para algum valor de x e, se for esse caso, se sua soma é $f(x)$. Foram descobertos exemplos que mostram que uma série de Fourier correspondente a uma função f pode não convergir para $f(x)$ ou pode até divergir. Funções cujas séries de Fourier não convergem para o valor da função em pontos isolados são fáceis de construir e vamos apresentar exemplos mais adiante nesta seção. Funções cujas séries de Fourier divergem em um ou mais pontos são mais patológicas e não serão consideradas neste livro.

Para garantir a convergência de uma série de Fourier para a função da qual seus coeficientes são calculados, é essencial colocar hipóteses adicionais sobre a função. De um ponto de vista prático, tais condições devem ser fracas o suficiente para cobrir todas as situações de interesse e, ainda, simples o suficiente para serem facilmente verificadas para funções particulares. Ao longo dos anos, foram desenvolvidos diversos conjuntos de condições com esse propósito.

Antes de enunciar um teorema de convergência para séries de Fourier, vamos definir uma expressão que aparece no teorema. Uma função f é dita **seccionalmente contínua** em um intervalo $a \leq x \leq b$ se o intervalo pode ser particionado em um número finito de pontos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de modo que

1. f é contínua em cada subintervalo aberto $x_{i-1} < x < x_i$.
2. f tende a um limite finito nas extremidades de cada subintervalo, quando aproximadas do interior do intervalo.

A Fig. 10.3.1 mostra o gráfico de uma função seccionalmente contínua.

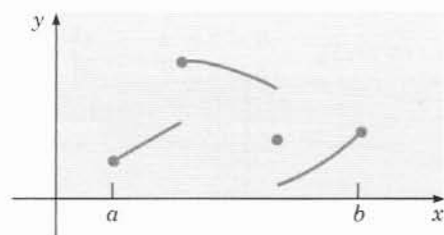


FIG. 10.3.1 Uma função seccionalmente contínua.

A notação $f(c+)$ é usada para denotar o limite de $f(x)$ quando $x \to c$ pela direita; analogamente, $f(c-)$ denota o limite de $f(x)$ quando x tende a c pela esquerda.

Note que não é necessário que a função esteja definida nos pontos da partição x_i. Por exemplo, no teorema a seguir, supomos que f' é seccionalmente contínua; mas, certamente, f' não pode existir nos pontos onde a própria f é descontínua. Também não é essencial que o intervalo seja fechado; ele também pode ser aberto, ou aberto em uma das extremidades e fechado na outra.

Teorema 10.3.1

Suponha que f e f' são seccionalmente contínuas no intervalo $-L \le x < L$. Suponha, além disso, que f está definida fora do intervalo $-L \le x < L$ de modo a ser periódica com período $2L$. Então f tem uma série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} \right), \quad (4)$$

cujos coeficientes são dados pelas Eqs. (2) e (3). A série de Fourier converge para $f(x)$ em todos os pontos onde f é contínua e converge para $[f(x+) + f(x-)]/2$ em todos os pontos onde f é descontínua.

Note que $[f(x+) + f(x-)]/2$ é o valor médio dos limites à direita e à esquerda no ponto x. Em qualquer ponto onde f é contínua, $f(x+) = f(x-) = f(x)$, logo é correto dizer que a série de Fourier converge para $[f(x+) + f(x-)]/2$ em todos os pontos. Sempre que dissermos que uma série de Fourier converge para uma função f, isso vai significar que ela converge nesse sentido.

Deve-se enfatizar que as condições dadas nesse teorema são apenas suficientes para a convergência de uma série de Fourier; elas não são, de modo algum, necessárias. Nem são as condições suficientes mais gerais que foram descobertas. Apesar disso, a demonstração do teorema é razoavelmente complicada e não será discutida aqui.[4] Sob condições mais restritivas, é possível obter uma demonstração bem mais simples da convergência; veja o Problema 18.

Para obter uma compreensão melhor do significado do teorema, vamos considerar algumas classes de funções que não satisfazem as condições impostas. Funções não incluídas no teorema são, principalmente, as que têm descontinuidades infinitas no intervalo $[-L, L]$, como $1/x^2$ quando $x \to 0$, ou $\ln|x - L|$ quando $x \to L$. Também estão excluídas funções com um número infinito de saltos nesse intervalo; no entanto, tais funções são encontradas raramente.

Vale a pena observar que uma série de Fourier pode convergir para uma soma que não é diferenciável, nem mesmo contínua, apesar do fato de que cada termo na série (4) é contínuo e até diferenciável um número infinito de vezes. O exemplo a seguir é uma ilustração disso, como é o Exemplo 2 na Seção 10.2.

Exemplo 1

Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < 0, \\ L, & 0 < x < L, \end{cases} \quad (5)$$

e seja f definida fora desse intervalo de modo que $f(x + 2L) = f(x)$ para todo x. Vamos, temporariamente, deixar em aberto a definição de f nos pontos $x = 0, \pm L$, exceto para dizer que seu valor tem que ser finito. Encontre a série de Fourier dessa função e determine onde ela converge.

O gráfico da equação $y = f(x)$ está ilustrado na Fig. 10.3.2, estendido em ambas as direções. Pode-se pensar nele como representando uma onda quadrada. O intervalo $[-L, L]$ pode ser particionado em dois subintervalos abertos, $(-L, 0)$ e $(0, L)$. Em $(0, L)$, $f(x) = L$ e $f'(x) = 0$. É claro que ambas, f e f', são contínuas e têm limites quando $x \to 0$ pela direita e quando $x \to L$ pela esquerda. A situação em $(-L, 0)$ é semelhante. Portanto, ambas f e f' são seccionalmente contínuas em $[-L, L)$, de modo que f satisfaz as condições do Teorema 10.3.1. Se os coeficientes a_m e b_m forem calculados pelas Eqs. (2) e (3), a convergência da série de Fourier resultante está garantida em todos os pontos onde f é contínua. Note que os valores de a_m e b_m são os mesmos, independentemente da definição de f nos pontos de descontinuidades. Isso é verdade porque o valor de uma integral não é afetado ao se mudar o integrando em um número finito de pontos. Da Eq. (2),

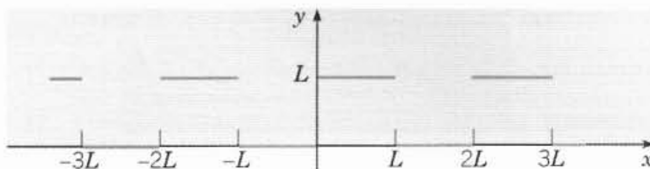


FIG. 10.3.2 Onda quadrada.

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_0^L dx = L;$$

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \int_0^L \cos\frac{m\pi x}{L}\,dx$$
$$= 0, \qquad m \neq 0.$$

Analogamente, da Eq. (3),

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\,dx = \int_0^L \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\,dx$$
$$= \frac{L}{m\pi}(1 - \cos m\pi)$$
$$= \begin{cases} 0, & m \text{ par;} \\ 2L/m\pi, & m \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Portanto,

$$f(x) = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5}\operatorname{sen}\frac{5\pi x}{L} + \cdots\right)$$
$$= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi}\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(m\pi x/L)}{m}$$
$$= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)\pi x/L}{2n-1}. \quad (6)$$

[4] Demonstrações de convergência de uma série de Fourier podem ser encontradas na maior parte dos livros de cálculo avançado. Veja, por exemplo, Kaplan (Cap. 7) ou Buck (Cap. 6). [Para uma demonstração mais simples, diferente das tradicionais, veja meu artigo *Séries de Fourier* na revista *Matemática Universitária* de junho de 1986 (pp. 92-111). (*N.T.*)]

Nos pontos $x = 0, \pm nL$, onde a função f não é contínua, todos os termos na série após o primeiro desaparecem e a soma é $L/2$. Esse é o valor médio dos limites à direita e à esquerda, como deve ser. Podemos, por exemplo, definir f nesses pontos como tendo o valor $L/2$. Se escolhermos outros valores, a série ainda nos dá o valor $L/2$ nesses pontos, já que nenhum dos cálculos efetuados anteriormente sofre modificação; a série, simplesmente, não converge para a função nesses pontos a menos que f tome esses valores. Isso ilustra a possibilidade da série de Fourier correspondente a uma função não convergir para ela nos pontos de descontinuidade, a menos que a função seja definida apropriadamente em tais pontos.

A maneira na qual as somas parciais

$$s_n(x) = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right),$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

da série de Fourier (6) convergem para f está indicada na Fig. 10.3.3, onde L foi escolhido como sendo 1 e aparece o gráfico de $s_8(x)$. Essa figura sugere que, nos pontos onde f é contínua, as somas parciais tendem a $f(x)$ quando n aumenta. No entanto, em vizinhanças dos pontos de descontinuidade, tais como $x = 0$ e $x = L$, as somas parciais não convergem suavemente ao ponto médio. Em vez disso, elas tendem a passar da marca em cada extremidade do salto, como se tivessem dificuldade de se acomodar à mudança brusca que têm que fazer nesse ponto. Esse fenômeno é típico de séries de Fourier em pontos de descontinuidade e é conhecido como o fenômeno de Gibbs.[5]

Pode-se obter uma melhor compreensão considerando-se o erro $e_n(x) = f(x) - s_n(x)$. A Fig. 10.3.4 mostra um gráfico de $|e_n(x)|$ em função de x para $n = 8$ e $L = 1$. A menor cota superior de $|e_8(x)|$ é 0,5 e é aproximada quando $x \to 0$ e $x \to 1$. Quando n aumenta, o erro diminui no interior do intervalo [onde $f(x)$ é contínua], mas a menor cota superior não diminui quando n aumenta. Não podemos, então, reduzir o erro uniformemente no intervalo inteiro aumentando o número de termos.

As Figs. 10.3.3 e 10.3.4 mostram, também, que a série neste exemplo converge mais devagar do que a no Exemplo 1 na Seção 10.2. Isso se deve ao fato de que os coeficientes na série (6) são proporcionais, apenas, a $1/(2n - 1)$.

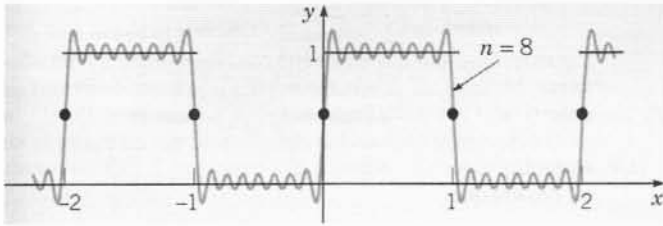


FIG. 10.3.3 A soma parcial $s_8(x)$ da série de Fourier, Eq. (6), da onda quadrada.

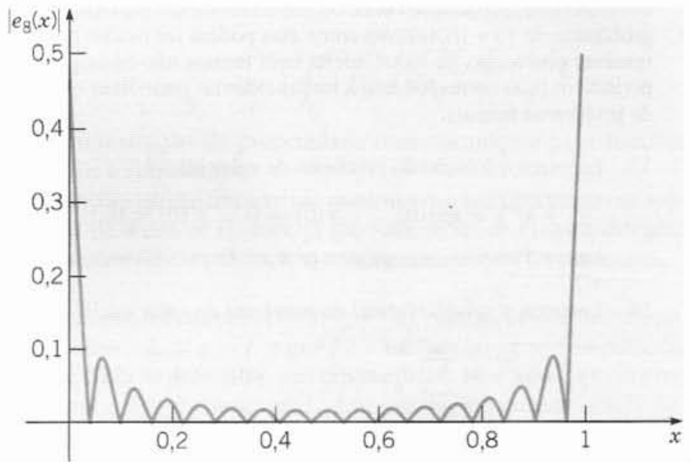


FIG. 10.3.4 Um gráfico do erro $|e_8(x)|$ em função de x para a onda quadrada.

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, suponha que a função dada é estendida, periodicamente, para fora do intervalo original.

(a) Encontre a série de Fourier da função estendida.

(b) Esboce o gráfico da função para a qual a série converge por três períodos.

1. $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} L + x, & -L \le x < 0, \\ L - x, & 0 \le x < L \end{cases}$

4. $f(x) = 1 - x^2, \quad -1 \le x \le 1$

5. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < -\pi/2, \\ 1, & -\pi/2 \le x < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 \le x < \pi \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0, \\ x^2, & 0 \le x < 1 \end{cases}$

Nos problemas de 7 a 12, suponha que a função dada é estendida, periodicamente, para fora do intervalo original.

(a) Encontre a série de Fourier da função estendida.

(b) Seja $e_n(x) = f(x) - s_n(x)$. Encontre a menor cota superior ou o valor máximo (se existir) de $|e_n(x)|$ para $n = 10$, 20 e 40.

(c) Se possível, encontre o menor n para o qual $|e_n(x)| \le 0{,}01$ para todo x.

7. $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi; \end{cases} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$

(veja a Seção 10.2, Problema 15)

[5]O fenômeno de Gibbs leva esse nome em honra a Josiah Willard Gibbs (1839-1903), mais bem conhecido por seu trabalho em análise vetorial e mecânica estatística. Gibbs foi professor de física matemática em Yale e um dos primeiros cientistas americanos a obter reputação internacional. O fenômeno de Gibbs é discutido em mais detalhes por Carslaw (Cap. 9).

8. $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \le x < 0, \\ 1-x, & 0 \le x < 1; \end{cases} \quad f(x+2) = f(x)$
(veja a Seção 10.2, Problema 16)

9. $f(x) = x, \quad -1 \le x < 1; \qquad f(x+2) = f(x)$
(veja a Seção 10.2, Problema 20)

10. $f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \le x < 0, \\ 2-2x, & 0 \le x < 2; \end{cases} \quad f(x+4) = f(x)$
(veja a Seção 10.2, Problema 22)

11. $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0, \\ x^2, & 0 \le x < 1; \end{cases} \quad f(x+2) = f(x)$
(veja Problema 6)

12. $f(x) = x - x^3, \quad -1 \le x < 1; \qquad f(x+2) = f(x)$

Forças Externas Periódicas. Neste capítulo, estamos preocupados, basicamente, com a utilização de série de Fourier para resolver problema de valores de contorno para determinadas equações diferenciais parciais. No entanto, as séries de Fourier são, também, úteis em muitas outras situações onde ocorrem fenômenos periódicos. Os problemas de 13 a 16 indicam como elas podem ser usadas para se resolver problemas de valor inicial com termos não-homogêneos periódicos (que correspondem a forças externas periódicas no caso de problemas físicos).

13. Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y'' + \omega^2 y = \operatorname{sen} nt, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde n é um inteiro positivo e $\omega^2 \neq n^2$. O que acontece se $\omega^2 = n^2$?

14. Encontre a solução formal do problema de valor inicial

$$y'' + \omega^2 y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nt, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde $\omega > 0$ não é igual a um inteiro positivo. Como essa solução é modificada se $\omega = m$, onde m é um inteiro positivo?

15. Encontre a solução formal do problema de valor inicial

$$y'' + \omega^2 y = f(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

onde f é periódica de período 2π e

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi; \\ 0, & t = 0, \pi, 2\pi; \\ -1, & \pi < t < 2\pi. \end{cases}$$

Veja o Problema 1.

16. Encontre a solução formal do problema de valor inicial

$$y'' + \omega^2 y = f(t), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

onde f é periódica de período 2 e

$$f(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \le t < 1; \\ -1+t, & 1 \le t < 2. \end{cases}$$

Veja o Problema 8.

17. Supondo que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right), \qquad \text{(i)}$$

mostre, formalmente, que

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} [f(x)]^2 \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Essa relação entre uma função f e seus coeficientes de Fourier é conhecida como a identidade de Parseval[6]. Essa relação é muito importante na teoria de séries de Fourier; veja o Problema 9 na Seção 11.6.
Sugestão: Multiplique a Eq. (i) por $f(x)$, integre de $-L$ a L e use as fórmulas de Euler-Fourier.

18. Esse problema indica uma demonstração de convergência de séries de Fourier sob condições mais restritivas do que as do Teorema 10.3.1.
(a) Se f e f' são seccionalmente contínuas em $-L \le x < L$ e se f é periódica com período $2L$, mostre que na_n e nb_n permanecem limitadas quando $n \to \infty$. *Sugestão*: Use integração por partes.
(b) Se f é contínua em $-L \le x \le L$ e periódica com período $2L$, e se f' e f'' são seccionalmente contínuas em $-L \le x < L$, mostre que n^2a_n e n^2b_n permanecem limitadas quando $n \to \infty$. Se f é contínua no intervalo *fechado*, então é contínua para todo x. Por que isso é importante? *Sugestão*: Novamente, integre por partes.
(c) Usando o resultado do item (b), mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ convergem.
(d) Do resultado do item (c), mostre que a série de Fourier (4) converge absolutamente[7] para todo x.

Aceleração da Convergência. No próximo problema, mostraremos como é possível, algumas vezes, aumentar a velocidade de convergência de uma série de Fourier.

19. Suponha que queremos calcular valores de uma função g, onde

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{1+(2n-1)^2} \operatorname{sen}(2n-1)\pi x. \qquad \text{(i)}$$

É possível mostrar que essa série converge, embora muito devagar. No entanto, observe que, para n grande, os termos na série (i) são aproximadamente iguais a $[\operatorname{sen}(2n-1)\pi x]/(2n-1)$ e que esses últimos são semelhantes aos do exemplo no texto, Eq. (6).
(a) Mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\operatorname{sen}(2n-1)\pi x]/(2n-1) = (\pi/2)[f(x) - \tfrac{1}{2}], \qquad \text{(ii)}$$

onde f é a onda quadrada no exemplo com $L = 1$.
(b) Subtraia a Eq. (ii) da Eq. (i) e mostre que

$$g(x) = \frac{\pi}{2}[f(x) - \tfrac{1}{2}] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)\pi x}{(2n-1)[1+(2n-1)^2]}. \qquad \text{(iii)}$$

A série (iii) converge muito mais rápido do que a série (i) e, assim, fornece um modo melhor de se calcular valores de $g(x)$.

10.4 Funções Pares e Ímpares

Antes de olhar outros exemplos de séries de Fourier, vamos distinguir duas classes de funções para as quais a fórmula de Euler-Fourier pode ser simplificada. Essas classes são formadas pelas funções pares e ímpares, que são caracterizadas, geometricamen-

[6]Marc-Antoine Parseval (1755-1836) era um matemático francês relativamente desconhecido cujo nome foi dado a um resultado importante. Ele apresentou uma versão precursora desse resultado em 1799, embora não no contexto de séries de Fourier.
[7]Também converge uniformemente; para uma explicação do significado disso, veja um livro de cálculo avançado ou de análise.

te, pela propriedade de simetria em relação ao eixo dos y e à origem, respectivamente (veja a Fig. 10.4.1).

Analiticamente, f é uma **função par** se seu domínio contém o ponto $-x$ sempre que contiver o ponto x e se

$$f(-x) = f(x) \tag{1}$$

para cada x no domínio de f. Analogamente, f é uma **função ímpar** se seu domínio contém $-x$ sempre que contiver x e se

$$f(-x) = -f(x) \tag{2}$$

para cada x no domínio de f. Exemplos de funções pares são 1, x^2, $\cos nx$, $|x|$ e x^{2n}. As funções x, x^3, sen nx e x^{2n+1} são exemplos de funções ímpares. Note que, de acordo com a Eq. (2), $f(0)$ tem que ser zero se f é uma função ímpar cujo domínio contém a origem. A maioria das funções não são pares nem ímpares, como, por exemplo, e^x. Apenas uma função, f identicamente nula, é, ao mesmo tempo, par e ímpar.

As propriedades elementares de funções pares e ímpares incluem as seguintes:

1. A soma (ou diferença) e o produto (ou quociente) de duas funções pares é par.
2. A soma (ou diferença) de duas funções ímpares é ímpar; o produto (ou quociente) de duas funções ímpares é par.
3. A soma (ou diferença) de uma função par e uma função ímpar não é par nem ímpar; o produto (ou quociente) delas é ímpar.[8]

As demonstrações de todas essas afirmações são simples e seguem, diretamente, das definições. Por exemplo, se ambas, f_1 e f_2 são ímpares e se $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$, então

$$\begin{aligned} g(-x) &= f_1(-x) + f_2(-x) = -f_1(x) - f_2(x) \\ &= -[f_1(x) + f_2(x)] = -g(x), \end{aligned} \tag{3}$$

de modo que $f_1 + f_2$ também é ímpar. Analogamente, se $h(x) = f_1(x)f_2(x)$, então

$$\begin{aligned} h(-x) &= f_1(-x)f_2(-x) = [-f_1(x)][-f_2(x)] \\ &= f_1(x)f_2(x) = h(x), \end{aligned} \tag{4}$$

de modo que f_1f_2 é par.

Também são importantes as duas propriedades integrais de funções pares e ímpares que enunciamos a seguir:

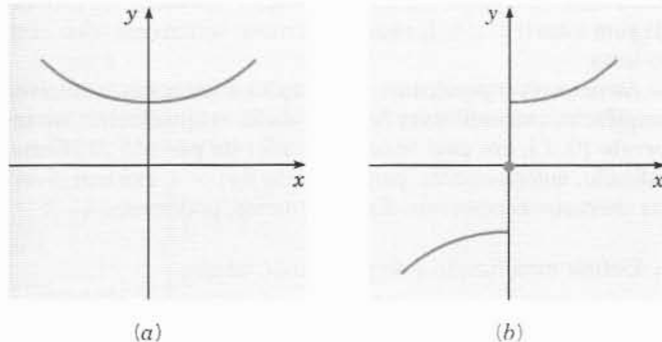


FIG. 10.4.1 (*a*) Uma função par. (*b*) Uma função ímpar.

4. Se f é uma função par, então

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 2\int_0^L f(x)\,dx. \tag{5}$$

5. Se f é uma função ímpar, então

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0. \tag{6}$$

Essas propriedades ficam claras, intuitivamente, a partir da interpretação de uma integral como sendo uma área sob uma curva, mas também seguem, imediatamente, das definições. Por exemplo, se f for par, então

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \int_{-L}^{0} f(x)\,dx + \int_0^L f(x)\,dx.$$

Fazendo $x = -s$ na primeira integral à direita do sinal de igualdade e usando a Eq. (1), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-L}^{L} f(x)\,dx &= -\int_{L}^{0} f(s)\,ds + \int_0^L f(x)\,dx \\ &= 2\int_0^L f(x)\,dx. \end{aligned}$$

A demonstração da propriedade correspondente para funções ímpares é semelhante.

Funções pares e ímpares são particularmente importantes em aplicações de séries de Fourier, já que suas séries de Fourier têm uma forma especial e ocorrem, freqüentemente, em problemas físicos.

Séries em Co-senos. Suponha que f e f' são seccionalmente contínuas em $-L \le x < L$ e que f é uma função periódica par com período $2L$. Segue, então, das propriedades 1 e 3, que $f(x)\cos(n\pi x/L)$ é par e que $f(x)\,\text{sen}(n\pi x/L)$ é ímpar. Como conseqüência das Eqs. (5) e (6), os coeficientes de Fourier de f são dados por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \\ b_n &= 0, \qquad n = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{7}$$

Logo, f tem série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}.$$

Em outras palavras, a série de Fourier de qualquer função par é formada, apenas, pelas funções trigonométricas pares $\cos(n\pi x/L)$ e pelo termo constante; é natural chamar tal série de **série de Fourier em co-senos**. De um ponto de vista computacional, observe que basta calcular os coeficientes a_n para $n = 0, 1, 2, \ldots$, da fórmula integral (7). Cada um dos b_n, $n = 1, 2, \ldots$, é, automaticamente, igual a zero para qualquer função par e, portanto, não precisa ser calculado por integração.

Série em Senos. Suponha que f e f' são seccionalmente contínuas e que f é uma função periódica ímpar de período $2L$. Segue, então, das propriedades 2 e 4, que $f(x)\cos(n\pi x/L)$ é ímpar e $f(x)\,\text{sen}(n\pi x/L)$ é par. Nesse caso, os coeficientes de Fourier de f são

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{8}$$

[8]Essas afirmações precisam ser modificadas se uma das funções for identicamente nula.

e a série de Fourier de f é da forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Logo, a série de Fourier de qualquer função ímpar é formada, apenas, pelas funções trigonométricas $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$; tal série é chamada **série de Fourier em senos**. Mais uma vez, note que basta calcular, por integração, metade dos coeficientes, já que todos os a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, são nulos para qualquer função ímpar.

Exemplo 1

Seja $f(x) = x$, $-L < x < L$, e seja $f(-L) = f(L) = 0$. Seja f definida no restante da reta de modo a ser periódica de período $2L$ (veja a Fig. 10.4.2). A função definida desse modo é conhecida como dente de serra. Encontre a série de Fourier dessa função.

Como f é uma função ímpar, seus coeficientes de Fourier, de acordo com a Eq. (8), são dados por

$$a_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

$$= \frac{2}{L}\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \left\{ \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L} \right\}\Bigg|_0^L$$

$$= \frac{2L}{n\pi}(-1)^{n+1}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

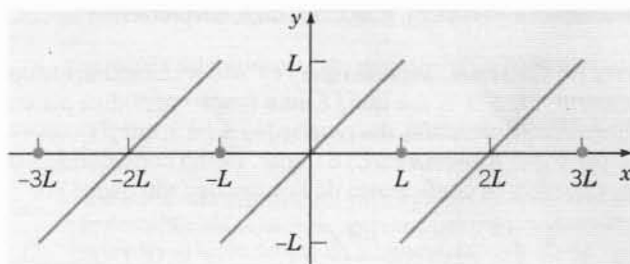


FIG. 10.4.2 Função dente de serra.

Portanto, a série de Fourier de f, a função dente de serra, é

$$f(x) = \frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}. \tag{9}$$

Observe que a função periódica f é descontínua nos pontos $\pm L$, $\pm 3L, \ldots$, como ilustrado na Fig. 10.4.2. Nesses pontos, a série em (9) converge ao valor médio dos limites à esquerda e à direita, a saber, zero. A soma parcial da série (9) para $n = 9$ está ilustrada na Fig. 10.4.3. O fenômeno de Gibbs (mencionado na Seção 10.3) ocorre, novamente, próximo aos pontos de descontinuidade.

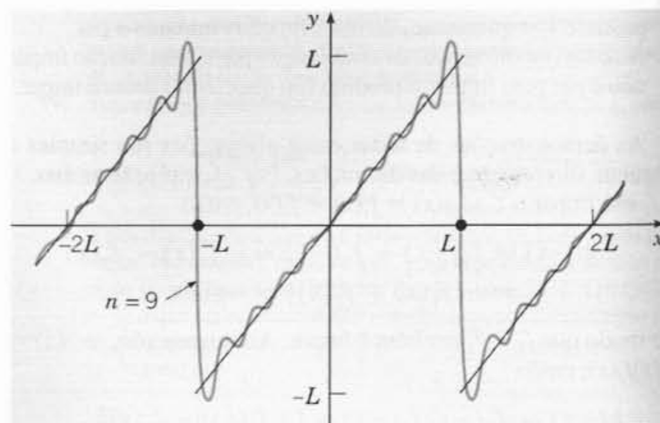


FIG. 10.4.3 Uma soma parcial da série de Fourier, Eq. (9), da função dente de serra.

Note que, nesse exemplo, $f(-L) = f(L) = 0$, assim como $f(0) = 0$. Isso é necessário para que a função f seja tanto ímpar quanto periódica com período $2L$. Quando falarmos sobre a construção de uma série em senos para uma função definida em $0 \le x \le L$, fica subentendido que, se necessário, redefinimos, primeiro, a função de modo a se anular em $x = 0$ e $x = L$.

Vale a pena observar que a onda triangular (Exemplo 1 da Seção 10.2) e a função dente de serra, que acabamos de considerar, são idênticas no intervalo $0 \le x < L$. Portanto, suas séries de Fourier convergem à mesma função, $f(x) = x$, nesse intervalo. Assim, se for necessário representar a função $f(x) = x$ em $0 \le x < L$ por uma série de Fourier, é possível fazer isso com *uma série em co-senos ou uma série em senos*. No primeiro caso, f tem que ser estendida como uma função *par* para o intervalo $-L < x < 0$ e periodicamente para o resto da reta (a onda triangular). No segundo caso, f tem que ser estendida para o intervalo $-L < x < 0$ como uma função ímpar e, para o resto da reta, periodicamente (a função dente de serra). Se f for estendida de outra maneira qualquer, a série de Fourier resultante vai convergir para x em $0 \le x < L$, mas vai envolver termos em seno e em co-seno.

Ao se resolver problemas em equações diferenciais, é útil, com freqüência, expandir uma função f dada, originalmente, no intervalo $[0, L]$, em uma série de Fourier de período $2L$. Como indicado, anteriormente, para a função $f(x) = x$, existem diversas alternativas possíveis. Explicitamente, podemos:

1. Definir uma função g de período $2L$ tal que

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le L, \\ f(-x), & -L < x < 0. \end{cases} \tag{10}$$

A função g é, então, a extensão periódica par de f. Sua série de Fourier, que é uma série em co-senos, representa f em $[0, L]$.

2. Definir uma função h de período $2L$ tal que

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L, \\ 0, & x = 0, L, \\ -f(-x), & -L < x < 0. \end{cases} \quad (11)$$

A função h é, então, a extensão periódica ímpar de f. Sua série de Fourier, que é uma série em senos, representa f em $(0, L)$.

3. Definir uma função k de período $2L$ tal que

$$k(x) = f(x), \qquad 0 \le x \le L, \quad (12)$$

e defina $k(x)$ em $(-L, 0)$ de qualquer maneira consistente com as condições do Teorema 10.3.1. Algumas vezes, é conveniente definir $k(x)$ como sendo zero para $-L < x < 0$. A série de Fourier de k, que envolve termos tanto em senos como em co-senos, também representa f em $[0, L]$, independentemente do modo que é definida $k(x)$ em $(-L, 0)$. Portanto, existe uma infinidade de tais séries, todas convergindo para $f(x)$ no intervalo original.

Em geral, a forma da expansão usada será determinada (ou, pelo menos, sugerida) pelo propósito para o qual é necessária. No entanto, se existe uma escolha sobre o tipo de série de Fourier a ser usada, a seleção pode se basear, em alguns casos, na velocidade de convergência. Por exemplo, a série em co-senos para a onda triangular [Eq. (20) da Seção 10.2] converge mais rapidamente do que a série em senos para a função dente de serra [Eq. (9) nesta seção], embora ambas convirjam para a mesma função para $0 \le x < L$. Isso ocorre porque a onda triangular é uma função mais suave do que a função dente de serra, sendo, portanto, mais fácil de ser aproximada. Em geral, quanto mais derivadas contínuas tem a função no intervalo inteiro $-\infty < x < \infty$, mais depressa vai convergir sua série de Fourier. Veja o Problema 18 da Seção 10.3.

Exemplo 2

Suponha que

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x \le 1, \\ 0, & 1 < x \le 2. \end{cases} \quad (13)$$

Como indicado anteriormente, podemos representar f por uma série em co-senos ou por uma em senos. Esboce o gráfico da soma de cada uma dessas séries para $-6 \le x \le 6$.

Neste exemplo, $L = 2$, de modo que a série em co-senos para f converge para a extensão periódica par de f de período 4, cujo gráfico está esboçado na Fig. 10.4.4.

Analogamente, a série em senos para f converge para a extensão periódica ímpar de f de período 4. O gráfico dessa função está esboçado na Fig. 10.4.5.

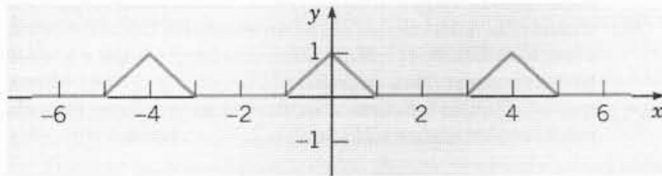


FIG. 10.4.4 Extensão periódica par de $f(x)$ dada pela Eq. (13).

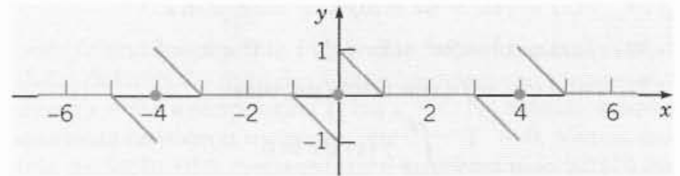


FIG. 10.4.5 Extensão periódica ímpar de $f(x)$ dada pela Eq. (13).

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, determine se a função dada é par, ímpar ou nenhuma das duas.

1. $x^3 - 2x$
2. $x^3 - 2x + 1$
3. $\text{tg}\, 2x$
4. $\sec x$
5. $|x|^3$
6. e^{-x}

Nos problemas de 7 a 12, é dada uma função f em um intervalo de comprimento L. Em cada caso, esboce os gráficos das extensões par e ímpar de f de período $2L$.

7. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 2, \\ 1, & 2 \le x < 3 \end{cases}$
8. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ x - 1, & 1 \le x < 2 \end{cases}$
9. $f(x) = 2 - x, \quad 0 < x < 2$
10. $f(x) = x - 3, \quad 0 < x < 4$
11. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x < 2 \end{cases}$
12. $f(x) = 4 - x^2, \quad 0 < x < 1$
13. Prove que qualquer função pode ser expressa como a soma de duas outras funções, uma par e outra ímpar, isto é, para qualquer função f cujo domínio contém $-x$ sempre que contiver x, mostre que existe uma função par g e uma função ímpar h tal que $f(x) = g(x) + h(x)$.
Sugestão: O que você pode dizer sobre $f(x) + f(-x)$?
14. Encontre os coeficientes para as séries em co-senos e em senos descritas no Exemplo 2.

Nos problemas de 15 a 22, encontre a série de Fourier indicada para a função dada e esboce o gráfico da função para a qual a série converge em um intervalo de três períodos.

15. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 2; \end{cases}$ série em co-senos, período 4
Compare com o Exemplo 1 e o Problema 5 da Seção 10.3.
16. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x < 2; \end{cases}$ série em senos, período 4
17. $f(x) = 1, \quad 0 \le x \le \pi;$ série em co-senos, período 2π
18. $f(x) = 1, \quad 0 < x < \pi;$ série em senos, período 2π

19. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi, \\ 1, & \pi < x < 2\pi, \\ 2, & 2\pi < x < 3\pi \end{cases}$ série em senos, período 6π
20. $f(x) = x, \quad 0 \leq x < 1;$ série com período 1
21. $f(x) = L - x, \quad 0 \leq x \leq L;$ série em co-senos, período $2L$

    Compare com o Exemplo 1 da Seção 10.2.
22. $f(x) = L - x, \quad 0 < x < L;$ série em senos, período $2L$

Nos problemas de 23 a 26:
(a) Encontre a série de Fourier indicada da função dada.
(b) Esboce o gráfico da função para a qual a série converge em um intervalo de três períodos.
(c) Faça o gráfico de uma ou mais somas parciais da série.

23. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \pi < x < 2\pi; \end{cases}$ série em co-senos, período 4π
24. $f(x) = -x, \quad -\pi < x < 0;$ série em senos, período 2π
25. $f(x) = 2 - x^2, \quad 0 < x < 2;$ série em senos, período 4
26. $f(x) = x^2 - 2x, \quad 0 < x < 4;$ série em co-senos, período 8

Nos problemas de 27 a 30, é dada uma função em um intervalo $0 < x < L$.
(a) Esboce os gráficos das extensões periódicas par $g(x)$ e ímpar $h(x)$ de períodos $2L$ da função dada em um intervalo de três períodos.
(b) Encontre as séries de Fourier em co-senos e senos da função dada.
(c) Faça os gráficos de algumas das somas parciais de cada série.
(d) Para cada série, investigue a dependência em n do erro máximo em $[0, L]$.

27. $f(x) = 3 - x, \quad 0 < x < 3$
28. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$
29. $f(x) = (4x^2 - 4x - 3)/4, \quad 0 < x < 2$
30. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 1, \quad 0 < x < 3$
31. Prove que, se f é uma função par, então
$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = 0.$$
32. Prove as propriedades 2 e 3 de funções pares e ímpares, como enunciadas no texto.
33. Prove que a derivada de uma função par é ímpar e que a derivada de uma função ímpar é par.
34. Seja $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Mostre que, se f é par, então F é ímpar e que, se f é ímpar, então F é par.
35. A partir da série de Fourier da onda quadrada no Exemplo 1 da Seção 10.3, mostre que
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$
Essa relação entre π e os inteiros positivos ímpares foi descoberta por Leibniz em 1674.
36. A partir da série de Fourier da onda triangular (Exemplo 1 da Seção 10.2), mostre que
$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$
37. Suponha que f tem uma série de Fourier em senos
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x/L), \qquad 0 \leq x \leq L.$$
(a) Mostre, formalmente, que
$$\frac{2}{L}\int_0^L [f(x)]^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

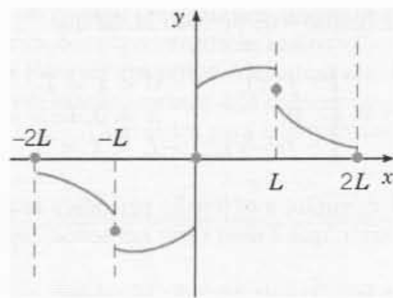


FIG. 10.4.6 Gráfico da função no Problema 38.

Compare esse resultado com o do Problema 17 na Seção 10.3. Qual o resultado correspondente se f tem uma série em co-senos?
(b) Aplique o resultado do item (a) à série da função dente de serra, dada pela Eq. (9), mostrando, assim, que
$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$
Essa relação foi descoberta por Euler em torno de 1735.

Séries de Fourier Mais Especializadas. Seja f uma função definida, originalmente, em $0 \leq x \leq L$ e satisfazendo aí as condições de continuidade do Teorema 10.3.1. Mostramos, nesta seção, que é possível representar f por uma série em senos ou por uma série em co-senos, através da construção da extensão periódica ímpar ou par de f, respectivamente. Os problemas de 38 a 40 tratam de algumas outras séries de Fourier mais especializadas que convergem à função f dada no intervalo $(0, L)$.

38. Estenda f ao intervalo $(L, 2L]$ arbitrariamente. Depois, estenda a função resultante a $(-2L, 0)$ como uma função ímpar e ao resto da reta como periódica de período $4L$ (veja a Fig. 10.4.6). Mostre que essa função tem uma série de Fourier em senos formada pelas funções $\operatorname{sen}(n\pi x/2L)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; isto é,
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x/2L),$$
onde
$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\operatorname{sen}(n\pi x/2L)\,dx.$$
Essa série converge para a função original em $(0, L)$.
39. Estenda, primeiro, f a $(L, 2L)$ de modo que seja simétrica em relação à reta $x = L$, isto é, de modo que $f(2L - x) = f(x)$ para $0 \leq x < L$. Estenda a função resultante a $(-2L, 0)$ como ímpar e ao resto da reta real (veja a Fig. 10.4.7) como periódica de período $4L$. Mostre que essa função tem série de Fourier for-

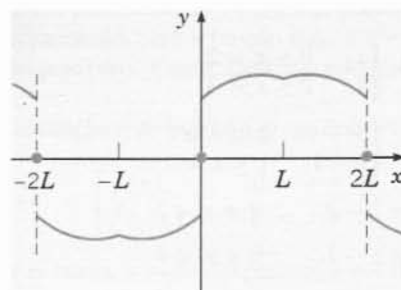


FIG. 10.4.7 Gráfico da função no Problema 39.

mada pelas funções sen($\pi x/2L$), sen($3\pi x/2L$), sen($5\pi x/2L$), ...; isto é,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2L},$$

onde

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi x}{2L}\, dx.$$

Essa série converge para a função original em $(0, L]$.

40. Como deve-se estender f, definida originalmente em $[0, L]$, de modo a se obter uma série de Fourier envolvendo, apenas, as funções cos($\pi x/2L$), cos($3\pi x/2L$), cos($5\pi x/2L$), ...? Veja os Problemas 38 e 39. Se $f(x) = x$ para $0 \leq x \leq L$, esboce a função para a qual essa série de Fourier converge para $-4L \leq x \leq 4L$.

10.5 Separação de Variáveis; Condução de Calor em uma Barra

As equações diferenciais parciais básicas de condução de calor, propagação de ondas e teoria do potencial, que vamos discutir neste capítulo, estão associadas a três tipos distintos de fenômenos: processos de difusão, processos oscilatórios e processos independentes do tempo ou estacionários. Essas equações são, portanto, de importância fundamental em muitos ramos da física. Elas também são muito importantes do ponto de vista matemático. As equações diferenciais parciais cuja teoria está melhor desenvolvida e cujas aplicações são mais significativas e variadas são as equações lineares de segunda ordem. Todas essas equações podem ser classificadas em três tipos: a equação de calor, a equação de onda e a equação do potencial, respectivamente, são protótipos de cada um desses tipos. Assim, um estudo dessas três equações fornece muita informação sobre as equações diferenciais parciais de segunda ordem mais gerais.

Durante os dois últimos séculos, foram desenvolvidos diversos métodos para se resolver equações diferenciais parciais. O método de separação de variáveis é o método sistemático mais antigo, tendo sido usado por D'Alembert, Daniel Bernoulli e Euler, em torno de 1750, em suas investigações sobre ondas e vibrações. Nesse meio tempo, o método foi consideravelmente refinado e generalizado, permanecendo, ainda hoje, como um método muito importante e de uso freqüente. Para mostrar como o método de separação de variáveis funciona, vamos considerar, primeiro, um problema básico de condução de calor em um corpo sólido. O estudo matemático de condução de calor começou[9] em torno de 1800 e continua a atrair a atenção de cientistas modernos. Por exemplo, a análise da dissipação e transferência do calor produzido por máquinas de alta velocidade é, com freqüência, um problema tecnológico importante.

Vamos considerar um problema de condução de calor em uma barra de seção reta uniforme feita com material homogêneo. Escolha o eixo dos x de modo a formar o eixo da barra de modo que $x = 0$ e $x = L$ correspondem às extremidades da barra (veja a Fig. 10.5.1). Suponha, ainda, que os lados da barra estão perfeitamente isolados,

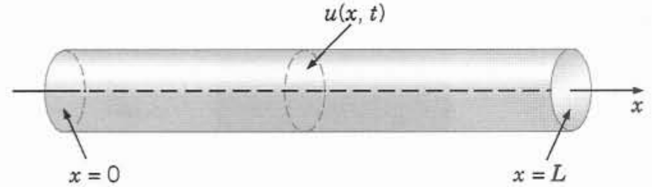


FIG. 10.5.1 Uma barra sólida condutora de calor.

de modo que não há transmissão de calor aí. Podemos supor, também, que as dimensões da seção reta são tão pequenas que a temperatura u pode ser considerada constante em qualquer seção reta. Então, u só depende da coordenada axial x e do instante t.

A variação da temperatura na barra é governada por uma equação diferencial parcial cuja dedução aparece no Apêndice A, no final deste capítulo. A equação é a **equação do calor** e tem a forma

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < L, \qquad t > 0, \qquad (1)$$

onde α^2 é uma constante conhecida como **difusividade térmica**. O parâmetro α^2 depende, apenas, do material do qual é feita a barra e é definido por

$$\alpha^2 = \kappa/\rho s, \qquad (2)$$

onde κ é a condutividade térmica, ρ é a densidade e s é o calor específico do material na barra. As unidades de α^2 são (comprimento)^2/tempo. Valores típicos de α^2 são dados na Tabela 10.5.1.

Além disso, vamos supor que a distribuição inicial de temperatura na barra é dada; então

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \leq x \leq L, \qquad (3)$$

onde f é uma função dada. Finalmente, supomos que as extremidades da barra são mantidas a temperaturas fixas: a temperatura T_1 em $x = 0$ e a temperatura T_2 em $x = L$. No entanto, acontece que basta considerar o caso em que $T_1 = T_2 = 0$. Vamos mostrar, na Seção 10.6, como reduzir o problema mais geral a esse caso especial. Logo, nesta seção, vamos supor que u é sempre zero quando $x = 0$ ou $x = L$:

$$u(0, t) = 0, \qquad u(L, t) = 0, \qquad t > 0. \qquad (4)$$

O problema fundamental de condução de calor é encontrar $u(x, t)$ que satisfaz a equação diferencial (1) para $0 < x < L$ e para $t > 0$, a condição inicial (3) quando $t = 0$ e as condições de contorno (4) em $x = 0$ e $x = L$.

O problema descrito pelas Eqs. (1), (3) e (4) é um problema de valor inicial na variável t; é dada uma condição inicial e a equação diferencial determina o que acontece depois. No entanto, em relação à variável espacial x, o problema é de

TABELA 10.5.1 Valores de Difusividade Térmica para Alguns Materiais Comuns

Material	α^2(cm^2/s)
Prata	1,71
Cobre	1,14
Alumínio	0,86
Ferro fundido	0,12
Granito	0,011
Tijolo	0,0038
Água	0,00144

[9] A primeira investigação importante sobre condução de calor foi feita por Joseph Fourier (1768-1830), enquanto governador da província de Isère (Grenoble) de 1801 a 1815. Ele apresentou artigos básicos sobre o assunto na Academia de Ciências de Paris em 1807 e 1811. No entanto, esses artigos foram criticados pelos consultores (principalmente Lagrange) por falta de rigor e, portanto, não foram publicados. Fourier continuou a desenvolver suas idéias e acabou escrevendo um dos clássicos da matemática aplicada, *Théorie analytique de la chaleur*, publicado em 1822.

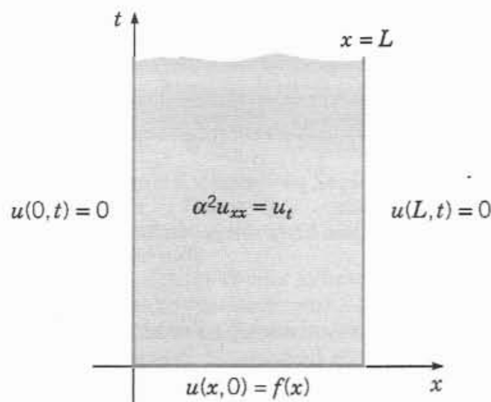


FIG. 10.5.2 Problema de contorno para a equação do calor.

valores de contorno; são impostas condições de contorno em cada extremidade da barra e a equação diferencial descreve a evolução da temperatura no intervalo entre elas. De outro ponto de vista, podemos considerar o problema como sendo um problema de valores de contorno no plano xt (veja a Fig. 10.5.2). Nesse caso, procura-se a solução $u(x, t)$ da Eq. (1) na faixa semi-infinita $0 < x < L$, $t > 0$ sujeita à condição de que $u(x, t)$ tem que assumir um valor dado em cada ponto da fronteira dessa faixa.

O problema de condução de calor (1), (3), (4) é *linear*, já que u só aparece na primeira potência em toda a equação. A equação diferencial e as condições de contorno são, também, *homogêneas*. Isso sugere que podemos abordar o problema procurando soluções da equação diferencial e das condições de contorno, fazendo, depois, uma superposição para satisfazer a condição inicial. O restante desta seção descreve como implementar esse plano.

Uma solução da equação diferencial (1) que satisfaz as condições de contorno (4) é a função $u(x, t) = 0$, mas essa solução não satisfaz a condição inicial (3), exceto no caso trivial em que $f(x)$ também é nula. Nosso objetivo, então, é procurar outras soluções, não-nulas, da equação diferencial e das condições de contorno. Para encontrar as soluções necessárias, vamos começar fazendo uma hipótese básica sobre a forma das soluções que terá muitas conseqüências, talvez até inesperadas. A hipótese é que $u(x, t)$ é um produto de duas outras funções, uma dependendo só de x e a outra dependendo só de t. Assim,

$$u(x, t) = X(x)T(t). \tag{5}$$

Substituindo u dada pela Eq. (5) na equação diferencial (1), obtemos

$$\alpha^2 X''T = XT', \tag{6}$$

onde a linha se refere à diferenciação usual em relação à variável independente, seja ela x ou t. A Eq. (6) é equivalente a

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T}, \tag{7}$$

na qual as variáveis estão separadas, isto é, a expressão à esquerda do sinal de igualdade depende só de x e a expressão à direita depende só de t. Para que a Eq. (7) seja válida para $0 < x < L$, $t > 0$, é preciso que ambos os lados da Eq. (7) sejam iguais à mesma constante. Caso contrário, se uma variável independente (por exemplo, x) fosse mantida fixa e se fosse permitida à outra que variasse, um dos lados da Eq. (7) (o esquerdo, nesse caso) permaneceria constante enquanto o outro estaria variando, violando, assim, a igualdade. Se denotarmos essa constante de separação por $-\lambda$, então a Eq. (7) fica

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = -\lambda. \tag{8}$$

Obtemos, então, as duas equações diferenciais ordinárias a seguir para $X(x)$ e $T(t)$:

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{9}$$

$$T' + \alpha^2\lambda T = 0. \tag{10}$$

Denotamos a constante de separação por $-\lambda$ (em vez de λ) porque essa constante vai ser negativa e é conveniente exibir o sinal de menos explicitamente.

A hipótese (5) levou à substituição da equação diferencial parcial (1) pelas duas equações diferenciais ordinárias (9) e (10). Cada uma dessas equações pode ser resolvida imediatamente para *qualquer* valor de λ. O produto de duas soluções das Eqs. (9) e (10), respectivamente, fornece uma solução da equação diferencial parcial (1). No entanto, só estamos interessados em soluções da Eq. (1) que satisfaçam, também, as condições de contorno (4). Como vamos mostrar agora, isso restringe bastante os valores possíveis para λ.

Substituindo $u(x, t)$ dada pela Eq. (5) na condição de contorno em $x = 0$, obtemos

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0. \tag{11}$$

Se a Eq. (11) fosse satisfeita escolhendo-se $T(t)$ como sendo zero para todo t, então $u(x, t)$ seria zero para todo x e t, e já rejeitamos essa possibilidade. Portanto, a Eq. (11) tem que ser satisfeita impondo-se a condição

$$X(0) = 0. \tag{12}$$

Analogamente, a condição de contorno em $x = L$ implica que

$$X(L) = 0. \tag{13}$$

Queremos, agora, considerar a Eq. (9) sujeita às condições de contorno (12) e (13). Esse é um problema de autovalores e, de fato, é o mesmo problema que discutimos em detalhe no final da Seção 10.1; veja especialmente o parágrafo que segue a Eq. (29) naquela seção. A única diferença é que chamamos a variável dependente de y em vez de X. Pelos resultados obtidos anteriormente [Eq. (31) da Seção 10.1], as únicas soluções não-triviais das Eqs. (9), (12) e (13) são as autofunções

$$X_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/L), \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{14}$$

associadas aos autovalores

$$\lambda_n = n^2\pi^2/L^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{15}$$

Voltando para a Eq. (10) para $T(t)$ e substituindo λ por $n^2\pi^2/L^2$, temos

$$T' + (n^2\pi^2\alpha^2/L^2)T = 0. \tag{16}$$

Logo, $T(t)$ é proporcional a $\exp(-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2)$. Portanto, multiplicando as soluções das Eqs. (9) e (10), e desprezando as constantes arbitrárias de proporcionalidade, concluímos que as funções

$$u_n(x, t) = e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2}\operatorname{sen}(n\pi x/L), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{17}$$

satisfazem a equação diferencial parcial (1) e as condições de contorno (4) para cada valor inteiro positivo de n. As funções u_n

são chamadas, às vezes, de soluções fundamentais do problema de condução do calor (1), (3), (4).

Resta, apenas, satisfazer a condição inicial (3),

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \le x \le L. \tag{18}$$

Lembre-se de que resolvemos, muitas vezes, problemas de valor inicial formando combinações lineares de um conjunto fundamental de soluções e escolhendo, depois, os coeficientes que satisfazem as condições iniciais. A etapa análoga no problema atual é formar uma combinação linear das funções (17) e depois escolher os coeficientes que satisfaçam a Eq. (18). A diferença principal entre esse problema e os anteriores é que existe uma infinidade de funções (17), de modo que uma combinação linear geral delas é uma série infinita. Vamos supor, então, que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \tag{19}$$

onde os coeficientes c_n ainda estão indeterminados. Os termos individuais na série (19) satisfazem a equação diferencial (1) e as condições de contorno (4). Vamos supor que a série infinita da Eq. (19) converge e satisfaz, também, as Eqs. (1) e (4). Para satisfazer a condição inicial (3), temos que ter

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = f(x). \tag{20}$$

Em outras palavras, precisamos escolher os coeficientes c_n tais que a série de funções seno na Eq. (20) convirja para a distribuição inicial de temperatura $f(x)$ para $0 \le x \le L$. A série na Eq. (20) é, simplesmente, a série de Fourier em senos de f; de acordo com a Eq. (8) da Seção 10.4, seus coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}\, dx. \tag{21}$$

Portanto, a solução do problema de condução de calor (1), (3), (4) é dado pela série na Eq. (19) com os coeficientes calculados pela Eq. (21).

Exemplo 1

Encontre a temperatura $u(x, t)$ em qualquer instante em uma barra de metal com 50 cm de comprimento, insulada nos lados, a uma temperatura uniforme, inicialmente, de 20°C em toda a barra, e cujas extremidades são mantidas a 0°C para todo $t > 0$.

A temperatura na barra satisfaz o problema de condução de calor (1), (3), (4) com $L = 50$ e $f(x) = 20$ para $0 < x < 50$. Logo, da Eq. (19), a solução é

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/2500} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{50}, \tag{22}$$

onde, da Eq. (21),

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{4}{5} \int_0^{50} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{50}\, dx \\ &= \frac{40}{n\pi}(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 80/n\pi, & n \text{ ímpar;} \\ 0, & n \text{ par.} \end{cases} \end{aligned} \tag{23}$$

Finalmente, substituindo os c_n na Eq. (22), obtemos

$$u(x, t) = \frac{80}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/2500} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{50}. \tag{24}$$

A expressão (24) para a temperatura é razoavelmente complicada, mas o fator exponencial com potência negativa em cada termo da série faz com que ela convirja rapidamente, exceto para valores pequenos de t ou α^2. Portanto, resultados precisos podem ser obtidos, em geral, usando-se apenas alguns poucos termos da série.

Para apresentar resultados quantitativos, vamos medir t em segundos; então α^2 tem unidades de cm²/s. Se escolhermos, por conveniência, $\alpha^2 = 1$, isso corresponde a uma barra feita com um material cujas propriedades térmicas estão entre o cobre e o alumínio. O comportamento da solução pode ser visto dos gráficos nas Figs. 10.5.3, 10.5.4 e 10.5.5. Na Fig. 10.5.3, mostramos a distribuição de temperatura na barra em diversos instan-

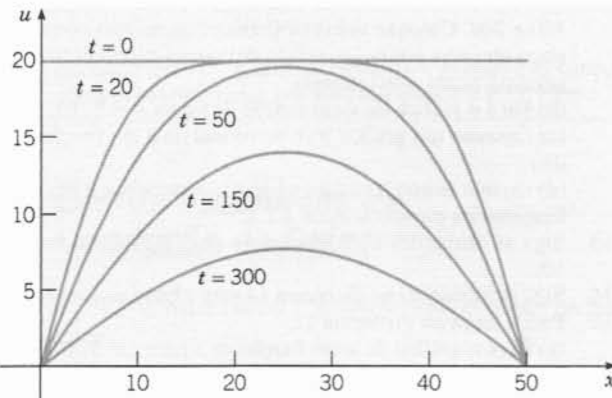


FIG. 10.5.3 Distribuições de temperatura em diversos instantes para o problema de condução de calor do Exemplo 1.

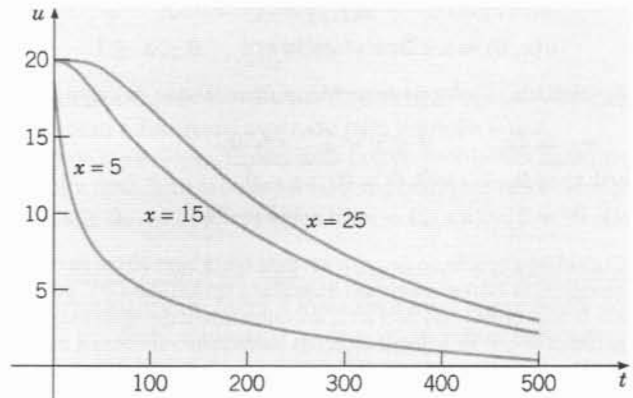


FIG. 10.5.4 Dependência da temperatura no tempo em diversos pontos para o problema de condução de calor do Exemplo 1.

tes diferentes de tempo. Observe que a temperatura vai diminuindo sempre, à medida que a barra perde calor pelas extremidades. O modo no qual a temperatura decai em um determinado ponto na barra está indicado na Fig. 10.5.4, onde aparece o gráfico da temperatura em função do tempo para alguns pontos selecionados na barra. Finalmente, a Fig. 10.5.5 mostra um gráfico tridimensional de u em função de x e de t. Observe que obtemos os gráficos nas Figs. 10.5.3 e 10.5.4 fazendo a interseção da superfície na Fig. 10.5.5 com planos onde t ou x são constantes. A pequena ondulação na Fig. 10.5.5 em $t = 0$ resulta da utilização de apenas um número finito de termos na série que representa $u(x, t)$ e da convergência lenta da série para $t = 0$.

Um problema com possível aplicação prática é determinar o instante τ no qual a barra inteira esfriou a uma determinada temperatura. Por exemplo, quando a temperatura na barra inteira não é maior do que 1°C? Devido à simetria da distribuição inicial de temperatura e das condições de contorno, o ponto mais quente na barra é sempre o centro. Assim, τ pode ser encontrado resolvendo-se $u(25, t) = 1$ para t. Usando um termo na expansão em série (24), obtemos

$$\tau = \frac{2500}{\pi^2} \ln(80/\pi) \cong 820 \text{ s}.$$

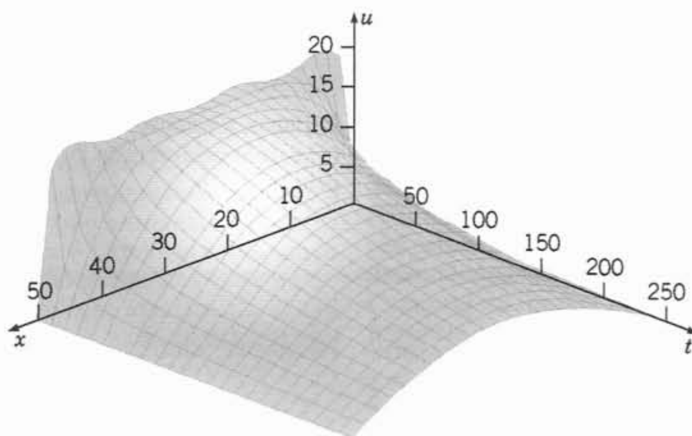


FIG. 10.5.5 Gráfico da temperatura u em função de x e de t para o problema de condução de calor do Exemplo 1.

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, determine se o método de separação de variáveis pode ser usado para substituir a equação diferencial parcial dada por um par de equações diferenciais ordinárias. Nesse caso, encontre as equações.

1. $xu_{xx} + u_t = 0$
2. $tu_{xx} + xu_t = 0$
3. $u_{xx} + u_{xt} + u_t = 0$
4. $[p(x)u_x]_x - r(x)u_{tt} = 0$
5. $u_{xx} + (x + y)u_{yy} = 0$
6. $u_{xx} + u_{yy} + xu = 0$
7. Encontre a solução do problema de condução de calor

$$100u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$
$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0;$$
$$u(x, 0) = \text{sen}\,2\pi x - \text{sen}\,5\pi x, \quad 0 \le x \le 1.$$

8. Encontre a solução do problema de condução de calor

$$u_{xx} = 4u_t, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0;$$
$$u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0, \quad t > 0;$$
$$u(x, 0) = 2\,\text{sen}(\pi x/2) - \text{sen}\,\pi x + 4\,\text{sen}\,2\pi x, \quad 0 \le x \le 2.$$

Considere a condução de calor em uma barra com 40 cm de comprimento cujas extremidades são mantidas à temperatura 0°C para todo $t > 0$. Nos problemas de 9 a 12, encontre uma expressão para a temperatura $u(x, t)$ se a distribuição de temperatura inicial na barra é a função dada. Suponha que $\alpha^2 = 1$.

9. $u(x, 0) = 50, \quad 0 < x < 40$
10. $u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 20, \\ 40 - x, & 20 \le x \le 40 \end{cases}$
11. $u(x, 0) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 10, \\ 50, & 10 \le x \le 30, \\ 0, & 30 < x \le 40 \end{cases}$
12. $u(x, 0) = x, \quad 0 < x < 40$
13. Considere, novamente, a barra do Problema 9. Para $t = 5$ e $x = 20$, determine quantos termos são necessários para encontrar a solução correta até três casas decimais. Um modo razoável de fazer isso é encontrar n tal que a inclusão de mais um termo não muda as três primeiras casas decimais de $u(20, 5)$. Repita para $t = 20$ e $t = 80$. Chegue a alguma conclusão sobre a velocidade de convergência da série que representa $u(x, t)$.
14. Para a barra no Problema 19:
(a) Faça o gráfico de u em função de x para $t = 5, 10, 20, 40, 100$ e 200. Coloque todos os gráficos no mesmo conjunto de eixos obtendo, assim, uma visão de como a distribuição de temperatura muda com o tempo.
(b) Faça o gráfico de u em função de t para $x = 5, 10, 15, 20$.
(c) Desenhe um gráfico tridimensional de u em função de x e de t.
(d) Quanto tempo leva para a barra inteira esfriar e ficar a uma temperatura menor ou igual a 1°C?
15. Siga as instruções no Problema 14 para a barra no Problema 10.
16. Siga as instruções no Problema 14 para a barra no Problema 11.
17. Para a barra no Problema 12:
(a) Faça o gráfico de u em função de x para $t = 5, 10, 20, 40, 100$ e 200.
(b) Para cada valor de t usado no item (a), estime o valor de x para o qual a temperatura é a maior de todas. Faça o gráfico desses valores em função de t para ver como a posição do ponto mais quente na barra muda com o tempo.

(c) Faça o gráfico de u em função de t para $x = 10$, 20 e 30.
(d) Desenhe o gráfico tridimensional de u em função de x e de t.
(e) Quanto tempo leva para a barra inteira esfriar e ficar a uma temperatura menor ou igual a 1°C?

18. Considere uma barra metálica com 20 cm de comprimento aquecida a uma temperatura uniforme de 100°C. Suponha que, em $t = 0$, as extremidades da barra são mergulhadas em um banho gelado a 0°C e, depois, mantidas a essa temperatura, mas não é permitido escapar calor pela superfície lateral. Encontre uma expressão para a temperatura em qualquer ponto da barra em um instante posterior. Determine a temperatura no centro da barra no instante $t = 30$ s se a barra é feita de (a) prata, (b) alumínio, ou (c) ferro fundido.
19. Para a barra do Problema 18, encontre o tempo necessário para que o centro da barra esfrie a uma temperatura de 5°C se a barra é feita de (a) prata, (b) alumínio ou (c) ferro fundido.
20. Ao se resolver equações diferenciais, os cálculos podem ser, quase sempre, simplificados através da utilização **variáveis adimensionais**. Mostre que, se introduzirm os a variável adimensional $\xi = x/L$, a equação do calor fica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{L^2}{\alpha^2}\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < \xi < 1, \quad t > 0.$$

Como L^2/α^2 tem unidades de tempo, é conveniente usar essa quantidade para definir uma variável adimensional $\tau = (\alpha^2/L^2)t$. Mostre que, então, a equação do calor se reduz a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau}, \qquad 0 < \xi < 1, \quad \tau > 0.$$

21. Considere a equação

$$av_{xx} - bv_t + cv = 0, \qquad \text{(i)}$$

onde a, b e c são constantes.
(a) Seja $u(x, t) = e^{\delta t}w(x, t)$, onde δ é constante, e encontre a equação diferencial parcial correspondente para u.
(b) Se $b \neq 0$, mostre que δ pode ser escolhido de modo que a equação diferencial parcial encontrada no item (a) não tem termo em w. Assim, através de uma mudança de variável dependente, é possível reduzir a Eq. (i) à equação do calor.

22. A equação do calor em duas dimensões espaciais é

$$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_t.$$

Supondo que $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$, encontre as equações diferenciais ordinárias que são satisfeitas por $X(x)$, $Y(y)$ e $T(t)$.

23. A equação do calor em duas dimensões espaciais pode ser expressa, em coordenadas polares, na forma

$$\alpha^2[u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta}] = u_t.$$

Supondo que $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, encontre as equações diferenciais ordinárias que são satisfeitas por $R(r)$, $\Theta(\theta)$ e $T(t)$.

10.6 Outros Problemas de Condução de Calor

Na Seção 10.5, consideramos o problema que consiste na equação do calor

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0, \qquad (1)$$

nas condições de contorno

$$u(0, t) = 0, \qquad u(L, t) = 0, \quad t > 0, \qquad (2)$$

e na condição inicial

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \le x \le L. \qquad (3)$$

Vimos que a solução é

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \qquad (4)$$

onde os coeficientes c_n são iguais aos da série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}. \qquad (5)$$

A série na Eq. (5) é, simplesmente, a série de Fourier em senos de f; de acordo com a Seção 10.4, seus coeficientes são dados por

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx. \qquad (6)$$

Logo, a solução do problema de condução de calor, Eqs. (1), (2), (3), é dada pela série na Eq. (4) com os coeficientes calculados pela Eq. (6).

Enfatizamos que, neste estágio, a solução (4) tem que ser considerada como uma solução *formal*, isto é, foi obtida sem a justificativa rigorosa dos processos de limite envolvidos. Tal justificativa está aquém do escopo deste livro. No entanto, uma vez obtida a série (4), é possível mostrar que ela converge em $0 < x < L$, $t > 0$ para uma função contínua, que as derivadas u_{xx} e u_t podem ser calculadas diferenciando a série (4) termo a termo e que a equação de calor (1) é satisfeita, de fato. O argumento depende, fortemente, do fato de que cada termo da série (4) contém um fator exponencial com potência negativa, o que resulta em uma convergência relativamente rápida da série. Um outro argumento estabelece que a função f dada pela Eq. (4) satisfaz, também, as condições de contorno e a condição inicial; isso completa a justificativa da solução formal.

É interessante notar que, embora f satisfaça as condições do teorema de convergência de Fourier (Teorema 10.3.1), ela pode ter pontos de descontinuidade. Nesse caso, a distribuição inicial de temperatura $u(x, 0) = f(x)$ é descontínua em um ou mais pontos. De qualquer jeito, a solução $u(x, t)$ é contínua para valores arbitrariamente pequenos de $t > 0$. Isso ilustra o fato de que a condução de calor é um processo de difusão que suaviza, instantaneamente, quaisquer descontinuidades que possam estar presentes na distribuição inicial de temperatura. Finalmente, como f é limitada, segue da Eq. (6) que os coeficientes c_n também são limitados. Em conseqüência, a presença do fator exponencial com potência negativa em cada termo da série garante que

$$\lim_{t\to\infty} u(x, t) = 0 \qquad (7)$$

para todo x, independentemente da condição inicial. Isso está de acordo com o resultado esperado pela intuição física.

Vamos considerar, agora, dois outros problemas da equação de calor a uma dimensão espacial que podem ser resolvidos pelo método desenvolvido na Seção 10.5.

Condições de Contorno Não-Homogêneas. Suponha que uma das extremidades da barra é mantida a uma temperatura constante T_1 e a outra é mantida a outra temperatura constante, T_2. Então, as condições de contorno são

$$u(0, t) = T_1, \qquad u(L, t) = T_2, \qquad t > 0. \qquad (8)$$

A equação diferencial (1) e a condição inicial (3) permanecem inalteradas.

Esse problema só é ligeiramente mais difícil, devido às condições de contorno não-homogêneas, do que o resolvido na Seção 10.5. Podemos resolvê-lo reduzindo-o a um problema com condições de contorno homogêneas, que pode ser resolvido, então, como na Seção 10.5. A técnica para fazer isso é sugerida pelo argumento físico a seguir.

Depois de muito tempo, isto é, quando $t \to \infty$, antecipamos que será alcançada uma temperatura estacionária $v(x)$, que é independente do tempo t e das condições iniciais. Como $v(x)$ tem que satisfazer a equação de calor (1), temos

$$v''(x) = 0, \qquad 0 < x < L. \tag{9}$$

Logo, a distribuição de temperatura estado estacionário é uma função linear de x. Além disso, $v(x)$ tem que satisfazer as condições de contorno

$$v(0) = T_1, \qquad v(L) = T_2, \tag{10}$$

que são válidas mesmo quando $t \to \infty$. A solução da Eq. (9) satisfazendo as Eqs. (10) é

$$v(x) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1. \tag{11}$$

Retornando ao problema original, Eqs. (1), (3) e (8), vamos tentar expressar $u(x, t)$ como a soma da distribuição estado estacionário $v(x)$ com uma outra distribuição (transiente) $w(x, t)$; escrevemos, então,

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t). \tag{12}$$

Como $v(x)$ é dado pela Eq. (11), o problema será resolvido se pudermos determinar $w(x, t)$. O problema de valores de contorno para $w(x, t)$ é obtido substituindo-se u nas Eqs. (1), (3) e (8) pela expressão na Eq. (12).

Da Eq. (1), temos

$$\alpha^2(v + w)_{xx} = (v + w)_t;$$

segue que

$$\alpha^2 w_{xx} = w_t, \tag{13}$$

já que $v_{xx} = 0$ e $v_t = 0$. Analogamente, das Eqs. (12), (8) e (10),

$$\begin{aligned} w(0, t) &= u(0, t) - v(0) = T_1 - T_1 = 0, \\ w(L, t) &= u(L, t) - v(L) = T_2 - T_2 = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Finalmente, das Eqs. (12) e (3),

$$w(x, 0) = u(x, 0) - v(x) = f(x) - v(x), \tag{15}$$

onde $v(x)$ é dado pela Eq. (11). Assim, a parte transiente da solução do problema original é encontrada resolvendo-se o problema que consiste nas Eqs. (13), (14) e (15). Esse último problema é, precisamente, o discutido na Seção 10.5 considerando $f(x) - v(x)$ como a distribuição inicial de temperatura. Portanto,

$$u(x, t) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \tag{16}$$

onde

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left[f(x) - (T_2 - T_1)\frac{x}{L} - T_1\right] \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx. \tag{17}$$

Esse é um outro caso em que um problema mais difícil é resolvido reduzindo-o a um problema mais simples que já foi solucionado. A técnica de reduzir um problema com condições de contorno não-homogêneas a um com condições de contorno homogêneas, através da subtração da solução estado estacionário, tem ampla aplicação.

Exemplo 1

Considere o problema de condução de calor

$$u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < 30, \quad t > 0, \tag{18}$$

$$u(0, t) = 20, \qquad u(30, t) = 50, \qquad t > 0, \tag{19}$$

$$u(x, 0) = 60 - 2x, \qquad 0 < x < 30. \tag{20}$$

Encontre a distribuição de temperatura estado estacionário e o problema de valores de contorno que determina a solução transiente.

A temperatura estado estacionário satisfaz $v''(x) = 0$ e as condições de contorno $v(0) = 20$ e $v(30) = 50$. Assim, $v(x) = 20 + x$. A solução transiente $w(x, t)$ satisfaz a equação do calor

$$w_{xx} = w_t, \tag{21}$$

as condições de contorno homogêneas

$$w(0, t) = 0, \qquad w(30, t) = 0, \tag{22}$$

e a condição inicial modificada

$$w(x, 0) = 60 - 2x - (20 + x) = 40 - 3x. \tag{23}$$

Note que esse problema é da forma (1), (2), (3) com $f(x) = 40 - 3x$, $\alpha^2 = 1$ e $L = 30$. Logo, a solução é dada pelas Eqs. (4) e (6).

A Fig. 10.6.1 mostra os gráficos da distribuição inicial de temperatura $60 - 2x$, da distribuição final de temperatura $20 + x$, e da temperatura em três instantes intermediários encontrados resolvendo-se as Eqs. (21), (22) e (23). Note que a temperatura intermediária satisfaz as condições de contorno (19) para qualquer $t > 0$. Quando t aumenta, o efeito das condições de contorno move-se, gradualmente, das extremidades da barra para seu centro.

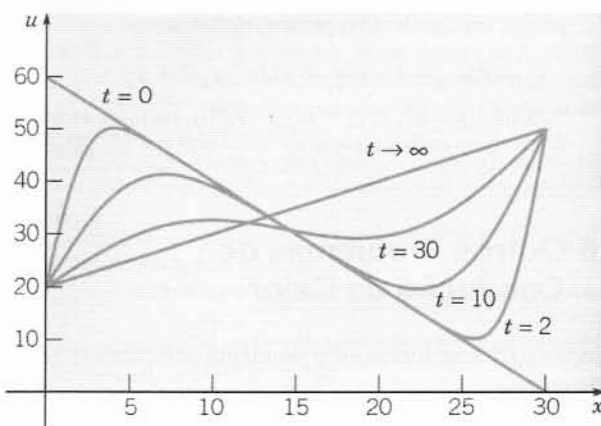


FIG. 10.6.1 Distribuições de temperatura em diversos instantes para o problema de condução do calor do Exemplo 1.

Barra com Extremidades Isoladas. Um problema ligeiramente diferente acontece quando as extremidades da barra estão isoladas, de modo que não há transferência de calor através delas. De acordo com a Eq. (2) no Apêndice A, a taxa de fluxo de calor através de uma seção reta é proporcional à taxa de variação da temperatura na direção x. Assim, no caso de não haver fluxo de calor, as condições de contorno são

$$u_x(0,t) = 0, \qquad u_x(L,t) = 0, \qquad t > 0. \tag{24}$$

O problema posto pelas Eqs. (1), (3) e (24) também pode ser resolvido pelo método de separação de variáveis. Se considerarmos

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{25}$$

e substituirmos essa expressão para u na Eq. (1), segue da Seção 10.5 que

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = -\lambda, \tag{26}$$

onde λ é uma constante. Obtemos, então, novamente, duas equações diferenciais ordinárias

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{27}$$

$$T' + \alpha^2\lambda T = 0. \tag{28}$$

Para qualquer valor de λ, um produto de soluções das Eqs. (27) e (28) é uma solução da equação diferencial parcial (1). Estamos interessados, no entanto, apenas nas soluções que satisfazem, também, as condições de contorno (24).

Substituindo $u(x, t)$ dada pela Eq. (25) na condição de contorno em $x = 0$, obtemos $X'(0)T(t) = 0$. Não podemos permitir que $T(t)$ seja nula para todo t, já que, nesse caso, $u(x, t)$ também seria nula para todo t. Logo, temos que ter

$$X'(0) = 0. \tag{29}$$

Procedendo da mesma maneira com a condição de contorno em $x = L$, vemos que

$$X'(L) = 0. \tag{30}$$

Logo, queremos resolver a Eq. (27) sujeitas às condições de contorno (29) e (30). É possível mostrar que só existem soluções não-triviais desse problema se λ for real. Um modo de fazer isso está indicado no Problema 18; outra maneira é apelar para uma teoria mais geral, que será discutida na Seção 11.2. Vamos supor que λ é real e considerar três casos: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$.

Se $\lambda < 0$, é conveniente fazer $\lambda = -\mu^2$, onde μ é real e positivo. Então a Eq. (27) fica $X'' - \mu^2 X = 0$ e sua solução geral é

$$X(x) = k_1 \operatorname{senh} \mu x + k_2 \cosh \mu x. \tag{31}$$

Nesse caso, as condições de contorno só podem ser satisfeitas escolhendo-se $k_1 = k_2 = 0$. Como isso não é aceitável, λ não pode ser negativo; em outras palavras, o problema (27), (29), (30) não tem autovalores negativos.

Se $\lambda = 0$, então a Eq. (27) fica $X'' = 0$ e, portanto,

$$X(x) = k_1 x + k_2. \tag{32}$$

As condições de contorno (29) e (30) implicam que $k_1 = 0$, mas não determinam k_2. Logo, $\lambda = 0$ é um autovalor associado à autofunção $X(x) = 1$. Para $\lambda = 0$, segue da Eq. (28) que $T(t)$ também é constante, o que pode ser combinado com k_2. Portanto, para $\lambda = 0$, obtemos a solução constante $u(x, t) = k_2$.

Finalmente, se $\lambda > 0$, considere $\lambda = \mu^2$, onde μ é real e positivo. Então, a Eq. (27) fica $X'' + \mu^2 X = 0$ e, em conseqüência,

$$X(x) = k_1 \operatorname{sen} \mu x + k_2 \cos \mu x. \tag{33}$$

A condição de contorno (29) implica que $k_1 = 0$ e a condição de contorno (3) implica que $\mu = n\pi/L$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, mas deixa k_2 arbitrário. Logo, o problema (27), (29), (30) tem uma seqüência infinita de autovalores positivos $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, com autofunções associadas $X(x) = \cos(n\pi x/L)$. Para esses valores de λ, as soluções $T(t)$ da Eq. (28) são proporcionais a $\exp(-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2)$.

Combinando todos esses resultados, temos as seguintes soluções fundamentais para o problema (1), (3), (24):

$$\begin{aligned} u_0(x,t) &= 1, \\ u_n(x,t) &= e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \cos \frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{34}$$

onde retiramos as constantes de proporcionalidade. Cada uma dessas funções satisfaz a equação diferencial (1) e as condições de contorno (24). Como tanto a equação diferencial quanto as condições de contorno são lineares e homogêneas, qualquer combinação linear finita de soluções fundamentais as satisfazem. Vamos supor que isso também é verdade para uma combinação linear infinita convergente de soluções fundamentais. Então, para que a condição inicial (3) seja satisfeita, vamos supor que $u(x, t)$ tem a forma

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{c_0}{2} u_0(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) \\ &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \cos \frac{n\pi x}{L}. \end{aligned} \tag{35}$$

Os coeficientes c_n são determinados pela condição

$$u(x,0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L} = f(x). \tag{36}$$

Logo, os coeficientes desconhecidos na Eq. (35) têm que ser os coeficientes da série de Fourier em co-senos de período $2L$ de f. Portanto,

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{37}$$

Com essa escolha dos coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots$, a série (35) é solução do problema de condução de calor para uma barra com extremidades isoladas, Eq. (1), (3), (24).

Vale a pena observar que a solução (35) pode, também, ser considerada como a soma de uma distribuição de temperatura estado estacionário (dada pela constante $c_0/2$), independente do tempo t, e uma distribuição transiente (dada pelo resto da série infinita), que tende a zero no limite quando t tende a infinito. O fato de que o estado estacionário é uma constante é consistente com a intuição de que o processo de condução de calor irá, gradualmente, uniformizar a distribuição de temperatura na barra, enquanto não for permitido ao calor escapar para fora. A interpretação física do termo

$$\frac{c_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\, dx \tag{38}$$

é que é o valor médio da distribuição de temperatura original.

Exemplo 2

Encontre a temperatura $u(x, t)$ em uma barra metálica com 25 cm de comprimento, isolada tanto nas extremidades quanto nos lados, cuja distribuição inicial de temperatura é $u(x, 0) = x$ para $0 < x < 25$.

A temperatura na barra satisfaz o problema de condução de calor (1), (3), (24) com $L = 25$. Logo, da Eq. (35), a solução é

$$u(x,t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/625} \cos\frac{n\pi x}{25}, \tag{39}$$

onde os coeficientes são determinados pela Eq. (37). Temos

$$c_0 = \frac{2}{25}\int_0^{25} x\,dx = 25 \tag{40}$$

e, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{25}\int_0^{25} x\cos\frac{n\pi x}{25}\,dx \\ &= 50(\cos n\pi - 1)/(n\pi)^2 = \begin{cases} -100/(n\pi)^2, & n \text{ ímpar;} \\ 0, & n \text{ par.} \end{cases} \end{aligned} \tag{41}$$

Portanto,

$$u(x,t) = \frac{25}{2} - \frac{100}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/625}\cos(n\pi x/25) \tag{42}$$

é a solução do problema dado.

Para $\alpha^2 = 1$, a Fig. 10.6.2 mostra gráficos da distribuição de temperatura na barra em diversos instantes. Novamente, a convergência da série é tão rápida que basta um número relativamente pequeno de termos para gerar os gráficos.

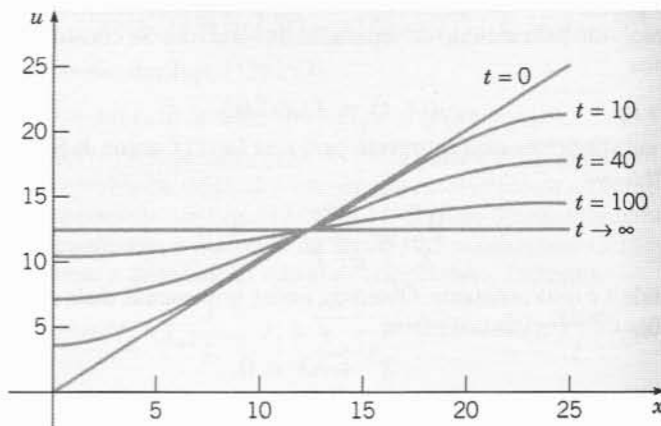


FIG. 10.6.2 Distribuições de temperatura em diversos instantes para o problema de condução de calor do Exemplo 2.

Problemas Mais Gerais. O método de separação de variáveis também pode ser usado para resolver problemas de condução de calor com outras condições de contorno diferentes das dadas pelas Eqs. (8) e (24). Por exemplo, a extremidade esquerda da barra pode ser mantida a uma temperatura fixa T, enquanto a outra extremidade está isolada. Nesse caso, as condições de contorno são

$$u(0,t) = T, \qquad u_x(L,t) = 0, \qquad t > 0. \tag{43}$$

O primeiro passo para se resolver esse problema é reduzir as condições de contorno dadas as condições homogêneas, subtraindo-se a solução estado estacionário. O problema resultante é resolvido, essencialmente, pelo mesmo método usado nos problemas considerados anteriormente. No entanto, a extensão da função inicial f fora do intervalo $[0, L]$ é um pouco diferente das extensões consideradas até agora (veja o Problema 15).

Um tipo mais geral de condições de contorno ocorre quando o fluxo de calor nas extremidades da barra é proporcional à temperatura. Demonstra-se, no Apêndice A, que as condições de contorno nesse caso são da forma

$$u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = 0, \qquad u_x(L,t) + h_2 u(L,t) = 0,$$
$$t > 0, \tag{44}$$

onde h_1 e h_2 são constantes não-negativas. Se aplicarmos o método de separação de variáveis ao problema que consiste nas Eqs. (1), (3) e (44), encontramos que $X(x)$ tem que ser solução de

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X'(0) - h_1 X(0) = 0,$$
$$X'(L) + h_2 X(L) = 0, \tag{45}$$

onde λ é uma constante de separação. Mais uma vez, é possível mostrar que só existem soluções não-triviais para determinados valores reais não-negativos de λ, os autovalores, mas esses valores não são dados por uma fórmula simples (veja o Problema 20). Também é possível mostrar que as soluções correspondentes das Eqs. (45), as autofunções, satisfazem uma relação de ortogonalidade e que pode-se satisfazer a condição inicial (3) superpondo-se as soluções das Eqs. (45). No entanto, a série resultante não está incluída nas discussões deste capítulo. Existe uma teoria mais geral que cobre tais problemas e está esquematizada no Cap. 11.

Problemas

Nos problemas de 1 a 8, encontre a solução estado estacionário da equação do calor $\alpha^2 u_{xx} = u_t$ que satisfaz o conjunto dado de condições de contorno.

1. $u(0, t) = 10, \quad u(50, t) = 40$
2. $u(0, t) = 30, \quad u(40, t) = -20$
3. $u_x(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$
4. $u_x(0, t) = 0, \quad u(L, t) = T$
5. $u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0$
6. $u(0, t) = T, \quad u_x(L, t) = 0$
7. $u_x(0, t) - u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = T$
8. $u(0, t) = T, \quad u_x(L, t) + u(L, t) = 0$



9. Considere uma barra de alumínio, com 20 cm de comprimento, inicialmente a uma temperatura uniforme de 25°C. Suponha que, no instante $t = 0$, a extremidade $x = 0$ é esfriada a 0°C, enquanto a extremidade $x = 20$ é aquecida a 60°C e ambas são mantidas, daí para a frente, a essas temperaturas.
(a) Encontre a distribuição de temperatura na barra em qualquer instante t.
(b) Faça os gráficos da distribuição inicial de temperatura, da distribuição final (estado estacionário) e de duas distribuições

em dois instantes representativos intermediários no mesmo conjunto de eixos.
(c) Faça o gráfico de u em função de t para $x = 5$, 10 e 15.
(d) Determine o tempo necessário para que a temperatura em $x = 5$ cm alcance (e permaneça) em um intervalo de 1% em torno de seu valor estado estacionário.

10. (a) Suponha que as extremidades de uma barra de cobre com 100 cm de comprimento são mantidas a 0°C. Suponha que o centro da barra é aquecido a 100°C por uma fonte externa de calor e que essa situação é mantida até resultar em um estado estacionário. Encontre essa distribuição de temperatura estado estacionário.
(b) Suponha que a fonte externa é removida em um instante $t = 0$ [depois de atingido o estado estacionário do item (a)]. No mesmo instante, suponha que a extremidade $x = 0$ é colocada em contato com um reservatório a 20°C e que a outra extremidade permanece a 0°C. Encontre a temperatura em função da posição e do tempo.
(c) Faça o gráfico de u em função de x para diversos valores de t. Faça, também, o gráfico de u em função de t para diversos valores de x.
(d) A que valor limite tende a temperatura no centro da barra depois de um longo tempo? Depois de quanto tempo o centro da barra esfria, ficando a 1° de seu valor limite?

11. Considere uma barra de 30 cm de comprimento para a qual $\alpha^2 = 1$. Suponha que a distribuição inicial de temperatura é dada por $u(x, 0) = x(60 - x)/30$ e que as condições de contorno são $u(0, t) = 30$ e $u(30, t) = 0$.
(a) Encontre a temperatura na barra em função da posição e do tempo.
(b) Faça o gráfico de u em função de x para diversos valores de t. Faça, também, o gráfico de u em função de t para diversos valores de x.
(c) Faça o gráfico de u em função de t para $x = 12$. Observe que u inicialmente diminui, depois cresce por um tempo e, finalmente, diminui para alcançar seu valor estado estacionário. Explique, fisicamente, por que ocorre esse comportamento nesse ponto.

12. Considere uma barra uniforme de comprimento L a uma temperatura inicial dada por $u(x, 0) = \text{sen}(\pi x/L)$, $0 \leq x \leq L$. Suponha que ambas as extremidades estão isoladas.
(a) Encontre a temperatura $u(x, t)$.
(b) Qual é a temperatura estado estacionário quando $t \to \infty$?
(c) Sejam $\alpha^2 = 1$ e $L = 40$. Faça o gráfico de u em função de x para diversos valores de t. Faça, também, o gráfico de u em função de t para diversos valores de x.
(d) Descreva, em poucas palavras, como a temperatura na barra varia com o passar do tempo.

13. Considere uma barra com 40 cm de comprimento cuja temperatura inicial é dada por $u(x, 0) = x(60 - x)/30$. Suponha que $\alpha^2 = 1/4$ cm²/s e que ambas as extremidades da barra estão isoladas.
(a) Encontre a temperatura $u(x, t)$.
(b) Faça o gráfico de u em função de x para diversos valores de t. Faça, também, o gráfico de u em função de t para diversos valores de x.
(c) Determine a temperatura estado estacionário na barra.
(d) Determine o intervalo de tempo necessário para que a temperatura em $x = 40$ fique a 1° de seu valor estado estacionário.

14. Considere uma barra com 30 cm de comprimento, feita de um material para o qual $\alpha^2 = 1$, e cujas extremidades estão isoladas. Suponha que a temperatura inicial é zero, exceto no intervalo $5 < x < 10$, onde é 25°.
(a) Encontre a temperatura $u(x, t)$.
(b) Faça o gráfico de u em função de x para diversos valores de t. Faça, também, o gráfico de u em função de t para diversos valores de x.
(c) Faça o gráfico de $u(4, t)$ e $u(11, t)$ em função de t. Observe que os pontos $x = 4$ e $x = 11$ estão localizados simetricamente em relação ao pulso inicial, embora os gráficos de suas respectivas temperaturas sejam bem diferentes. Explique fisicamente por que isso acontece.

15. Considere uma barra uniforme de comprimento L com distribuição inicial de temperatura dada por $f(x)$, $0 \leq x \leq L$. Suponha que a temperatura na extremidade $x = 0$ é mantida a 0°C, enquanto a extremidade $x = L$ está isolada, de modo que não há fluxo de calor através dela.
(a) Mostre que as soluções fundamentais da equação diferencial parcial e das condições de contorno são

$$u_n(x, t) = e^{-(2n-1)^2\pi^2\alpha^2 t/4L^2}\text{sen}[(2n-1)\pi x/2L],\ n = 1, 2, 3, \ldots.$$

(b) Encontre uma expansão em série formal para a temperatura $u(x, t)$,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t),$$

que satisfaça, também, a condição inicial $u(x, 0) = f(x)$.
Sugestão: Embora as soluções fundamentais envolvam apenas senos ímpares, ainda é possível representar f por uma série de Fourier em senos envolvendo apenas essas funções. Veja o Problema 39 da Seção 10.4.

16. Na barra do Problema 15, suponha que $L = 30$, que $\alpha^2 = 1$ e que a distribuição inicial de temperatura é $f(x) = 30 - x$ para $0 < x < 30$.
(a) Encontre a temperatura $u(x, t)$.
(b) Faça o gráfico de u em função de x para diversos valores de t. Faça, também, o gráfico de u em função de t para diversos valores de x.
(c) Como muda a localização do ponto mais quente da barra x_m quando t aumenta? Desenhe o gráfico de x_m em função de t.
(d) Faça o gráfico da temperatura máxima na barra em função de t.

17. Suponha que as condições são como nos Problemas 15 e 16, exceto que a condiçãn ‹e contorno em $x = 0$ é $u(0, t) = 40$.
(a) Encontre a temperatura $u(x, t)$.
(b) Faça o gráfico de u em função de x para diversos valores de t. Faça, também, o gráfico de u em função de t para diversos valores de x.
(c) Compare os gráficos obtidos neste problema com os do Problema 16. Explique como a mudança na condição de contorno em $x = 0$ causa as diferenças observadas no comportamento da temperatura na barra.

18. Considere o problema

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X'(0) = 0, \qquad X'(L) = 0. \qquad \text{(i)}$$

Seja $\lambda = \mu^2$, onde $\mu = \nu + i\sigma$, com ν e σ reais. Mostre que, se $\sigma \neq 0$, então a única solução das Eqs. (i) é a solução trivial $X(x) = 0$.
Sugestão: Use um argumento semelhante ao do Problema 23 da Seção 10.1.

19. A extremidade direita de uma barra de comprimento a com condutividade térmica κ_1 e área de seção reta A_1 é juntada à extremidade esquerda de uma barra com condutividade térmica κ_2 e área de seção reta A_2. A barra composta tem comprimento total L. Suponha que a extremidade $x = 0$ é mantida a temperatura zero, enquanto a extremidade $x = L$ é mantida a temperatura T. Encontre a temperatura estado estacionário na barra composta, supondo que a temperatura e a taxa de fluxo de calor são contínuas em $x = a$.
Sugestão: Veja a Eq. (2) no Apêndice A.

20. Considere o problema

$$\begin{aligned} \alpha^2 u_{xx} &= u_t, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0; \\ u(0, t) = 0, \qquad u_x(L, t) + \gamma u(L, t) &= 0, \quad t > 0; \qquad \text{(i)} \\ u(x, 0) &= f(x), \qquad 0 \leq x \leq L. \end{aligned}$$

(a) Seja $u(x, t) = X(x)T(t)$ e mostre que

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X'(L) + \gamma X(L) = 0, \quad \text{(ii)}$$

e

$$T' + \lambda\alpha^2 T = 0,$$

onde λ é uma constante de separação.

(b) Suponha que λ é real e mostre que o problema (ii) não tem soluções não-triviais se $\lambda \leq 0$.
(c) Se $\lambda > 0$, seja $\lambda = \mu^2$ com $\mu > 0$. Mostre que o problema (ii) só tem soluções não-triviais se μ for solução da equação

$$\mu \cos \mu L + \gamma \operatorname{sen} \mu L = 0. \quad \text{(iii)}$$

(d) Reescreva a Eq. (iii) como $\operatorname{tg}(\mu L) = -\mu/\gamma$. Depois, desenhando os gráficos de $y = \operatorname{tg}(\mu L)$ e de $y = -\mu L/\gamma L$ para $\mu > 0$ no mesmo conjunto de eixos, mostre que a Eq. (iii) é satisfeita por uma infinidade de valores positivos para μ; denote esses valores por $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$, ordenados em ordem crescente.
(e) Determine o conjunto de soluções fundamentais $u_n(x, t)$ correspondente aos valores μ_n encontrados no item (d).

Uma Fonte de Calor Externa. Considere o problema de condução de calor em uma barra em contato térmico com uma fonte ou um sorvedouro de calor. Então a equação de calor modificada é

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + s(x), \quad \text{(i)}$$

onde a parcela $s(x)$ descreve o efeito do fator externo; $s(x)$ é positiva no caso de uma fonte e negativa no caso de um sorvedouro. Suponha que as condições de contorno são

$$u(0,t) = T_1, \qquad u(L,t) = T_2 \quad \text{(ii)}$$

e que a condição inicial é

$$u(x,0) = f(x). \quad \text{(iii)}$$

Os problemas de 21 até 23 tratam desse tipo de problema.

21. Escreva $u(x, t) = v(x) + w(x, t)$, onde v e w são, respectivamente, a parte estado estacionário e a parte transiente da solução. Enuncie os problemas de contorno que $v(x)$ e $w(x, t)$, respectivamene, satisfazem. Observe que o problema para w é o problema de condução de calor fundamental discutido na Seção 10.5 com uma distribuição inicial de temperatura modificada.
22. (a) Suponha que $\alpha^2 = 1$ e que $s(x) = k$, uma constante, na Eq. (i). Encontre $v(x)$.
(b) Suponha que $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $L = 20$, $k = 1/5$ e $f(x) = 0$ para $0 < x < L$. Determine $w(x, t)$. Depois faça o gráfico de $u(x, t)$ em função de x para diversos valores de t; no mesmo conjunto de eixos faça o gráfico, também, da parte estado estacionário da solução $v(x)$.
23. (a) Sejam $\alpha^2 = 1$ e $s(x) = kx/L$, onde k é uma constante. Encontre $v(x)$.
(b) Suponha que $T_1 = 10$, $T_2 = 30$, $L = 20$, $k = 1/2$ e $f(x) = 0$ para $0 < x < L$. Determine $w(x, t)$. Depois faça o gráfico de $u(x, t)$ em função de x para diversos valores de t; no mesmo conjunto de eixos faça o gráfico, também, da parte estado estacionário da solução $v(x)$.

10.7 A Equação de Onda: Vibrações de uma Corda Elástica

Uma segunda equação diferencial parcial que ocorre com freqüência em matemática aplicada é a equação de onda.[10] Alguma forma dessa equação, ou uma generalização, quase que inevitavelmente aparece em qualquer análise matemática de fenômenos envolvendo a propagação de ondas em um meio contínuo. Por exemplo, estudos de ondas acústicas, ondas de água, ondas eletromagnéticas e ondas sísmicas baseiam-se, todos, nessa equação.

Talvez a situação mais fácil de visualizar seja a investigação de vibrações mecânicas. Suponha que uma corda elástica de comprimento L esteja ligeiramente esticada entre dois suportes no mesmo nível horizontal, de modo que o eixo dos x esteja ao longo da corda (veja a Fig. 10.7.1). Pode-se pensar nessa corda elástica como sendo uma corda de violino, ou um esteio, ou, possivelmente, um cabo de força. Suponha que a corda é colocada em movimento (puxando-se, por exemplo) de modo que vibra em um plano vertical, e denote por $u(x, t)$ o deslocamento vertical da corda no ponto x no instante t. Se são desprezados os efeitos de amortecimento, como a resistência do ar, e se a amplitude do movimento não é muito grande, então $u(x, t)$ satisfaz a equação diferencial parcial

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \quad (1)$$

no domínio $0 < x < L$, $t > 0$. A Eq. (1) é conhecida como a **equação de onda** em uma dimensão e está deduzida no Apêndice B ao final deste capítulo. O coeficiente constante a^2 que aparece na Eq. (1) é dado por

$$a^2 = T/\rho, \quad (2)$$

onde T é a tensão (força) na corda e ρ é a massa por unidade de comprimento do material da corda. Então, a tem unidades de comprimento/tempo — isto é, de velocidade. O Problema 14 mostra que a é a velocidade de propagação das ondas ao longo da corda.

Para descrever, completamente, o movimento da corda, é necessário especificar, também, condições de contorno e iniciais adequadas para o deslocamento $u(x, t)$. Supõe-se que as extremidades permanecem fixas, logo as condições de contorno são

$$u(0, t) = 0, \qquad u(L, t) = 0, \qquad t \geq 0. \quad (3)$$

Como a equação diferencial (1) é de segunda ordem em relação a t, parece razoável descrever duas condições iniciais. Elas são a posição inicial da corda,

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \leq x \leq L, \quad (4)$$

e sua velocidade inicial,

$$u_t(x, 0) = g(x), \qquad 0 \leq x \leq L, \quad (5)$$

onde f e g são funções dadas. Para que as Eqs. (3), (4) e (5) sejam consistentes, é necessário, também, supor que

$$f(0) = f(L) = 0, \qquad g(0) = g(L) = 0. \quad (6)$$

O problema matemático, então, é determinar a solução da equação de onda (1) que satisfaz, também, as condições de contorno (3) e as condições iniciais (4) e (5). Como o problema de condução de calor das Seções 10.5 e 10.6, esse é um problema

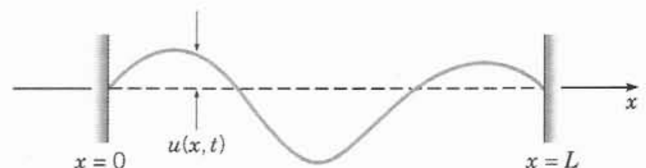


FIG. 10.7.1 Uma corda vibrante.

[10] A solução da equação de onda foi um dos principais problemas matemáticos de meados do século XVIII. A equação de onda foi deduzida e estudada pela primeira vez por D'Alembert em 1746. Atraiu, também, a atenção de Euler (1748), Daniel Bernoulli (1753) e Lagrange (1759). Foram obtidas soluções de formas diferentes e os méritos de cada uma, e relações entre elas, eram discutidas, algumas vezes acaloradamente, em uma série de artigos durante mais de 25 anos. Os pontos principais em discussão tratavam da natureza de uma função e dos tipos de funções que podem ser representadas por séries trigonométricas. Essas questões não foram resolvidas até o século XIX.

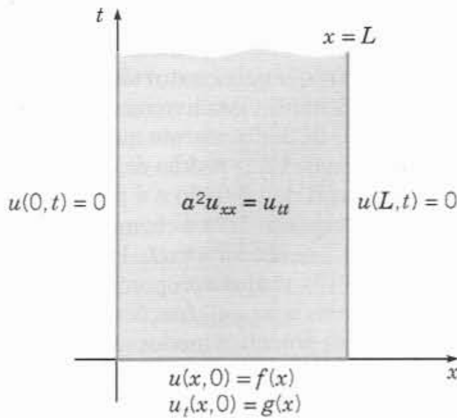


FIG. 10.7.2 Problema de valores de contorno para a equação de onda.

de valor inicial na variável temporal t e um problema de valores de contorno na variável espacial x. De outro ponto de vista, também pode ser considerado como um problema de valores de contorno na faixa semi-infinita $0 < x < L$, $t > 0$ no plano xt (veja a Fig. 10.7.2). São impostas uma condição em cada ponto dos lados semi-infinitos e duas condições em cada ponto da base finita.

É importante compreender que a Eq. (1) modela um número grande de outros problemas ondulatórios, além das vibrações transversas de uma corda elástica. Por exemplo, basta interpretar a função u e a constante a apropriadamente para se ter problemas que tratam de ondas em um oceano, ondas acústicas ou eletromagnéticas na atmosfera, ou ondas elásticas em um corpo sólido. Se o problema tiver mais de uma dimensão espacial significativa, então a Eq. (1) tem que ser ligeiramente generalizada. A equação de onda a duas dimensões é

$$a^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_{tt}. \tag{7}$$

Essa equação apareceria, por exemplo, se considerássemos o movimento de uma superfície fina elástica, como a superfície de um tambor. Analogamente, em três dimensões, a equação de ondas é

$$a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_{tt}. \tag{8}$$

Em conexão com essas duas últimas equações, as condições de contorno e iniciais também têm que ser generalizadas de maneira adequada.

Vamos resolver, agora, alguns problemas de valores de contorno típicos envolvendo a equação de onda unidimensional.

Corda Elástica com Deslocamento Inicial Não-Nulo. Suponha, primeiro, que a corda é deslocada em relação a sua posição de equilíbrio e solta, depois, no instante $t = 0$, com velocidade nula, para vibrar livremente. Então, o deslocamento vertical $u(x, t)$ tem que satisfazer a equação de onda (1),

$$a^2u_{xx} = u_{tt}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0;$$

as condições de contorno (3),

$$u(0, t) = 0, \qquad u(L, t) = 0, \qquad t \geq 0;$$

e as condições iniciais

$$u(x, 0) = f(x), \qquad u_t(x, 0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq L, \tag{9}$$

onde f é uma função dada que descreve a configuração da corda em $t = 0$.

O método de separação de variáveis pode ser usado para se obter a solução das Eqs. (1), (3) e (9). Supondo que

$$u(x, t) = X(x)T(t) \tag{10}$$

e substituindo u na Eq. (1), obtemos

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = -\lambda, \tag{11}$$

onde λ é uma constante de separação. Vemos, então, que $X(x)$ e $T(t)$ satisfazem as equações diferenciais

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{12}$$

$$T'' + a^2\lambda T = 0. \tag{13}$$

Além disso, substituindo $u(x, t)$ nas condições de contorno (3) pela expressão na Eq. (10), vemos que $X(x)$ tem que satisfazer as condições de contorno

$$X(0) = 0, \qquad X(L) = 0. \tag{14}$$

Finalmente, usando a Eq. (10) na segunda das condições iniciais (9), vemos, também, que $T(t)$ tem que satisfazer a condição inicial

$$T'(0) = 0. \tag{15}$$

Nossa próxima tarefa é determinar $X(x)$, $T(t)$ e λ resolvendo a Eq. (12) sujeita às condições de contorno (14) e a Eq. (13) sujeita à condição inicial (15).

O problema de resolver a equação diferencial (12) sujeita às condições de contorno (14) é *precisamente o mesmo problema* que apareceu na Seção 10.5 em conexão com um problema de condução de calor. Podemos, então, usar os resultados obtidos ali e no final da Seção 10.1: os problemas (12) e (14) têm soluções não-triviais se, e somente se, λ é um autovalor,

$$\lambda = n^2\pi^2/L^2, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

e $X(x)$ é proporcional às autofunções correspondentes $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$.

Usando os valores de λ dados pela Eq. (16) na Eq. (13), obtemos

$$T'' + \frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}T = 0. \tag{17}$$

Portanto,

$$T(t) = k_1 \cos\frac{n\pi at}{L} + k_2 \operatorname{sen}\frac{n\pi at}{L}, \tag{18}$$

onde k_1 e k_2 são constantes arbitrárias. A condição inicial (15) implica que $k_2 = 0$, logo $T(t)$ tem que ser proporcional a $\cos(n\pi at/L)$.

Logo, as funções

$$u_n(x, t) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi at}{L}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

satisfazem a equação diferencial parcial (1), as condições de contorno (3) e a segunda condição inicial em (9). Essas funções são as soluções fundamentais do problema dado.

Para satisfazer a condição inicial (não-homogênea) que falta, vamos considerar uma superposição das soluções fundamentais (19) com coeficientes escolhidos adequadamente. Supomos, então, que $u(x, t)$ tem a forma

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi at}{L}, \tag{20}$$

onde as constantes c_n ainda têm que ser escolhidas. A condição inicial $u(x, 0) = f(x)$ implica que

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} = f(x). \qquad (21)$$

Em conseqüência, os coeficientes c_n têm que ser os coeficientes na série de Fourier em senos de f com período $2L$; portanto,

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots. \qquad (22)$$

Logo, a solução formal do problema formado pelas Eqs. (1), (3), (9) é dada pela Eq. (20) com os coeficientes calculados pela Eq. (22).

Para um valor fixo de n, a expressão $\operatorname{sen}(n\pi x/L)\cos(n\pi at/L)$ na Eq. (19) é periódica no tempo com período $2L/na$; ela representa, portanto, um movimento vibratório da corda com esse período, ou com freqüência $n\pi a/L$. As quantidades $\lambda a = n\pi a/L$ para $n = 1, 2, \ldots$, são as **freqüências naturais** da corda — isto é, freqüências nas quais a corda vibra livremente. O fator $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$ representa o padrão de deslocamento que ocorre na corda ao vibrar na freqüência dada. Cada padrão de deslocamento é chamado um **modo natural** de vibração e é periódico na variável espacial x; o período espacial $2L/n$ é chamado o **comprimento de onda** do modo de freqüência $n\pi a/L$. Logo, os autovalores $n^2\pi^2/L^2$ do problema (12), (14) são proporcionais aos quadrados das freqüências naturais e as autofunções $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$ dão os modos naturais. Os três primeiros modos naturais estão esboçados na Fig. 10.7.3. O movimento total da corda, dado pela função $u(x, t)$ na Eq. (20) é, portanto, uma combinação dos modos naturais de vibração e, também, uma função periódica no tempo com período $2L/a$.

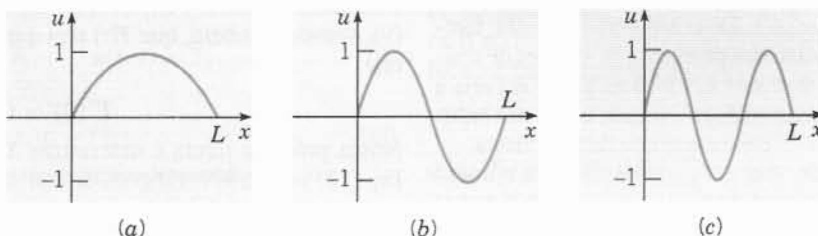


FIG. 10.7.3 Os três primeiros modos fundamentais de vibração de uma corda elástica. (a) Freqüência = $\pi a/L$, comprimento de onda = $2L$; (b) freqüência = $2\pi a/L$, comprimento de onda = L; (c) freqüência = $3\pi a/L$, comprimento de onda = $2L/3$.

Exemplo 1

Considere uma corda vibrante de comprimento $L = 30$ que satisfaz a equação de onda

$$4u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < 30, \quad t > 0 \qquad (23)$$

Suponha que as extremidades da corda estão fixas e que a corda é colocada em movimento sem velocidade inicial e da posição inicial

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} x/10, & 0 \le x \le 10, \\ (30 - x)/20, & 10 < x \le 30. \end{cases} \qquad (24)$$

Encontre o deslocamento $u(x, t)$ da corda e descreva seu movimento durante um período.

A solução é dada pela Eq. (20) com $a = 2$ e $L = 30$, isto é,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{30}\cos\frac{2n\pi t}{30}, \qquad (25)$$

onde c_n é calculado pela Eq. (22). Usando a Eq. (24) na Eq. (22), obtemos

$$c_n = \frac{2}{30}\int_0^{10} \frac{x}{10}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{30}\,dx + \frac{2}{30}\int_{10}^{30}\frac{30 - x}{20}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{30}\,dx. \qquad (26)$$

Calculando as integrais na Eq. (26), encontramos

$$c_n = \frac{9}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{3}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \qquad (27)$$

A solução (25), (27) fornece o deslocamento da corda em qualquer ponto x em qualquer instante t. O movimento é periódico no tempo com período 30, de modo que basta analisar a solução para $0 \le t \le 30$.

A melhor maneira de visualizar a solução é por animação computacional, mostrando o comportamento dinâmico da corda vibrante. Indicamos, aqui, o movimento da corda nas Figs. 10.7.4, 10.7.5 e 10.7.6. A Fig. 10.7.4 mostra gráficos de u em função de x para t = 0; 4; 7,5; 11 e 15. Observe que o deslocamento inicial máximo é positivo e ocorre em $x = 10$, enquanto em $t = 15$, meio período mais tarde, o deslocamento máximo é negativo e ocorre em $x = 20$. A corda, então, refaz seu movimento e volta à configuração original em $t = 30$. A Fig. 10.7.5 mostra o comportamento dos pontos x = 10, 15 e 20 através dos gráficos de u em função de t para esses valores fixos de x. Os gráficos confirmam que o movimento é, de fato, periódico com período 30. Note, também, que cada ponto interior na corda fica parado durante um terço de cada período. A Fig. 10.7.6 mostra um gráfico tridimensional de u em função de x e de t, no qual fica aparente a natureza global da solução. É claro que as curvas nas Figs. 10.7.4 e 10.7.5 pertencem à superfície ilustrada na Fig. 10.7.6.

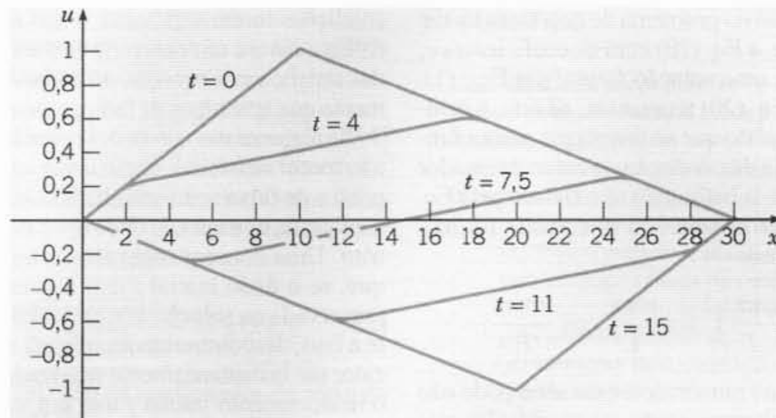


FIG. 10.7.4 Gráficos de u em função de x para valores fixos de t para a corda no Exemplo 1.

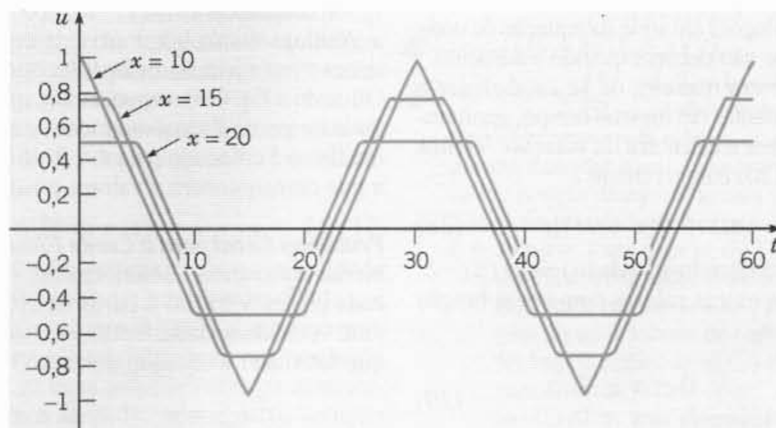


FIG. 10.7.5 Gráficos de u em função de t para valores fixos de x para a corda no Exemplo 1.

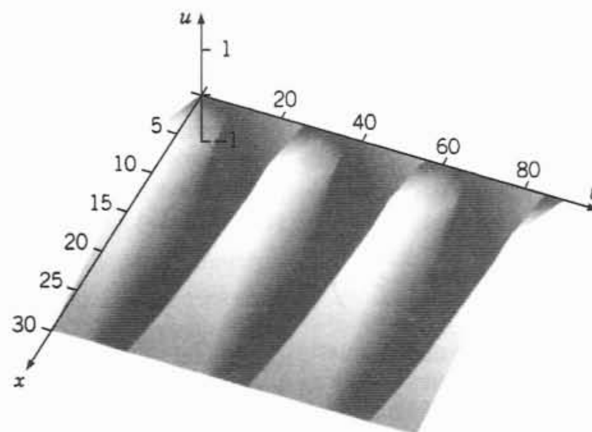


FIG. 10.7.6 Gráfico de u em função de x e de t para a corda no Exemplo 1.

Justificativa da Solução. Como no problema de condução de calor considerado anteriormente, a Eq. (20) com os coeficientes c_n dados pela Eq. (22) é, apenas, uma solução *formal* das Eqs. (1), (3) e (9). Para garantir que a Eq. (20) representa, *de fato*, a solução do problema dado é necessário que se investigue mais a fundo. Como no caso do problema de condução de calor, é tentador tentar mostrar isso diretamente substituindo $u(x, t)$ dado pela Eq. (20) nas Eqs. (1), (3) e (9). No entanto, ao se calcular formalmente u_{xx}, por exemplo, obtemos

$$u_{xx}(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi at}{L};$$

devido à presença do fator n^2 no numerador, essa série pode não convergir. Isso não significa, necessariamente, que a série (20) para $u(x, t)$ esteja errada, mas apenas que ela não pode ser usada para calcular u_{xx} e u_{tt}. Uma diferença básica entre soluções da equação de onda e da equação do calor é que a última contém exponenciais com potências negativas que tendem a zero rapidamente quando n aumenta, o que garante a convergência da série solução e de suas derivadas. Por outro lado, as soluções em série da equação de onda contêm termos oscilatórios que não decaem quando n aumenta.

Existe, no entanto, uma outra maneira de se estabelecer a validade da Eq. (20) indiretamente. Ao mesmo tempo, ganharemos informação adicional sobre a estrutura da solução. Vamos mostrar, primeiro, que a Eq. (20) é equivalente a

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}[h(x-at) + h(x+at)], \tag{28}$$

onde h é uma função obtida estendendo-se o dado inicial f a $(-L, 0)$ como uma função ímpar e a outros valores como uma função periódica de período $2L$, isto é

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le L, \\ -f(-x), & -L < x < 0; \end{cases} \tag{29}$$

$$h(x+2L) = h(x).$$

Para provar a Eq. (28), note que h tem série de Fourier

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \tag{30}$$

onde c_n é dada pela Eq. (22). Então, usando as identidades trigonométricas para uma soma ou diferença de senos, obtemos

$$h(x-at) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi at}{L} - \cos\frac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi at}{L}\right),$$

$$h(x+at) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi at}{L} + \cos\frac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi at}{L}\right),$$

e a Eq. (28) segue imediatamente, adicionando-se as duas últimas equações. Da Eq. (28), vemos que $u(x, t)$ é contínua para $0 < x < L$, $t > 0$, desde que h seja contínua no intervalo $(-\infty, \infty)$. Para isso, é necessário que f seja contínua no intervalo original $[0, L]$. Analogamente, u é duas vezes continuamente diferenciável em relação a qualquer das duas variáveis em $0 < x < L$, $t > 0$, desde que h seja duas vezes continuamente diferenciável em $(-\infty, \infty)$. Para isso, é necessário que f' e f'' sejam contínuas em $[0, L]$. Além disso, como h'' é a extensão ímpar de f'', precisamos, também, ter $f''(0) = f''(L) = 0$. No entanto, como a derivada de h é a extensão par de f', não são necessárias condições adicionais sobre f'. Se essas condições forem satisfeitas, então u_{xx} e u_{tt} podem ser calculadas da Eq. (28) e é um exercício elementar mostrar que essas derivadas satisfazem a equação de onda. Alguns dos detalhes do argumento que acabamos de indicar são dados nos Problemas 19 e 20.

Se algumas das condições enunciadas no parágrafo precedente não forem satisfeitas, então u não vai ser diferenciável em alguns pontos da faixa semi-infinita $0 < x < L$, $t > 0$ e será, então, uma solução da equação de onda apenas em um sentido um tanto restrito. Uma conseqüência física importante dessa observação é que, se o dado inicial f tem alguma descontinuidade, ela será preservada na solução $u(x, t)$ durante todo o tempo. Em contraste a isso, descontinuidades iniciais no problema de condução de calor são instantaneamente suavizadas (Seção 10.6). Suponha que o deslocamento inicial f tem um salto em $x = x_0$, $0 \le x_0 \le L$. Como h é uma extensão periódica de f, a mesma descontinuidade estará presente em $h(\xi)$ para $\xi = x_0 + 2nL$ e em $\xi = -x_0 + 2nL$, onde n é um inteiro arbitrário. Logo, $h(x - at)$ é descontínua quando $x - at = x_0 + 2nL$ ou quando $x - at = -x_0 + 2nL$. Para um x fixo em $[0, L]$, a descontinuidade, originalmente em x_0, vai reaparecer em $h(x - at)$ nos instantes $t = (x \pm x_0 - 2nL)/a$. Analogamente, $h(x + at)$ é descontínua nos pontos x nos instantes $t = (-x \pm x_0 - 2mL)/a$, onde m é um inteiro arbitrário. Olhando a Eq. (28), segue, então, que a solução $u(x, t)$ é descontínua no ponto dado x em todos esses instantes. Como o problema físico é colocado para $t > 0$, só interessam os valores de m e n que correspondem a valores positivos de t.

Problema Geral para a Corda Elástica. Vamos modificar o problema considerado anteriormente supondo que a corda é colocada em movimento a partir de sua posição de equilíbrio com uma velocidade dada. Então, o deslocamento vertical $u(x, t)$ tem que satisfazer a equação de onda (1),

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \qquad 0 < x < L, \qquad t > 0;$$

as condições de contorno (3),

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0, \qquad t \ge 0;$$

e as condições iniciais

$$u(x,0) = 0, \qquad u_t(x,0) = g(x), \qquad 0 \le x \le L, \tag{31}$$

onde $g(x)$ é a velocidade inicial da corda no ponto x.

A solução desse novo problema pode ser obtida seguindo-se o procedimento descrito anteriormente para o problema (1), (3) e (9). Ao separar as variáveis, vemos que o problema para $X(x)$ é exatamente igual ao anterior. Logo, mais uma vez, $\lambda = n^2\pi^2/L^2$ e $X(x)$ é proporcional a $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$. A equação diferencial para $T(t)$ é, novamente, a Eq. (17), mas a condição inicial associada é, agora,

$$T(0) = 0. \tag{32}$$

correspondendo à primeira das condições iniciais (31). A solução geral da Eq. (17) é dada pela Eq. (18), mas, agora, a condição inicial (32) implica que $k_1 = 0$. Portanto, $T(t)$ agora é proporcional a $\operatorname{sen}(n\pi at/L)$ e as soluções fundamentais para o problema (1), (3) e (31) são

$$u_n(x,t) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi at}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{33}$$

Cada uma das funções $u_n(x, t)$ satisfaz a equação de onda (1), as condições de contorno (3) e a primeira das condições iniciais (31). A conseqüência principal de se usar as condições iniciais (31) em vez de (9) é que o fator dependente do tempo em $u_n(x, t)$ envolve um seno, em vez de um co-seno.

Para satisfazer a condição inicial (não-homogênea) que falta, vamos supor que $u(x, t)$ pode ser expressa como uma combinação linear das soluções fundamentais (33), isto é,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi at}{L}. \quad (34)$$

Para determinar os valores dos coeficientes k_n, derivamos a Eq. (34) em relação a t, igualamos t a zero e usamos a segunda condição inicial em (31); isso nos dá a equação

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{L} k_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} = g(x). \quad (35)$$

Logo, as quantidades $(n\pi a/L)k_n$ são os coeficientes da série de Fourier em senos de período $2L$ de g; portanto,

$$\frac{n\pi a}{L} k_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots. \quad (36)$$

Assim, a Eq. (34), com os coeficientes dados pela Eq. (36), constitui uma solução formal para o problema formado pelas Eqs. (1), (3) e (31). A validade dessa solução formal pode ser estabelecida por argumentos semelhantes aos esquematizados anteriormente para a solução das Eqs. (1), (3) e (9).

Finalmente, vamos considerar o problema que consiste na equação de onda (1), nas condições de contorno (3) e nas condições iniciais gerais (4), (5):

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 < x < L, \quad (37)$$

onde $f(x)$ e $g(x)$ são, respectivamente, a posição e a velocidade iniciais da corda. Embora esse problema possa ser resolvido por separação de variáveis, como nos casos discutidos anteriormente, é importante observar que ele também pode ser resolvido somando-se, simplesmente, as duas soluções obtidas anteriormente. Para mostrar que isso é verdade, seja $v(x, t)$ a solução do problema (1), (3) e (9), e seja $w(x, t)$ a solução do problema (1), (3) e (31). Então, $v(x, t)$ é dada pelas Eqs. (20) e (22), enquanto $w(x, t)$ é dada pelas Eqs. (34) e (36). Seja, agora, $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$; que problema $u(x, t)$ satisfaz? Observe, primeiro, que

$$a^2u_{xx} - u_{tt} = (a^2v_{xx} - v_{tt}) + (a^2w_{xx} - w_{tt}) = 0 + 0 = 0, \quad (38)$$

de modo que $u(x, t)$ satisfaz a equação de onda (1). A seguir, temos

$$u(0,t) = v(0,t) + w(0,t) = 0 + 0 = 0, \quad u(L,t) = v(L,t) + w(L,t) = 0 + 0 = 0, \quad (39)$$

de modo que $u(x, t)$ satisfaz, também, as condições de contorno (3). Finalmente, temos

$$u(x,0) = v(x,0) + w(x,0) = f(x) + 0 = f(x) \quad (40)$$

e

$$u_t(x,0) = v_t(x,0) + w_t(x,0) = 0 + g(x) = g(x). \quad (41)$$

Logo, $u(x, t)$ satisfaz as condições iniciais gerais (37).

Vamos enunciar os resultados que acabamos de obter de outra maneira. Para resolver a equação de onda com as condições iniciais (37), você pode resolver os problemas um pouco mais simples com as condições iniciais (9) e (31), respectivamente, e depois somar essas duas soluções. Esse é um outro uso do princípio de superposição.

Problemas

Considere uma corda elástica de comprimento L cujas extremidades são mantidas fixas. A corda é colocada em movimento sem velocidade inicial de uma posição inicial $u(x, 0) = f(x)$. Nos problemas de 1 a 4, faça os passos descritos a seguir. Considere $L = 10$ e $a = 1$ nos itens de (b) a (d).

(a) Encontre o deslocamento $u(x, t)$ para a posição inicial $f(x)$ dada.
(b) Faça o gráfico de $u(x, t)$ em função de x para $0 \le x \le 10$ e para diversos valores de t entre $t = 0$ e $t = 20$.
(c) Faça o gráfico de $u(x, t)$ em função de t para $0 \le t \le 20$ e para diversos valores de x.
(d) Construa uma animação da solução no tempo por, pelo menos, um período.
(e) Descreva o movimento da corda em poucas frases.

1. $f(x) = \begin{cases} 2x/L, & 0 \le x \le L/2, \\ 2(L-x)/L, & L/2 < x \le L \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} 4x/L, & 0 \le x \le L/4, \\ 1, & L/4 < x < 3L/4, \\ 4(L-x)/L, & 3L/4 \le x \le L \end{cases}$
3. $f(x) = 8x(L-x)^2/L^3$
4. $f(x) = \begin{cases} 1, & L/2 - 1 < x < L/2 + 1 \quad (L > 2), \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Considere uma corda elástica de comprimento L cujas extremidades são mantidas fixas. A corda é colocada em movimento a partir da sua posição de equilíbrio com velocidade inicial $u_t(x, 0) = g(x)$. Nos problemas de 5 a 8, faça os passos descritos a seguir. Considere $L = 10$ e $a = 1$ nos itens de (b) a (d).

(a) Encontre o deslocamento $u(x, t)$ para a função $g(x)$ dada.
(b) Faça o gráfico de $u(x, t)$ em função de x para $0 \le x \le 10$ e para diversos valores de t entre $t = 0$ e $t = 20$.
(c) Faça o gráfico de $u(x, t)$ em função de t para $0 \le t \le 20$ e para diversos valores de x.
(d) Construa uma animação da solução no tempo por, pelo menos, um período.
(e) Descreva o movimento da corda em poucas frases.

5. $g(x) = \begin{cases} 2x/L, & 0 \le x \le L/2, \\ 2(L-x)/L, & L/2 < x \le L \end{cases}$
6. $g(x) = \begin{cases} 4x/L, & 0 \le x \le L/4, \\ 1, & L/4 < x < 3L/4, \\ 4(L-x)/L, & 3L/4 \le x \le L \end{cases}$
7. $g(x) = 8x(L-x)^2/L^3$
8. $g(x) = \begin{cases} 1, & L/2 - 1 < x < L/2 + 1 \quad (L > 2), \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
9. Se uma corda elástica tem uma extremidade solta, a condição de contorno a ser satisfeita aí é $u_x = 0$. Encontre o deslocamento $u(x, t)$ de uma corda elástica de comprimento L, fixa em $x = 0$ e solta em $x = L$, colocada em movimento sem velocidade inicial a partir da posição inicial $u(x, 0) = f(x)$, onde f é uma função dada.
Sugestão: Mostre que as soluções fundamentais para esse problema, satisfazendo todas as condições exceto a condição inicial não-homogênea, são
$$u_n(x,t) = \operatorname{sen}\lambda_n x \cos\lambda_n at,$$
onde $\lambda_n = (2n - 1)\pi/2L$, $n = 1, 2, \ldots$. Compare esse problema com o Problema 15 da Seção 10.6; preste atenção especial à extensão do dado inicial fora do intervalo $[0, L]$.
10. Considere uma corda elástica de comprimento L. A extremidade $x = 0$ é mantida fixa, enquanto a extremidade $x = L$ está solta; logo, as condições de contorno são $u(0, t) = 0$ e $u_x(0, t) = 0$. A corda é colocada em movimento sem ve-

locidade inicial a partir da posição inicial $u(x, 0) = f(x)$, onde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & L/2 - 1 < x < L/2 + 1 \quad (L > 2), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Calcule o deslocamento $u(x, t)$.
(b) Com $L = 10$ e $a = 1$, faça o gráfico de u em função de x para $0 \leq x \leq 10$ e para diversos valores de t. Preste atenção especial aos valores de t entre 3 e 7. Observe como a perturbação inicial é refletida em cada extremidade da corda.
(c) Com $L = 10$ e $a = 1$, faça o gráfico de u em função de t para diversos valores de x.
(d) Construa uma animação da solução no tempo por, pelo menos, um período.
(e) Descreva o movimento da corda em algumas frases.

11. Suponha que a corda no Problema 10 começa a partir da posição inicial $f(x) = 8x(L - x^2)/L^3$. Siga as instruções no Problema 10 para esse novo problema.
12. Podem ser introduzidas variáveis adimensionais na equação de onda $a^2u_{xx} = u_{tt}$ da seguinte maneira: seja $s = x/L$ e mostre que a equação de onda fica
$$a^2u_{ss} = L^2u_{tt}.$$
Depois, mostre que L/a tem dimensão de tempo e pode ser usada, portanto, como a unidade na escala de tempo. Finalmente, defina $\tau = at/L$ e mostre que a equação de onda se reduz a
$$u_{ss} = u_{\tau\tau}.$$

Os Problemas 13 e 14 indicam a forma da solução geral da equação de onda e o significado físico da constante a.

13. Mostre que a equação de onda
$$a^2u_{xx} = u_{tt}$$
pode ser reduzida à forma $u_{\xi\eta} = 0$ pela mudança de variáveis $\xi = x - at$, $\eta = x + at$. Mostre que $u(x, t)$ pode ser escrita como
$$u(x, t) = \phi(x - at) + \psi(x + at),$$
onde ϕ e ψ são funções arbitrárias.
14. Faça o gráfico de $\phi(x - at)$ para $t = 0$, $1/a$, $2/a$ e t_0/a se $\phi(s) = \operatorname{sen} s$. Note que, para qualquer $t \neq 0$, o gráfico de $y = \phi(x - at)$ é igual ao de $y = \phi(x)$ quando $t = 0$, só que deslocado uma distância at no sentido positivo do eixo dos x. Logo, a representa a velocidade na qual uma perturbação move-se ao longo da corda. Qual é a interpretação de $\phi(x + at)$?
15. Um fio de cobre com 5 pés (em torno de 1,5 m) é esticado por uma tensão de 50 lb (em torno de 222 newtons). O fio tem densidade de massa de 0,026 lb/pé (em torno de 0,034 kg/m).
(a) Encontre a velocidade de propagação das ondas transversas no fio.
(b) Encontre as freqüências naturais de vibração.
(c) Se for aumentada a tensão no fio, como vão variar as freqüências naturais? Os modos naturais também mudam?
16. Considere a equação de onda
$$a^2u_{xx} = u_{tt}$$
em um meio unidimensional infinito, sujeita às condições iniciais
$$u(x, 0) = f(x), \qquad u_t(x, 0) = 0, \qquad -\infty < x < \infty.$$
(a) Usando a forma da solução obtida no Problema 13, mostre que ϕ e ψ têm que satisfazer
$$\phi(x) + \psi(x) = f(x),$$
$$-\phi'(x) + \psi'(x) = 0.$$
(b) Resolva as equações do item (a) para ϕ e ψ, mostrando, assim, que
$$u(x, t) = \tfrac{1}{2}[f(x - at) + f(x + at)].$$
Essa forma da solução foi obtida por D'Alembert em 1746.
Sugestão: Note que a equação $\psi'(x) = \phi'(x)$ pode ser resolvida escolhendo-se $\psi(x) = \phi(x) + c$.
(c) Seja
$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
Mostre que
$$f(x - at) = \begin{cases} 2, & -1 + at < x < 1 + at, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
Determine, também, $f(x + at)$.
(d) Esboce o gráfico da solução encontrada no item (b) em $t = 0$, $t = 1/2a$, $t = 1/a$ e $t = 2/a$, obtendo os resultados mostrados na Fig. 10.7.7. Observe que um deslocamento inicial produz duas ondas movendo-se em sentidos opostos e afastando-se da localização inicial; cada onda consiste em metade do deslocamento inicial.
17. Considere a equação de onda
$$a^2u_{xx} = u_{tt}$$
em um meio unidimensional infinito, sujeita às condições iniciais
$$u(x, 0) = 0, \qquad u_t(x, 0) = g(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$
(a) Usando a forma da solução obtida no Problema 13, mostre que
$$\phi(x) + \psi(x) = 0,$$
$$-a\phi'(x) + a\psi'(x) = g(x).$$
(b) Use a primeira das equações no item (a) para mostrar que $\psi'(x) = -\phi'(x)$. Depois, use a segunda equação para mostrar que $-2a\phi'(x) = g(x)$ e, portanto, que
$$\phi(x) = -\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} g(\xi)\,d\xi + \phi(x_0),$$
onde x_0 é arbitrário. Finalmente, determine $\psi(x)$.
(c) Mostre que
$$u(x, t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi.$$
18.. Combinando os resultados dos Problemas 16 e 17, mostre que a solução do problema
$$a^2u_{xx} = u_{tt},$$
$$u(x, 0) = f(x), \qquad u_t(x, 0) = g(x), \qquad -\infty < x < \infty$$
é dada por
$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x - at) + f(x + at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi.$$

Os Problemas 19 e 20 indicam como pode-se mostrar que a solução formal (20), (22) das Eqs. (1), (3) e (9) é, de fato, a solução desse problema.

19. Usando a identidade trigonométrica $\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B)]$, mostre que a solução (20) do problema formado pelas Eqs. (1), (3) e (9) pode ser colocado na forma (28).
20. Seja $h(\xi)$ o deslocamento inicial em $[0, L]$ estendido a $(-L, 0)$ como uma função ímpar e estendido ao resto da reta como uma função periódica de período $2L$. Supondo a continuidade de h e suas derivadas até segunda ordem, mostre, por diferenciação direta, que $u(x, t)$ dada pela Eq. (28) satisfaz a equação de onda (1) e as condições iniciais (9). Note, também, que, como a Eq. (20) satisfaz, claramente, as condições de contorno (3), o mesmo é verdadeiro para a Eq. (28). Comparando a Eq. (28) com a

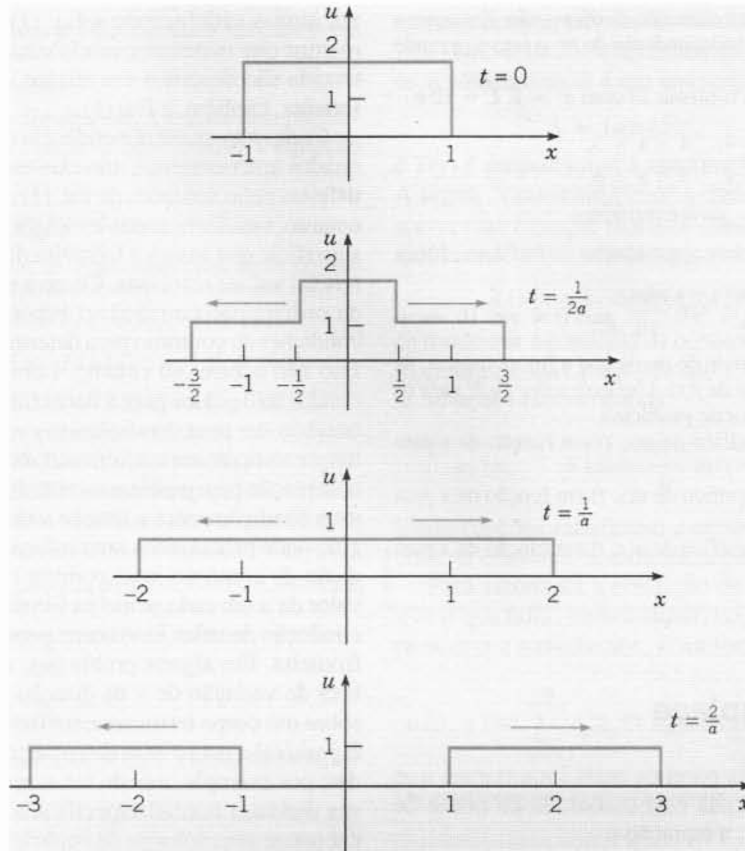


FIG. 10.7.7 Propagação da perturbação inicial em um meio unidimensional infinito.

solução do problema correspondente para a corda infinita (Problema 16), vemos que eles têm a mesma forma, desde que os dados iniciais para a corda finita, definidos, originalmente, apenas no intervalo $[0, L]$, sejam estendidos da maneira indicada para todo o eixo dos x. Se isso for feito, a solução para a corda infinita também é aplicável para a corda finita.

21. O movimento de uma membrana circular elástica, como a membrana de um tambor, é determinada pela equação de onda bidimensional em coordenadas polares

$$u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta} = a^{-2}u_{tt}.$$

Supondo que $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, encontre as equações diferenciais satisfeitas por $R(r)$, $\Theta(\theta)$ e $T(t)$.

22. A energia total $E(t)$ da corda vibrante é dada em função do tempo por

$$E(t) = \int_0^L \left[\tfrac{1}{2}\rho u_t^2(x,t) + \tfrac{1}{2}T u_x^2(x,t)\right] dx; \qquad \text{(i)}$$

o primeiro termo é a energia cinética devida ao movimento da corda e o segundo é a energia potencial criada pelo deslocamento da corda de sua posição de equilíbrio.

Para o deslocamento $u(x, t)$ dado pela Eq. (20), isto é, para a solução do problema da corda com velocidade inicial nula, mostre que

$$E(t) = \frac{\pi^2 T}{4L} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n^2. \qquad \text{(ii)}$$

Note que a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (ii) não depende de t. Logo, a energia total E é constante e, portanto, *preservada* durante o movimento da corda.

Sugestão: Use a equação de Parseval (Problema 37 da Seção 10.4 e Problema 17 da Seção 10.3) e lembre que $a^2 = T/\rho$.

23. **Ondas Dispersivas.** Considere a equação de onda modificada

$$a^{-2}u_{tt} + \gamma^2 u = u_{xx}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0 \qquad \text{(i)}$$

com condições iniciais

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0, \qquad t > 0 \qquad \text{(ii)}$$

e condições iniciais

$$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad 0 < x < L. \qquad \text{(iii)}$$

(a) Mostre que a solução pode ser escrita na forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2} + \gamma^2}\, at\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L},$$

onde

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

(b) Usando identidades trigonométricas, reescreva a solução como

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}(x + a_n t) + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}(x - a_n t)\right].$$

Determine a_n, a velocidade de propagação da onda.

(c) Note que a_n, encontrada no item (b), depende de n. Isso significa que os componentes dos diversos comprimentos de onda (ou freqüência) são propagados em velocidades diferentes, o que resulta em uma distorção da forma original da onda ao longo

do tempo. Esse fenômeno é chamado de **dispersão**. Encontre a condição sob a qual a_n é independente de n — isto é, quando não há dispersão.

24. Considere a situação do Problema 23 com $a^2 = 1$, $L = 10$ e

$$f(x) = \begin{cases} x-4, & 4 \le x \le 5, \\ 6-x, & 5 \le x \le 6, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Determine os coeficientes c_n na solução do Problema 23(a). Fazendo o gráfico de $\sum_{n=1}^{N} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{10}$ para $0 \leqslant x \leqslant 10$, escolha N suficientemente grande de modo que a figura mostre, de maneira precisa, o gráfico de $f(x)$. Use esse valor de N para os demais gráficos pedidos neste problema.
(b) Seja $\gamma = 0$. Faça o gráfico de $u(x, t)$ em função de x para $t = 60$.
(c) Seja $\gamma = 1/8$. Faça o gráfico de $u(x, t)$ em função de x para $t = 20$, 40 e 60.
(d) Seja $\gamma = 1/4$. Faça o gráfico de $u(x, t)$ em função de x para $t = 20$, 40 e 60.

10.8 Equação de Laplace

Uma das equações diferenciais parciais mais importantes que ocorrem em matemática aplicada está associada ao nome de Laplace;[11] em duas dimensões, a equação é

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

e, em três dimensões,

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \tag{2}$$

Por exemplo, em um problema de calor a duas dimensões espaciais, a temperatura $u(x, y, t)$ tem que satisfazer a equação diferencial

$$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_t, \tag{3}$$

onde α^2 é a difusividade térmica. Se existir um estado estacionário, u só depende de x e y e a derivada em relação a t desaparece; nesse caso, a Eq. (3) se reduz à Eq. (1). Analogamente, para a solução estado estacionário do problema de condução de calor tridimensional, a temperatura tem que satisfazer a equação de Laplace tridimensional. As Eqs. (1) e (2) também ocorrem em outros ramos da física matemática. Na consideração de campos eletrostáticos, a função potencial em um meio dielétrico sem cargas elétricas tem que satisfazer a Eq. (1) ou a (2), dependendo do número de dimensões espaciais envolvidas. Analogamente, a função potencial de uma partícula livre no espaço, sob a ação, apenas, de forças gravitacionais, satisfaz a mesma equação. Por essa razão, a equação de Laplace também é conhecida como a **equação do potencial**. Um outro exemplo aparece no estudo do movimento irrotacional estado estacionário (independente do tempo) de um fluido bidimensional incompressível não-viscoso. Esse estudo gira em torno de duas funções, conhecidas como função potencial velocidade e função de fluxo, ambas satisfazendo a Eq. (1). Em elasticidade, os deslocamentos que ocorrem quando uma barra perfeitamente elástica é torcida são descritos em termos da função de deformação, que satisfaz, também, a Eq. (1).

Como não existe dependência no tempo nos problemas mencionados anteriormente, não existem condições iniciais a serem satisfeitas pelas soluções da Eq. (1) ou da Eq. (2). Elas precisam, no entanto, satisfazer certas condições de contorno em uma curva ou superfície que marca a fronteira da região na qual a equação diferencial vai ser resolvida. Como a equação de Laplace é de segunda ordem, parece razoável esperar que sejam necessárias duas condições de contorno para determinar, completamente, a solução. Isso não ocorre, no entanto. Lembre-se de que, no problema de condução de calor para a barra finita (Seções 10.5 e 10.6), foi necessário dar uma condição em cada extremidade da barra, isto é, *uma condição em cada ponto da fronteira*. Generalizando essa observação para problemas multidimensionais, é natural, então, dar uma condição sobre a função u em cada ponto da fronteira da região onde procuramos uma solução para a Eq. (1) ou a (2). A condição de contorno mais comum ocorre quando é especificado o valor de u em cada ponto na fronteira; em termos do problema de condução de calor, isso corresponde a descrever a temperatura na fronteira. Em alguns problemas, é dado o valor da derivada, ou taxa de variação de u na direção normal à fronteira; a condição sobre um corpo termicamente isolado, por exemplo, é desse tipo. É possível a ocorrência de condições de contorno mais complicadas; por exemplo, u pode ser especificado em parte da fronteira e sua derivada normal especificada na outra parte. O problema de encontrar uma solução da equação de Laplace com valores dados na fronteira é conhecido como um **problema de Dirichlet**, em homenagem a P. G. L. Dirichlet.[12] Por outro lado, se os valores da derivada normal são dados na fronteira, o problema é dito **problema de Neumann**, em homenagem a K. G. Neumann.[13] Os problemas de Dirichlet e de Neumann também são conhecidos como o primeiro e o segundo problemas de valores de contorno da teoria do potencial, respectivamente.

Fisicamente, é razoável esperar que os tipos de condições de contorno mencionados sejam suficientes para determinar inteiramente a solução. De fato, é possível estabelecer a existência e unicidade da solução da equação de Laplace sob as condições de contorno mencionadas, desde que a forma da fronteira e as funções que aparecem nas condições de contorno satisfaçam certas condições bem fracas. No entanto, as demonstrações desses teoremas, e até seus enunciados precisos, estão aquém do escopo deste livro. Nossa única preocupação será a de resolver alguns problemas típicos através do método de separação de variáveis e de séries de Fourier.

Embora os problemas escolhidos como exemplos tenham interpretações físicas interessantes (em termos de potenciais eletrostáticos ou distribuições de temperatura estado estacionário, por exemplo), nosso objetivo principal é mostrar algumas das coisas que podem ocorrer durante a solução matemática. Vale a pena observar também, mais uma vez, que problemas mais complicados podem, algumas vezes, ser resolvidos expressando-se

[11] A equação de Laplace leva esse nome em honra a Pierre-Simon de Laplace, que, a partir de 1782, estudou, extensivamente, suas soluções ao investigar a atração gravitacional de corpos arbitrários no espaço. No entanto, a equação apareceu pela primeira vez em um artigo de Euler sobre hidrodinâmica em 1752.

[12] Peter Gustav Dirichlet (1805-1859) foi professor em Berlim e, depois da morte de Gauss, em Göttingen. Em 1829, ele deu o primeiro conjunto de condições suficientes para garantir a convergência de uma série de Fourier. A definição de função utilizada, normalmente, hoje em dia em cálculo elementar é a dada por Dirichlet em 1837. Embora mais conhecido por seus trabalhos em análise e equações diferenciais, Dirichlet foi, também, um dos mais importantes matemáticos na área de teoria dos números do século XIX.

[13] Karl Gottfried Neumann (1832-1925), professor em Leipzig, contribuiu para as equações diferenciais, equações integrais e variáveis complexas.

a solução como a soma de diversos problemas mais simples (veja os Problemas 3 e 4).

Problema de Dirichlet em um Retângulo. Considere o problema matemático de encontrar a função u que satisfaz a equação de Laplace (1),

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, e as condições de contorno

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \qquad u(x, b) = 0, \qquad 0 < x < a, \\ u(0, y) &= 0, \qquad u(a, y) = f(y), \qquad 0 \le y \le b, \end{aligned} \tag{4}$$

onde f é uma função dada em $0 \le y \le b$ (veja a Fig. 10.8.1).

Para resolver esse problema, queremos construir um conjunto fundamental de soluções satisfazendo a equação diferencial parcial e as condições de contorno homogêneas; vamos, depois, superpor essas soluções de modo a satisfazer a condição de contorno restante. Vamos supor que

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \tag{5}$$

e substituir u na Eq. (1) por essa expressão. Obtemos

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda,$$

onde λ é a constante de separação. Obtemos, então, duas equações diferenciais ordinárias

$$X'' - \lambda X = 0, \tag{6}$$

$$Y'' + \lambda Y = 0. \tag{7}$$

Substituindo u dada pela Eq. (5) em cada uma das condições de contorno homogêneas, encontramos

$$X(0) = 0 \tag{8}$$

e

$$Y(0) = 0, \qquad Y(b) = 0. \tag{9}$$

Vamos determinar, primeiro, a solução da equação diferencial (7) sujeita às condições de contorno (9). Esse problema é, essencialmente, idêntico ao encontrado anteriormente nas Seções 10.1, 10.5 e 10.7. Concluímos que existem soluções não-triviais se, e somente se, λ é um autovalor, a saber,

$$\lambda = (n\pi/b)^2, \qquad n = 1, 2, \ldots; \tag{10}$$

e $Y(y)$ é proporcional à autofunção correspondente $\operatorname{sen}(n\pi y/b)$. A seguir, vamos substituir λ dada pela Eq. (10) na Eq. (6) e resolver essa equação sujeita à condição de contorno (8). É conveniente escrever a solução geral da Eq. (6) na forma

$$X(x) = k_1 \cosh(n\pi x/b) + k_2 \operatorname{senh}(n\pi x/b), \tag{11}$$

de modo que a condição de contorno (8) implica que $k_1 = 0$. Logo, $X(x)$ tem que ser proporcional a $\operatorname{senh}(n\pi x/b)$. Obtemos, assim, as soluções fundamentais

$$u_n(x, y) = \operatorname{senh}\frac{n\pi x}{b} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{12}$$

Essas funções satisfazem a equação diferencial (1) e as condições de contorno homogêneas para cada valor de n.

Para satisfazer a condição de contorno não-homogênea em $x = a$ que falta, vamos supor, como de hábito, que podemos representar a solução $u(x, y)$ na forma

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi x}{b} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}. \tag{13}$$

Os coeficientes c_n são determinados pela condição de contorno

$$u(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} = f(y). \tag{14}$$

Logo, as quantidades $c_n \operatorname{senh}(n\pi a/b)$ têm que ser os coeficientes da série de Fourier em senos de f de período $2b$ e são dados por

$$c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b f(y) \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\, dy. \tag{15}$$

Portanto, a solução da equação diferencial parcial (1) que satisfaz as condições de contorno (4) é dada pela Eq. (13) com os coeficientes c_n calculados pela Eq. (15).

Das Eqs. (13) e (15), vemos que a solução contém o fator $\operatorname{senh}(n\pi x/b)/\operatorname{senh}(n\pi a/b)$. Para estimar essa quantidade para n grande, podemos usar a aproximação $\operatorname{senh}\xi \approx e^{\xi}/2$, obtendo, assim,

$$\frac{\operatorname{senh}(n\pi x/b)}{\operatorname{senh}(n\pi a/b)} \cong \frac{\frac{1}{2}\exp(n\pi x/b)}{\frac{1}{2}\exp(n\pi a/b)} = \exp[-n\pi(a-x)/b].$$

Esse fator, então, comporta-se como uma exponencial com potência negativa; em conseqüência, a série (13) converge bem rapidamente, a menos que $a - x$ seja muito pequeno.

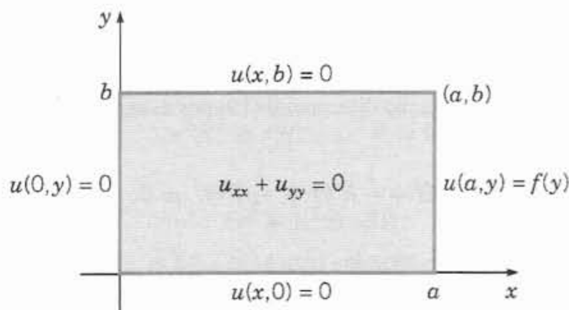


FIG. 10.8.1 Problema de Dirichlet em um retângulo.

Exemplo 1

Para ilustrar esses resultados, sejam $a = 3$, $b = 2$ e

$$f(y) = \begin{cases} y, & 0 \le y \le 1, \\ 2 - y, & 1 \le y \le 2. \end{cases} \tag{16}$$

Calculando c_n da Eq. (15), vemos que

$$c_n = \frac{8 \operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^2\pi^2 \operatorname{senh}(3n\pi/2)}. \tag{17}$$

Logo, $u(x, y)$ é dado pela Eq. (13). Mantendo 20 termos na série, podemos fazer o gráfico de $u(x, y)$ em função de x e y, como mostra a Fig. 10.8.2. Podemos, também, construir um gráfico contendo curvas de nível de $u(x, y)$; a Fig. 10.8.3 ilustra tal gráfico, com um incremento de 0,1 entre curvas adjacentes.

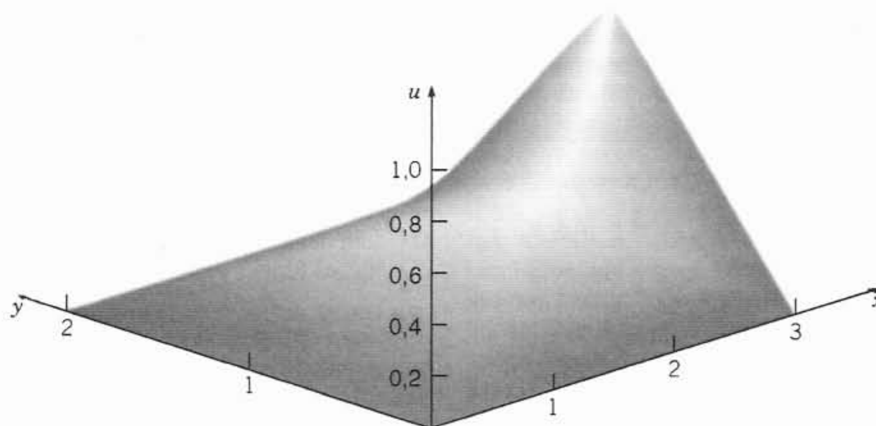


FIG. 10.8.2 Gráfico de u em função de x e y para o Exemplo 1.

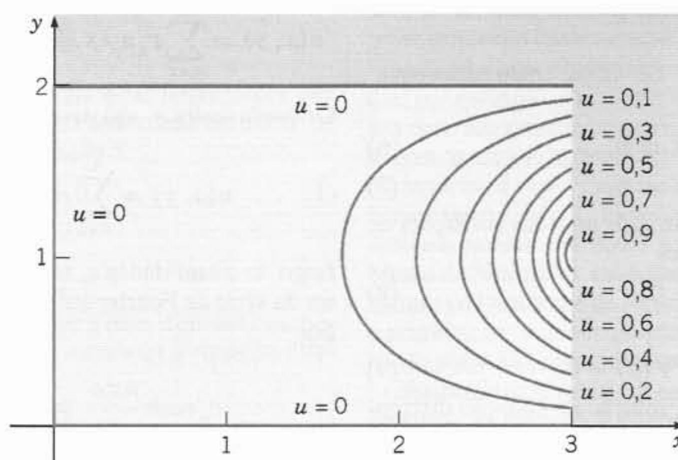


FIG. 10.8.3 Curvas de nível de $u(x, y)$ para o Exemplo 1.

Problema de Dirichlet em um Círculo. Considere o problema consistindo na equação de Laplace em uma região circular $r < a$ sujeita à condição de contorno

$$u(a, \theta) = f(\theta), \tag{18}$$

onde f é uma função dada em $0 \le \theta < 2\pi$ (veja a Fig. 10.8.4). Em coordenadas polares, a equação de Laplace fica

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0. \tag{19}$$

Para completar o enunciado do problema, observamos que, para que $u(r, \theta)$ esteja bem definida, é necessário que u seja periódica em θ com período 2π. Além disso, enunciamos, explicitamente, que $u(r, \theta)$ tem que ser limitada para $r \le a$, já que isso vai ser importante mais adiante.

Para aplicar o método de separação de variáveis a esse problema, vamos supor que

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta), \tag{20}$$

e substituir u na equação diferencial (19) por essa expressão. Isso nos dá

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0,$$

ou

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda, \tag{21}$$

onde λ é a constante de separação. Obtemos, então, duas equações diferenciais ordinárias,

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0, \tag{22}$$

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0. \tag{23}$$

Esse problema não tem condições de contorno homogêneas; lembre, no entanto, que as soluções têm que ser limitadas e periódicas em θ com período 2π. É possível mostrar (Problema

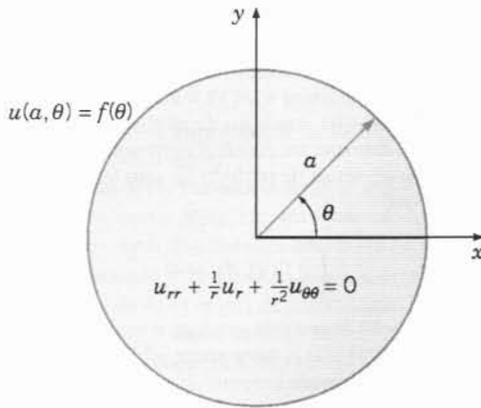


FIG. 10.8.4 Problema de Dirichlet em um círculo.

9) que a condição de periodicidade implica que λ é real. Vamos considerar os casos em que λ é negativo, nulo e positivo.

Se $\lambda < 0$, fazemos $\lambda = -\mu^2$, onde $\mu > 0$. Então, a Eq. (23) fica $\Theta'' - \mu^2\Theta = 0$ e, em conseqüência,

$$\Theta(\theta) = c_1 e^{\mu\theta} + c_2 e^{-\mu\theta}. \qquad (24)$$

Logo, $\Theta(\theta)$ só pode ser periódica se $c_1 = c_2 = 0$ e concluímos que λ não pode ser negativo.

Se $\lambda = 0$, então a Eq. (23) fica $\Theta'' = 0$, logo,

$$\Theta(\theta) = c_1 + c_2\theta. \qquad (25)$$

Para que $\Theta(\theta)$ seja periódica, temos que ter $c_2 = 0$, de modo que $\Theta(\theta)$ é constante. Além disso, para $\lambda = 0$, a Eq. (22) fica

$$r^2R'' + rR' = 0. \qquad (26)$$

Essa equação é do tipo de Euler e tem solução

$$R(r) = k_1 + k_2 \ln r. \qquad (27)$$

O termo logarítmico não é aceitável, já que $u(r, \theta)$ tem que permanecer limitada quando $r \to 0$; portanto, $k_2 = 0$. Então, se $\lambda = 0$, concluímos que $u(r, \theta)$ tem que ser constante, isto é, proporcional à solução

$$u_0(r, \theta) = 1. \qquad (28)$$

Finalmente, se $\lambda > 0$, fazemos $\lambda = \mu^2$, onde $\mu > 0$. Então, as Eqs. (22) e (23) ficam

$$r^2R'' + rR' - \mu^2R = 0 \qquad (29)$$

e

$$\Theta'' + \mu^2\Theta = 0, \qquad (30)$$

respectivamente. A Eq. (29) é uma equação de Euler e tem solução

$$R(r) = k_1 r^{\mu} + k_2 r^{-\mu}, \qquad (31)$$

enquanto a Eq. (30) tem solução

$$\Theta(\theta) = c_1 \operatorname{sen}\mu\theta + c_2 \cos\mu\theta. \qquad (32)$$

Para que Θ seja periódica com período 2π, é necessário que μ seja um inteiro positivo n. Com $\mu = n$, a solução $r^{-\mu}$ na Eq. (31) tem que ser abandonada, já que ela torna-se ilimitada quando $r \to 0$. Portanto, $k_2 = 0$ e as soluções pertinentes da Eq. (19) são

$$u_n(r, \theta) = r^n \cos n\theta, \; v_n(r, \theta) = r^n \operatorname{sen} n\theta, \; n = 1, 2, \ldots. \qquad (33)$$

Essas funções, junto com $u_0(r, \theta) = 1$, formam um conjunto fundamental de soluções para o problema em questão.

Como de hábito, vamos supor que u pode ser expressa como uma combinação linear das soluções fundamentais, isto é,

$$u(r, \theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (c_n \cos n\theta + k_n \operatorname{sen} n\theta). \qquad (34)$$

Então, a condição de contorno (18) implica que

$$u(a, \theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (c_n \cos n\theta + k_n \operatorname{sen} n\theta) = f(\theta) \qquad (35)$$

para $0 \le \theta < 2\pi$. A função f pode ser estendida para fora desse intervalo de modo a ficar periódica com período 2π tendo, portanto, uma série de Fourier da forma (35). Como a função estendida tem período 2π, podemos calcular seus coeficientes de Fourier integrando em qualquer período da função. Em particular, é conveniente usar o intervalo original $(0, 2\pi)$; então,

$$a^n c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad (36)$$

$$a^n k_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta, \quad n = 1, 2, \ldots. \qquad (37)$$

Com essa escolha de coeficientes, a Eq. (34) representa a solução do problema de valores de contorno formado pelas Eqs. (18) e (19). Note que, nesse problema, precisamos dos termos em senos e em co-senos na solução. Isso ocorre porque os dados de contorno foram dados em $0 \le \theta < 2\pi$ e têm período 2π. Em conseqüência, precisamos da série de Fourier completa, em vez da série em senos ou em co-senos.

Problemas

1. (a) Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 < y < b,$$
$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = g(x), \quad 0 \le x \le a.$$

(b) Encontre a solução se

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le a/2, \\ a - x, & a/2 \le x \le a. \end{cases}$$

(c) Para $a = 3$ e $b = 1$, faça o gráfico de u em função de x para diversos valores de y e faça, também, o gráfico de u em função de y para diversos valores de x.
(d) Faça o gráfico tridimensional de u em função de x e de y. Desenhe, também, diversas curvas de nível de $u(x, y)$ no plano xy.

2. Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 < y < b,$$
$$u(x, 0) = h(x), \quad u(x, b) = 0, \quad 0 \le x \le a.$$

3. (a) Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = f(y), \quad 0 < y < b,$$
$$u(x, 0) = h(x), \quad u(x, b) = 0, \quad 0 \le x \le a.$$

Sugestão: Considere a possibilidade de somar as soluções de dois problemas, um com condições de contorno homogêneas, exceto por $u(a, y) = f(y)$, e o outro com condições de contorno homogêneas, exceto por $u(x, 0) = h(x)$.

(b) Encontre a solução se $h(x) = (x/a)^2$ e $f(y) = 1 - (y/b)$.

(c) Sejam $a = 2$ e $b = 2$. Faça gráficos da solução de diversas maneiras: u em função de x, u em função de y, u em função de x e de y, e curvas de nível.

4. Mostre como encontrar a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(0, y) = k(y), \quad u(a, y) = f(y), \quad 0 < y < b,$$
$$u(x, 0) = h(x), \quad u(x, b) = g(x), \quad 0 \le x \le a.$$

Sugestão: Veja o Problema 3.

5. Encontre a solução $u(r, \theta)$ da equação de Laplace

$$u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta} = 0$$

fora do círculo $r = a$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(a, \theta) = f(\theta), \qquad 0 \le \theta < 2\pi,$$

sobre o círculo. Suponha que $u(r, \theta)$ está bem definida e é limitada para $r > a$.

6. (a) Encontre a solução $u(r, \theta)$ da equação de Laplace na região semicircular $r < a$, $0 < \theta < \pi$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(r, 0) = 0, \qquad u(r, \pi) = 0, \qquad 0 \le r < a,$$
$$u(a, \theta) = f(\theta), \qquad 0 \le \theta \le \pi.$$

Suponha que u está bem definida e é limitada na região dada.

(b) Encontre a solução se $f(\theta) = \theta(\pi - \theta)$.

(c) Tome $a = 2$ e faça gráficos da solução de diversas maneiras: u em função de r, u em função de θ, u em função de ambos, r e θ, e curvas de nível.

7. Encontre a solução $u(r, \theta)$ da equação de Laplace no setor circular $0 < r < a$, $0 < \theta < \alpha$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(r, 0) = 0, \qquad u(r, \alpha) = 0, \qquad 0 \le r < a,$$
$$u(a, \theta) = f(\theta), \qquad 0 \le \theta \le \alpha.$$

Suponha que u está bem definida e é limitada no setor.

8. (a) Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace na faixa semi-infinita $0 < x < a$, $y > 0$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(0, y) = 0, \qquad u(a, y) = 0, \qquad y > 0,$$
$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \le x \le a$$

e a condição adicional de que $u(x, y) \to 0$ quando $y \to \infty$.

(b) Encontre a solução se $f(x) = x(a - x)$.

(c) Seja $a = 5$. Encontre o menor valor de y_0 para o qual $u(x, y) \le 0{,}1$ para todo $y \ge y_0$.

9. Mostre que a Eq. (23) só tem soluções periódicas se λ for real.

Sugestão: Considere $\lambda = -\mu^2$, onde $\mu = \nu + i\sigma$, com ν e σ reais.

10. Considere o problema de encontrar uma solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno

$$u_x(0, y) = 0, \quad u_x(a, y) = f(y), \quad 0 < y < b,$$
$$u_y(x, 0) = 0, \quad u_y(x, b) = 0, \quad 0 \le x \le a.$$

Esse é um exemplo de um problema de Neumann.

(a) Mostre que a equação de Laplace e as condições de contorno homogêneas determinam o conjunto fundamental de soluções

$$u_0(x, y) = c_0,$$
$$u_n(x, y) = c_n \cosh(n\pi x/b)\cos(n\pi y/b), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

(b) Através da superposição das soluções fundamentais do item (a), determine, formalmente, uma função u que satisfaça, também, a condição de contorno não-homogênea $u_x(a, y) = f(y)$. Note que, ao se calcular $u_x(a, y)$, o termo constante em $u(x, y)$ é eliminado e não há condição da qual se possa determinar c_0. Além disso, tem que ser possível representar f por uma série de Fourier em co-senos de período $2b$ sem termo constante. Isso significa que

$$\int_0^b f(y)\, dy = 0$$

é uma condição necessária para que o problema tenha solução. Finalmente, note que c_0 permanece arbitrário e, portanto, a solução está determinada a menos dessa constante aditiva. Essa é uma propriedade de todos os problemas de Neumann.

11. Encontre uma solução $u(r, \theta)$ da equação de Laplace no interior do círculo $r = a$, que satisfaça a condição de contorno sobre o círculo

$$u_r(a, \theta) = g(\theta), \qquad 0 \le \theta < 2\pi.$$

Note que esse é um problema de Neumann e que sua solução está determinada a menos de uma constante aditiva. Enuncie uma condição necessária sobre $g(\theta)$ para que esse problema possa ser resolvido pelo método de separação de variáveis (veja o Problema 10).

12. (a) Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 < y < b,$$
$$u_y(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = g(x), \quad 0 \le x \le a.$$

Note que esse não é um problema de Dirichlet nem de Neumann, mas um problema misto no qual u é dada em parte da fronteira e sua derivada normal é dada no resto.

(b) Encontre a solução se

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le a/2, \\ a - x, & a/2 \le x \le a. \end{cases}$$

(c) Sejam $a = 3$ e $b = 1$. Fazendo gráficos apropriados, compare essa solução com a do Problema 1.

13. (a) Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = f(y), \quad 0 < y < b,$$
$$u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, b) = 0, \quad 0 \le x \le a.$$

Sugestão: Alguma hora vai ser necessário expandir $f(y)$ em uma série envolvendo $\operatorname{sen}(\pi y/2b)$, $\operatorname{sen}(3\pi y/2b)$, $\operatorname{sen}(5\pi y/2b)$, ... (veja o Problema 39 da Seção 10.4).

(b) Encontre a solução se $f(y) = y(2b - y)$.

(c) Sejam $a = 3$ e $b = 2$; faça gráficos da solução de diversas maneiras.

14. (a) Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace no retângulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que satisfaz as condições de contorno

$$u_x(0, y) = 0, \quad u_x(a, y) = 0, \quad 0 < y < b,$$
$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = g(x), \quad 0 \le x \le a.$$

(b) Encontre a solução se $g(x) = 1 + x^2(x - a)^2$.

(c) Sejam $a = 3$ e $b = 2$; faça gráficos da solução de diversas maneiras.

15. Escrevendo a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas r, θ e z e supondo, depois, que a solução é simétrica em relação ao eixo dos z (não depende de θ), obtemos a equação

$$u_{rr} + (1/r)u_r + u_{zz} = 0.$$

Supondo que $u(r, z) = R(r)Z(z)$, mostre que R e Z satisfazem as equações

$$rR'' + R' + \lambda^2 rR = 0, \qquad Z'' - \lambda^2 Z = 0.$$

A equação para R é uma equação de Bessel de ordem zero com variável independente λr.

16. **Fluxo em um Meio Poroso.** Considere o fluxo de água em um meio poroso, como areia, em um reservatório subterrâneo de água (como a água que flui para uma fonte ou um poço). O fluxo é impulsionado pela queda hidráulica, uma medida da energia potencial da água acima do reservatório. Seja $R: 0 < x < a, 0 < z < b$ uma seção vertical de um reservatório. Em um meio uniforme homogêneo, a queda hidráulica $u(x, z)$ satisfaz a equação de Laplace

$$u_{xx} + u_{zz} = 0 \quad \text{em } R. \tag{i}$$

Se a água não pode passar pelos lados nem pelo fundo de R, então as condições de contorno são

$$u_x(0, z) = 0, \quad u_x(a, z) = 0, \qquad 0 \le z \le b \tag{ii}$$

$$u_z(x, 0) = 0, \qquad 0 \le x \le a \tag{iii}$$

Finalmente, suponha que a condição de contorno em $z = b$ é

$$u(x, b) = b + \alpha x, \qquad 0 \le x \le a, \tag{iv}$$

onde α é a inclinação do leito de água.

(a) Resolva o problema de valores de contorno dado para $u(x, z)$.
(b) Sejam $a = 1000$, $b = 500$ e $\alpha = 0{,}1$. Desenhe curvas de nível para a solução em R, isto é, desenhe algumas curvas de nível de $u(x, z)$.
(c) A água flui ao longo de caminhos em R que são ortogonais às curvas de nível de $u(x, z)$ no sentido em que u diminui. Desenhe alguns dos caminhos do fluxo.

Apêndice A

Dedução da Equação de Calor. Vamos deduzir, nesta seção, a equação diferencial que, pelo menos em uma primeira aproximação, governa a condução de calor em sólidos. É importante compreender que a análise matemática de uma situação ou um processo físico como esse baseia-se, em última instância, em conhecimentos empíricos sobre o fenômeno em questão. O matemático tem que começar em algum lugar e esse lugar é dado pela experiência. Considere uma barra uniforme isolada termicamente nas superfícies laterais, de modo que o calor só pode fluir na direção do eixo. Foi demonstrado, muitas vezes, que, se duas seções retas paralelas de mesma área A e temperaturas diferentes T_1 e T_2, respectivamente, estiverem separadas por uma pequena distância d, uma quantidade de calor por unidade de tempo vai passar da seção mais quente para a mais fria. Além disso, essa quantidade de calor é diretamente proporcional à área A e à diferença de temperatura $|T_2 - T_1|$, e inversamente proporcional à distância de separação d. Logo,

$$\text{Quantidade de calor por unidade de tempo} = \kappa A|T_2 - T_1|/d, \tag{1}$$

onde o fator positivo de proporcionalidade κ é chamado de condutividade térmica e depende, principalmente, do material[14] de que é feita a barra. A relação (1) é chamada, freqüentemente, de lei da condução do calor de Fourier. Repetimos que a Eq. (1) é um resultado empírico, e não teórico, e que pode ser, como o foi muitas vezes, verificada por experimentos cuidadosos. Ela é a base da teoria matemática de condução de calor.

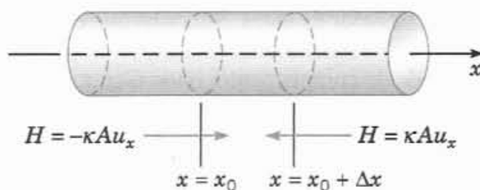


FIG. 10.A.1 Condução de calor em um trecho da barra.

[14] De fato, κ depende, também, da temperatura, mas, se o intervalo de temperatura não for muito grande, será satisfatório supor κ independente da temperatura.

Vamos considerar uma barra com seção reta uniforme, feita de material homogêneo, orientada de modo que o eixo dos x coincida com o eixo da barra (veja a Fig. 10.A.1). Vamos denotar por $x = 0$ e $x = L$ as extremidades da barra.

Vamos supor que os lados da barra estão perfeitamente isolados, de modo que não há fluxo de calor através deles. Vamos supor, também, que a temperatura u depende apenas da posição axial x e do tempo t, e não das coordenadas y e z. Em outras palavras, estamos supondo que a temperatura permanece constante em qualquer seção reta da barra. Essa hipótese é satisfatória, em geral, quando as dimensões laterais da barra são pequenas comparadas com seu comprimento.

A equação diferencial que governa a temperatura na barra expressa um equilíbrio físico fundamental: a taxa segundo a qual o calor entra em qualquer parte da barra é igual à taxa segundo a qual o calor é absorvido naquela parte da barra. Os termos na equação são chamados termo de fluxo e termo de absorção, respectivamente.

Vamos calcular, primeiro, o termo de fluxo. Considere uma parte da barra entre as seções retas $x = x_0$ e $x = x_0 + \Delta x$, onde x_0 é arbitrário e Δx é pequeno. A taxa instantânea de transferência de calor $H(x_0, t)$ da esquerda para a direita através da seção reta $x = x_0$ é dada por

$$\begin{aligned} H(x_0) &= -\lim_{d\to 0} \kappa A \frac{u(x_0 + d/2, t) - u(x_0 - d/2, t)}{d} \\ &= -\kappa A u_x(x_0, t). \end{aligned} \tag{2}$$

O sinal de menos aparece nessa equação porque só vai haver fluxo positivo de calor da esquerda para a direita se a temperatura à esquerda de $x = x_0$ for maior do que a temperatura à direita; nesse caso, $u_x(x_0, t)$ é negativa. De maneira semelhante, a taxa segundo a qual o calor passa da esquerda para a direita através da seção reta $x = x_0 + \Delta x$ é dada por

$$H(x_0 + \Delta x, t) = -\kappa A u_x(x_0 + \Delta x, t). \tag{3}$$

Então, a taxa total segundo a qual o calor entra no trecho da barra entre $x = x_0$ e $x = x_0 + \Delta x$ é dada por

$$\begin{aligned} Q = H(x_0, t) - H(x_0 + \Delta x, t) &= \kappa A[u_x(x_0 + \Delta x, t) \\ &- u_x(x_0, t)], \end{aligned} \tag{4}$$

e a quantidade de calor entrando nesse trecho da barra no intervalo de tempo Δt é

$$Q\,\Delta t = \kappa A[u_x(x_0 + \Delta x, t) - u_x(x_0, t)]\,\Delta t. \tag{5}$$

Vamos calcular, agora, o termo de absorção. A variação média de temperatura Δu no intervalo de tempo Δt é diretamente proporcional à quantidade de calor $Q\,\Delta t$ introduzida e inversamente proporcional à massa Δm do trecho da barra. Logo,

$$\Delta u = \frac{1}{s}\frac{Q\,\Delta t}{\Delta m} = \frac{Q\,\Delta t}{s\rho A\,\Delta x}, \tag{6}$$

onde a constante de proporcionalidade s é conhecida como o calor específico do material da barra e ρ é sua densidade.[15] A variação média de temperatura Δu no trecho da barra em consideração é igual à variação de temperatura em algum ponto intermediário $x = x_0 + \theta\,\Delta x$, onde $0 < \theta < 1$. Portanto, a Eq. (6) pode ser escrita como

$$u(x_0 + \theta\,\Delta x, t + \Delta t) - u(x_0 + \theta\,\Delta x, t) = \frac{Q\,\Delta t}{s\rho A\,\Delta x}, \tag{7}$$

ou como

$$Q\,\Delta t = [u(x_0 + \theta\,\Delta x, t + \Delta t) - u(x_0 + \theta\,\Delta x, t)]s\rho A\,\Delta x. \tag{8}$$

Para equilibrar os termos de fluxo e de absorção, igualamos as duas expressões para $Q\,\Delta t$:

$$\begin{aligned}&\kappa A[u_x(x_0 + \Delta x, t) - u_x(x_0, t)]\,\Delta t\\ &= s\rho A[u(x_0 + \theta\,\Delta x, t + \Delta t) - u(x_0 + \theta\,\Delta x, t)]\,\Delta x.\end{aligned} \tag{9}$$

Dividindo a Eq. (9) por $\Delta x\,\Delta t$ e fazendo $\Delta x \to 0$ e $\Delta t \to 0$, obtemos a equação de *calor* ou de *difusão*

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t. \tag{10}$$

A quantidade α^2, definida por

$$\alpha^2 = \kappa/\rho s \tag{11}$$

é chamada *difusividade térmica* e é um parâmetro que depende apenas do material de que é feita a barra. As unidades de α^2 são (comprimento)^2/tempo. Valores típicos de α^2 são dados na Tabela 10.5.1.

Diversas condições relativamente simples podem ser impostas nas extremidades da barra. Por exemplo, a temperatura em uma extremidade pode ser mantida a um valor constante T. Isso pode ser feito colocando-se a extremidade da barra em contato com um reservatório suficientemente grande, de modo que qualquer fluxo de calor que possa haver entre a barra e o reservatório não altera, sensivelmente, a temperatura do reservatório. Na extremidade onde isso é feito, a condição de contorno é

$$u = T. \tag{12}$$

Uma outra condição de contorno simples ocorre se a extremidade está isolada, de modo que não há fluxo de calor através dela. Lembrando da expressão (2) para a quantidade de calor atravessando qualquer seção reta da barra, concluímos que a condição de isolamento significa que essa quantidade é nula. Logo,

$$u_x = 0 \tag{13}$$

é a condição de contorno em uma extremidade isolada.

Um tipo mais geral de condição de contorno ocorre se a taxa de fluxo de calor através da extremidade da barra é proporcional à temperatura aí. Vamos considerar a extremidade $x = 0$, onde a taxa de fluxo de calor da esquerda para a direita é dada por $-\kappa A u_x(0, t)$; veja a Eq. (2). Então, a taxa do fluxo de calor saindo da barra (da direita para a esquerda) em $x = 0$ é $\kappa A u_x(0, t)$. Se essa quantidade for proporcional à temperatura $u(0, t)$, obtemos a condição de contorno

$$u_x(0, t) - h_1 u(0, t) = 0, \qquad t > 0, \tag{14}$$

onde h_1 é uma constante de proporcionalidade não-negativa. Note que $h_1 = 0$ corresponde a uma extremidade isolada e que $h_1 \to \infty$ corresponde a uma extremidade mantida à temperatura zero.

Se o fluxo de calor está acontecendo na extremidade direita da barra ($x = L$), então, de maneira análoga, obtemos a condição de contorno

$$u_x(L, t) + h_2 u(L, t) = 0, \qquad t > 0, \tag{15}$$

onde, novamente, h_2 é uma constante de proporcionalidade não-negativa.

Finalmente, para determinar completamente o fluxo de calor na barra, é preciso ter a distribuição de temperatura em um instante fixo, geralmente considerado como o instante inicial $t = 0$. Essa condição inicial é da forma

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \le x \le L. \tag{16}$$

O problema, então, é determinar a solução da equação diferencial (10) sujeita a uma das condições de contorno de (12) a (15) em cada extremidade e à condição inicial (16) em $t = 0$.

Diversas generalizações da equação de calor (10) ocorrem na prática. Primeiro, o material da barra pode não ser uniforme e a seção reta pode não ser constante ao longo de toda a barra. Nesse caso, os parâmetros κ, ρ, s e A podem depender da variável axial x. Voltando para a Eq. (2), vemos que a taxa de transferência de calor da esquerda para a direita através da seção reta $x = x_0$ é dada, agora, por

$$H(x_0, t) = -\kappa(x_0)A(x_0)u_x(x_0, t) \tag{17}$$

com uma expressão análoga para $H(x_0 + \Delta x, t)$. Se introduzirmos essas quantidades na Eq. (4) e, finalmente, na Eq. (9), procedendo como antes, obtemos a equação diferencial parcial

$$(\kappa A u_x)_x = s\rho A u_t. \tag{18}$$

Vamos escrever, em geral, a Eq. (18) na forma

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x, \tag{19}$$

onde $p(x) = \kappa(x)A(x)$ e $r(x) = s(x)\rho(x)A(x)$. Note que ambas as quantidades são, intrinsecamente, positivas.

Uma segunda generalização ocorre se existem outras maneiras de entrar ou sair calor da barra. Suponha que existe uma *fonte* que adiciona calor à barra a uma taxa $G(x, t, u)$ por unidade de tempo por unidade de comprimento, onde $G(x, t, u) > 0$. Nesse caso, precisamos somar o termo $G(x, t, u)\,\Delta x\,\Delta t$ à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (9), o que nos leva à equação diferencial

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x + G(x, t, u). \tag{20}$$

Se $G(x, t, u) < 0$, estamos falando de um *sorvedouro* que remove calor da barra a uma taxa $G(x, t, u)$ por unidade de tempo por unidade de comprimento. Para tornar o problema tratável, precisamos restringir a forma da função G. Em particular, vamos

[15] A dependência da densidade e do calor específico na temperatura é relativamente pequena e será desprezada. Assim, tanto ρ quanto s serão considerados constantes.

supor que G é linear em u e que o coeficiente de u não depende de t. Temos, então,

$$G(x, t, u) = F(x, t) - q(x)u. \quad (21)$$

O sinal de menos na Eq. (21) foi introduzido para que determinadas equações, que vão aparecer mais adiante, tenham suas formas habituais. Substituindo a Eq. (21) na Eq. (20), obtemos

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u + F(x, t). \quad (22)$$

Essa equação é chamada, algumas vezes, de equação de calor generalizada. Problemas de valores de contorno para a Eq. (22) serão discutidos no Cap. 11.

Finalmente, se em vez de uma barra unidimensional considerarmos um corpo com mais de uma dimensão espacial significativa, então a temperatura é uma função de duas ou três variáveis espaciais, em vez de só depender de x. Pode-se fazer considerações semelhantes às que nos levaram à Eq. (10) para se deduzir a equação de calor em duas dimensões,

$$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_t, \quad (23)$$

ou em três dimensões,

$$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_t. \quad (24)$$

As condições de contorno análogas às Eqs. (12) e (13) para problemas multidimensionais correspondem a uma distribuição de temperatura dada na fronteira ou a uma fronteira isolada. De maneira semelhante, a distribuição inicial de temperatura será, em geral, uma função de x e de y para a Eq. (23) e uma função de x, y e z para a Eq. (24).

Apêndice B

Dedução da Equação de Onda. Vamos deduzir, neste apêndice, a equação de onda em uma dimensão espacial, que descreve vibrações transversas de uma corda ou um cabo elásticos; essa corda elástica pode ser uma corda de violino, um esteio ou, possivelmente, um cabo de força. A mesma equação, no entanto, com as variáveis interpretadas adequadamente, ocorre em muitos outros problemas ondulatórios com apenas uma variável espacial significativa.

Considere uma corda perfeitamente elástica esticada entre suportes fixos no mesmo nível horizontal (veja a Fig. 10.B.1*a*). Suponha que a corda está no eixo dos x com suas extremidades em $x = 0$ e $x = L$. Se a corda for colocada em movimento em algum instante inicial $t = 0$ (sendo puxada, por exemplo) e depois é deixada sem ser perturbada, ela vibrará livremente em um plano vertical, desde que efeitos de amortecimento, como a resistência do ar, sejam desprezados. Para determinar a equação diferencial que governa esse movimento, vamos considerar as forças que agem em um pequeno elemento da corda de comprimento Δx, entre os pontos x e $x + \Delta x$ (veja a Fig. 10.B.1*b*). Vamos supor que o movimento da corda é pequeno que, em conseqüência, cada ponto na corda só se move em uma reta vertical. Vamos denotar por $u(x, t)$ o deslocamento vertical no ponto x e instante t. Vamos denotar por $T(x, t)$ a tensão na corda, que sempre age na direção tangente, e por ρ a massa da corda por unidade de comprimento.

A lei de Newton, aplicada ao elemento Δx da corda, diz que a força externa total, devido à tensão nas extremidades do elemento, tem que ser igual ao produto da massa do elemento pela aceleração de seu centro de massa. Como não há aceleração horizontal, as componentes horizontais têm que satisfazer

$$T(x + \Delta x, t)\cos(\theta + \Delta\theta) - T(x, t)\cos\theta = 0. \quad (1)$$

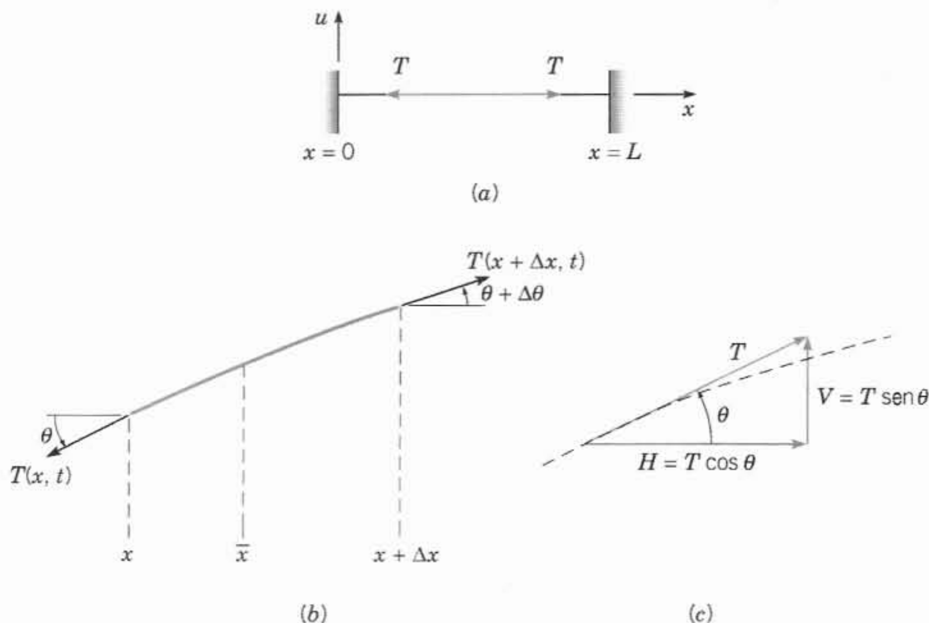


FIG. 10.B.1 (*a*) Uma corda elástica sob tensão. (*b*) Um elemento da corda deslocada. (*c*) Resolução da tensão T em componentes.

Denotando a componente horizontal da tensão (veja a Fig. 10.B.1*c*) por H, a Eq. (1) diz que H é independente de x.

Por outro lado, as componentes verticais satisfazem

$$T(x + \Delta x, t)\,\text{sen}(\theta + \Delta\theta) - T(x, t)\,\text{sen}\theta = \rho\,\Delta x\,u_{tt}(\bar{x}, t), \quad (2)$$

onde $\bar{x}$ é a coordenada do centro de massa do elemento da corda em pauta. É claro que $\bar{x}$ está no intervalo $x < \bar{x} < x + \Delta x$. O peso da corda, que age verticalmente para baixo, é suposto desprezível e foi desprezado na Eq. (2).

Se a componente vertical de T for denotada por V, então a Eq. (2) pode ser escrita como

$$\frac{V(x + \Delta x, t) - V(x, t)}{\Delta x} = \rho u_{tt}(\bar{x}, t).$$

Tomando o limite quando $\Delta x \to 0$ nos dá

$$V_x(x, t) = \rho u_{tt}(x, t). \quad (3)$$

Para expressar a Eq. (3) somente em função de u, note que

$$V(x, t) = H(t)\,\text{tg}\,\theta = H(t)u_x(x, t).$$

Logo, a Eq. (3) fica

$$(Hu_x)_x = \rho u_{tt},$$

ou, como H é independente de x,

$$Hu_{xx} = \rho u_{tt}. \quad (4)$$

Para movimentos pequenos da corda, podemos substituir $H = T\cos\theta$ por T. Então, a Eq. (4) fica com a sua forma habitual,

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad (5)$$

onde

$$a^2 = T/\rho. \quad (6)$$

Vamos supor, ainda, que a^2 é uma constante, embora isso não seja necessário na nossa dedução, mesmo para movimentos pequenos. A Eq. (5) é chamada de equação de onda em uma dimensão espacial. Como T tem unidades de força e ρ de massa/comprimento, a constante z tem unidades de velocidade. É possível identificar a como a velocidade segundo a qual uma pequena perturbação (onda) move-se ao longo da corda. De acordo com a Eq. (6), a velocidade da onda a varia diretamente com a tensão na corda, mas é inversamente proporcional à densidade do material de que é feita a corda. Esses fatos estão de acordo com a experiência.

Como no caso da equação de calor, existem diversas generalizações da equação de onda (5). Uma equação importante, conhecida como a **equação do telégrafo**, tem a forma

$$u_{tt} + \nu u_t + \gamma u = a^2 u_{xx} + F(x, t), \quad (7)$$

onde ν e γ são constantes não-negativas. Os termos νu, γu_t e $F(x, t)$ correspondem, respectivamente, a uma força amortecedora viscosa, a uma força restauradora elástica e a uma força externa. Observe a semelhança da Eq. (7), exceto pelo termo $a^2 u_{xx}$, com a equação para o sistema massa-mola deduzido na Seção 3.8; o termo adicional $a^2 u_{xx}$ aparece devido a forças elásticas internas.

A equação do telégrafo modela, também, o fluxo de voltagem, ou corrente, em uma linha de transmissão (daí seu nome); nesse caso os coeficientes estão relacionados a parâmetros elétricos na linha.

Para um sistema em vibração com mais de uma coordenada espacial significativa, pode ser necessário considerar a equação de onda em duas dimensões,

$$a^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_{tt}, \quad (8)$$

ou em três dimensões,

$$a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_{tt}. \quad (9)$$

REFERÊNCIAS

Os livros a seguir contêm informações adicionais sobre séries de Fourier:

Buck, R. C., and Buck, E. F., *Advanced Calculus* (3rd ed.) (New York: McGraw-Hill, 1978).

Carslaw, H. S., *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals* (3rd ed.) (Cambridge: Cambridge University Press, 1930; New York: Dover, 1952).

Courant, R., and John, F., *Introduction to Calculus and Analysis* (New York: Wiley-Interscience, 1965; reprinted by Springer-Verlag, New York, 1989).

Kaplan, W., *Advanced Calculus* (5th ed.) (Reading, MA: Addison-Wesley, 2003).

Uma biografia resumida de Fourier e uma cópia com anotações do seu artigo de 1807 estão contidas em:

Grattan-Guinness, I., *Joseph Fourier 1768–1830* (Cambridge, MA: MIT Press, 1973).

Entre as referências úteis sobre equações diferenciais parciais e o método de separação de variáveis, estão incluídos:

Churchill, R. V., and Brown, J. W., *Fourier Series and Boundary Value Problems* (6th ed.) (New York: McGraw-Hill, 2000).

Haberman, R., *Elementary Applied Partial Differential Equations* (3rd ed.) (Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1998).

Pinsky, M. A., *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Applications* (3rd ed.) (Boston: WCB/McGraw-Hill, 1998).

Powers, D. L., *Boundary Value Problems* (4th ed.) (San Diego: Academic Press, 1999).

Strauss, W. A., *Partial Differential Equations, an Introduction* (New York: Wiley, 1992).

Weinberger, H. F., *A First Course in Partial Differential Equations* (New York: Wiley, 1965; New York: Dover, 1995).

CAPÍTULO 11

Problemas de Valores de Contorno e Teoria de Sturm-Liouville

Depois de separar as variáveis em uma equação diferencial parcial, no Cap. 10, encontramos, diversas vezes, a equação diferencial

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad 0 < x < L$$

com as condições de contorno

$$X(0) = 0, \qquad X(L) = 0.$$

Esse problema de valores de contorno é o protótipo de uma classe grande de problemas importantes em matemática aplicada. Esses problemas são conhecidos como problemas de valores de contorno de Sturm-Liouville. Neste capítulo, vamos discutir as propriedades mais importantes dos problemas de Sturm-Liouville e suas soluções; no processo, seremos capazes de generalizar, um pouco, o método de separação de variáveis para equações diferenciais parciais.

11.1 A Ocorrência de Problema de Valores de Contorno em Fronteiras com Dois Pontos

No Cap. 10, descrevemos o método de separação de variáveis como um modo de resolver problemas envolvendo equações diferenciais parciais. O problema de condução de calor, consistindo na equação diferencial parcial

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{1}$$

sujeita às condições de contorno

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0, \qquad t > 0 \tag{2}$$

e à condição inicial

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 \le x \le L, \tag{3}$$

é um exemplo típico dos problemas considerados aqui. Uma parte crucial no processo de resolução de tais problemas é encontrar os autovalores e as autofunções da equação diferencial

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad 0 < x < L \tag{4}$$

com as condições de contorno

$$X(0) = 0, \qquad X(L) = 0 \tag{5}$$

ou, talvez,

$$X'(0) = 0, \qquad X'(L) = 0. \tag{6}$$

As funções seno e co-seno que aparecem ao se resolver a Eq. (4) sujeita às condições de contorno (4) ou (5) são usadas para se expandir a distribuição inicial de temperatura $f(x)$ em uma série de Fourier.

Neste capítulo, vamos estender e generalizar os resultados do Cap. 10. Nosso objetivo principal é mostrar como o método de separação de variáveis pode ser usado para resolver problemas um pouco mais gerais do que os das Eqs. (1), (2) e (3). Estamos interessados em três tipos de generalizações.

Primeiro, queremos considerar equações diferenciais parciais mais gerais, por exemplo, a equação

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u + F(x,t). \tag{7}$$

Essa equação pode aparecer, como indicado no Apêndice A do Cap. 10, no estudo de condução de calor em uma barra, com propriedades variáveis, na presença de fontes de calor. Se p e r forem constantes, e se os termos de fonte $q(x)u$ e F forem nulos, então a Eq. (7) se reduz à Eq. (1). A equação diferencial parcial (7) ocorre, também, na investigação de outros fenômenos de caráter difusivo.

Uma segunda generalização é permitir condições de contorno mais gerais. Em particular, queremos considerar condições de contorno da forma

$$u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) + h_2 u(L,t) = 0. \tag{8}$$

Tais condições ocorrem quando a taxa de fluxo de calor através de uma extremidade da barra é proporcional à temperatura aí. Em geral, h_1 e h_2 são constantes não-negativas, mas, em alguns casos, podem ser negativas ou depender de t. As condições de contorno (2) são obtidas no limite quando $h_1 \to \infty$ e $h_2 \to \infty$. Um

outro caso-limite importante, $h_1 = h_2 = 0$, nos dá condições de contorno correspondentes a extremidades isoladas.

A última generalização que discutiremos neste capítulo trata da geometria da região na qual o problema é dado. Os resultados do Cap. 10 só são aplicáveis para uma classe relativamente restrita de problemas, basicamente aqueles nos quais a região de interesse é retangular, ou, em alguns casos, circular. Mais adiante, neste capítulo, vamos considerar determinados problemas colocados em alguns outros tipos de regiões geométricas.

Vamos considerar a equação

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u \tag{9}$$

obtida fazendo-se o termo $F(x, t)$ igual a zero na Eq. (7). Para separar as variáveis, vamos supor que

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{10}$$

e substituir u na Eq. (9). Obtemos

$$r(x)XT' = [p(x)X']'T - q(x)XT \tag{11}$$

ou, dividindo por $r(x)XT$,

$$\frac{T'}{T} = \frac{[p(x)X']'}{r(x)X} - \frac{q(x)}{r(x)} = -\lambda. \tag{12}$$

Denotamos a constante de separação por $-\lambda$, antecipando o fato de que ela, em geral, será real e negativa. Da Eq. (12), obtemos as duas equações diferenciais ordinárias a seguir para X e T:

$$[p(x)X']' - q(x)X + \lambda r(x)X = 0, \tag{13}$$

$$T' + \lambda T = 0. \tag{14}$$

Substituindo u dada pela Eq. (10) nas Eqs. (8) e supondo que h_1 e h_2 são constantes, obtemos as condições de contorno

$$X'(0) - h_1X(0) = 0, \qquad X'(L) + h_2X(L) = 0. \tag{15}$$

Para prosseguir, precisamos resolver a Eq. (13) sujeita às condições de contorno (15). Embora esse seja um problema de valores de contorno linear homogêneo com fronteira com dois pontos mais geral do que o que consiste na equação diferencial (4) e condições de contorno (5) ou (6), as soluções se comportam de maneira bem parecida. Para qualquer valor de λ, o problema (13), (15) tem a solução trivial $X(x) = 0$. Para determinados valores de λ, chamados **autovalores**, existem outras soluções não-triviais, chamadas **autofunções**. Essas autofunções formam a base para uma solução em série de diversos problemas em equações diferenciais parciais, tais como a equação de calor generalizada (9), sujeita às condições de contorno (8) e à condição inicial (3).

Vamos discutir, neste capítulo, algumas das propriedades de soluções de problemas de valores de contorno com fronteiras de dois pontos para equações diferenciais lineares de segunda ordem. Vamos considerar, algumas vezes, a equação homogênea linear geral

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \tag{16}$$

estudada no Cap. 3. No entanto, em geral, é melhor discutir equações nas quais os termos envolvendo a primeira e a segunda derivadas estão relacionados como na Eq. (13). Sempre é possível transformar a equação geral (16) de modo que os termos contendo as derivadas aparecem como na Eq. (13) (veja o Problema 11).

Problemas de valores de contorno com equações diferenciais de ordem mais alta também podem ocorrer; neles, o número de condições de contorno tem que ser igual à ordem da equação diferencial. Como regra geral, a ordem da equação diferencial é par e metade das condições de contorno são dadas em cada extremidade do intervalo. Também é possível uma única condição de contorno envolver valores da solução e/ou suas derivadas nos dois pontos de fronteira; por exemplo,

$$y(0) - y(L) = 0. \tag{17}$$

O exemplo a seguir envolve uma condição de contorno da forma (15) e é, portanto, mais complicado que os problemas na Seção 10.1.

Exemplo 1

Encontre os autovalores e as autofunções correspondentes do problema de valores de contorno

$$y'' + \lambda y = 0, \tag{18}$$

$$y(0) = 0, \qquad y'(1) + y(1) = 0. \tag{19}$$

Um exemplo de onde ocorre esse problema é a condução de calor em uma barra de comprimento unitário. A condição de contorno em $x = 0$ corresponde à temperatura nula neste ponto. A condição de contorno em $x = 1$ corresponde à taxa de fluxo de calor ser proporcional a temperatura neste ponto, e as unidades foram escolhidas de modo que a constante de proporcionalidade seja 1 (veja o Apêndice A do Cap. 10).

A solução da equação diferencial pode ter diversas formas, dependendo de λ, de modo que é preciso considerar diversos casos. Primeiro, se $\lambda = 0$, a solução geral da equação diferencial é

$$y = c_1x + c_2. \tag{20}$$

As duas condições de contorno implicam em

$$c_2 = 0, \qquad 2c_1 + c_2 = 0, \tag{21}$$

respectivamente. A única solução das Eqs. (21) é $c_1 = c_2 = 0$, de modo que o problema de valores de contorno original não tem solução não-trivial nesse caso. Logo, $\lambda = 0$ não é um autovalor.

Se $\lambda > 0$, então a solução geral da equação diferencial (18) é

$$y = c_1 \operatorname{sen}\sqrt{\lambda}\,x + c_2\cos\sqrt{\lambda}\,x, \tag{22}$$

onde $\sqrt{\lambda} > 0$. A condição de contorno em $x = 0$ implica que $c_2 = 0$; da condição de contorno em $x = 1$, obtemos a equação

$$c_1(\operatorname{sen}\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}) = 0.$$

Para uma solução não-trivial y, precisamos ter $c_1 \neq 0$, logo λ tem que satisfazer

$$\operatorname{sen}\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0. \tag{23}$$

Note que, se λ é tal que $\cos\sqrt{\lambda} = 0$, então $\operatorname{sen}\sqrt{\lambda} \neq 0$ e a Eq. (23) não é satisfeita. Logo, podemos supor que $\cos\sqrt{\lambda} \neq 0$; dividindo a Eq. (23) por $\cos\sqrt{\lambda}$, obtemos

$$\sqrt{\lambda} = -\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}. \tag{24}$$

As soluções da Eq. (24) podem ser determinadas numericamente. Elas também podem ser encontradas, aproximadamente, esboçando-se os gráficos de $f(\sqrt{\lambda}) = \sqrt{\lambda}$ e de $g(\sqrt{\lambda}) = -\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}$

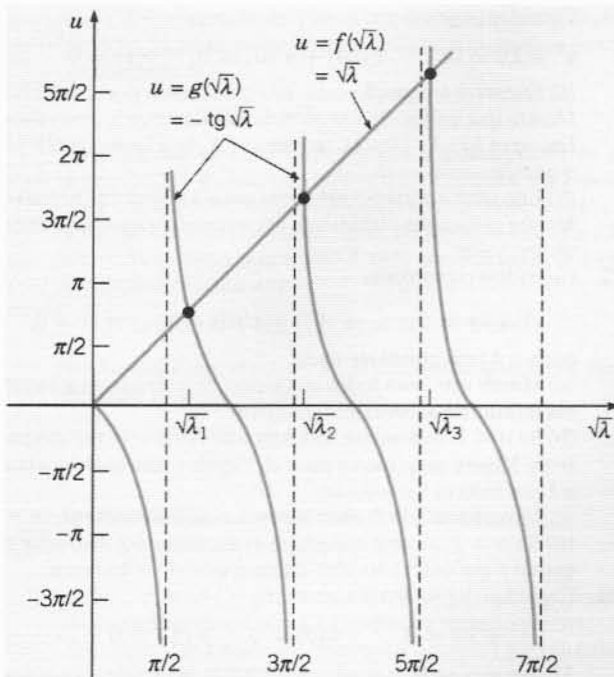


FIG. 11.1.1 Solução gráfica de $\sqrt{\lambda} = -\text{tg}\sqrt{\lambda}$.

para $\sqrt{\lambda} > 0$ no mesmo conjunto de eixos e identificando-se os pontos de interseção das duas curvas (veja a Fig. 11.1.1). O ponto $\sqrt{\lambda} = 0$ está excluído, especificamente, desse argumento porque a solução (22) só é válida para $\sqrt{\lambda} \neq 0$. Apesar do fato de as curvas se interceptarem nesse ponto, $\lambda = 0$ não é um autovalor, como já vimos antes. As três primeiras soluções positivas da Eq. (24) são $\sqrt{\lambda_1} \cong 2{,}029$, $\sqrt{\lambda_2} \cong 4{,}913$ e $\sqrt{\lambda_3} \cong 7{,}979$. Como pode ser visto da Fig. 11.1.1, as outras raízes são dadas, com precisão razoável, por $\sqrt{\lambda} \cong (2n-1)\pi/2$ para $n = 4, 5, \ldots$, e a precisão dessa estimativa melhora quando n aumenta. Portanto, os autovalores são

$$\lambda_1 \cong 4{,}116, \qquad \lambda_2 \cong 24{,}14,$$
$$\lambda_3 \cong 63{,}66, \ \lambda_n \cong (2n-1)^2\pi^2/4 \quad \text{para } n = 4, 5, \ldots. \tag{25}$$

Finalmente, como $c_2 = 0$, a autofunção correspondente ao autovalor λ_n é

$$\phi_n(x, \lambda_n) = k_n \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\,x; \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{26}$$

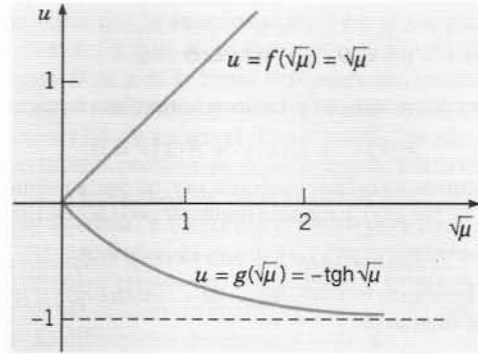


FIG. 11.1.2 Solução gráfica de $\sqrt{\mu} = -\text{tgh}\sqrt{\mu}$.

onde a constante k_n permanece arbitrária.

Vamos considerar, agora, $\lambda < 0$. Nesse caso, é conveniente fazer $\lambda = -\mu$, onde $\mu > 0$. A Eq. (14) fica, então,

$$y'' - \mu y = 0, \tag{27}$$

e sua solução geral é

$$y = c_1 \operatorname{senh}\sqrt{\mu}\,x + c_2 \cosh\sqrt{\mu}\,x, \tag{28}$$

onde $\sqrt{\mu} > 0$. Procedendo como no caso anterior, vemos que μ tem que satisfazer a equação

$$\sqrt{\mu} = -\text{tgh}\sqrt{\mu}. \tag{29}$$

Da Fig. 11.1.2, é claro que os gráficos de $f(\sqrt{\mu}) = \sqrt{\mu}$ e de $g(\sqrt{\mu}) = -\text{tgh}\sqrt{\mu}$ só fazem interseção na origem. Logo, não existem valores positivos de $\sqrt{\mu}$ que satisfazem a Eq. (29) e, portanto, o problema de valores de contorno (18), (19) não tem autovalores negativos.

Finalmente, é necessário considerar a possibilidade de que λ possa ser complexo. É possível mostrar, através de um cálculo direto, que o problema (18), (19) não tem autovalores complexos. No entanto, na Seção 11.2, vamos considerar, em mais detalhes, uma grande classe de problemas que incluem esse exemplo. Uma das coisas que vamos mostrar é que todos os problemas nessa classe têm, apenas, autovalores reais. Portanto, vamos omitir a discussão da não-existência de autovalores complexos aqui. Concluímos, então, que todos os autovalores e autofunções do problema (18), (19) são dados pelas Eqs. (25) e (26).

Problemas

Nos problemas de 1 a 6, diga se o problema de valores de contorno dado é homogêneo ou não-homogêneo.

1. $y'' + 4y = 0, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$
2. $[(1 + x^2)y']' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$
3. $y'' + 4y = \operatorname{sen} x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
4. $-y'' + x^2y = \lambda y, \quad y'(0) - y(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 0$
5. $-[(1 + x^2)y']' = \lambda y + 1, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 0$
6. $-y'' = \lambda(1 + x^2)y, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) + 3y(1) = 0$

Nos problemas de 7 a 10, determine a forma das autofunções e a equação satisfeita pelos autovalores não-nulos. Determine se $\lambda = 0$ é um autovalor e encontre valores aproximados para λ_1 e λ_2, os dois autovalores não-nulos de menor módulo. Estime λ_n para valores de n grandes. Suponha que todos os autovalores são reais.

7. $y'' + \lambda y = 0,$
   $y(0) = 0, \quad y(\pi) + y'(\pi) = 0$
8. $y'' + \lambda y = 0,$
   $y'(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0$
9. $y'' + \lambda y = 0,$
   $y(0) - y'(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0$

10. $y'' - \lambda y = 0,$
$y(0) + y'(0) = 0, \qquad y(1) = 0$

11. Considere a equação geral linear homogênea de segunda ordem
$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0. \qquad \text{(i)}$$
Procuramos um fator integrante $\mu(x)$ tal que, ao se multiplicar a Eq. (i) por $\mu(x)$, a equação resultante pode ser escrita na forma
$$[\mu(x)P(x)y']' + \mu(x)R(x)y = 0. \qquad \text{(ii)}$$
(a) Igualando os coeficientes de y', mostre que μ tem que ser uma solução de
$$P\mu' = (Q - P')\mu. \qquad \text{(iii)}$$
(b) Resolva a Eq. (iii), mostrando, assim, que
$$\mu(x) = \frac{1}{P(x)} \exp \int_{x_0}^{x} \frac{Q(s)}{P(s)}\, ds. \qquad \text{(iv)}$$
Compare esse resultado com o do Problema 27 da Seção 3.2.

Nos problemas de 12 a 15, use o método do Problema 11 para colocar a equação dada na forma $[p(x)y']' + q(x)y = 0$.

12. $y'' - 2xy' + \lambda y = 0,$ equação de Hermite
13. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$ equação de Bessel
14. $xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0,$ equação de Laguerre
15. $(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0,$ equação de Chebyshev

16. A equação
$$u_{tt} + bu_t + ku = a^2 u_{xx} + F(x, t), \qquad \text{(i)}$$
onde $a^2 > 0$, $c \geq 0$ e $k \geq 0$ são constantes, é conhecida como a **equação do telégrafo**. Ela aparece no estudo de uma corda elástica sob tensão (veja o Apêndice B do Cap. 10). A Eq. (i) ocorre, também, em outras aplicações. Supondo que $F(x, t) = 0$, seja $u(x, t) = X(x)T(t)$, separe as variáveis na Eq. (i) e deduza as equações diferenciais ordinárias para X e T.

17. Considere o problema de valores de contorno
$$y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$
(a) Defina uma nova variável dependente u pela relação $y = s(x)u$. Determine $s(x)$ de modo que a equação diferencial para u não tenha termo em u'.
(b) Resolva o problema de valores de contorno para u e determine, assim, os autovalores e autofunções do problema original. Suponha que todos os autovalores sejam reais.
(c) Resolva, também, o problema diretamente (sem definir u).

18. Considere o problema de valores de contorno
$$y'' + 4y' + (4 + 9\lambda)y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0.$$
(a) Determine, pelo menos aproximadamente, os autovalores reais e as autofunções correspondentes procedendo como no Problema 17(a, b).
(b) Resolva, também, o problema dado diretamente (sem introduzir uma variável nova).
Sugestão: No item (a), preste atenção tanto às condições de contorno quanto à equação diferencial.

As equações diferenciais nos Problemas 19 e 20 diferem das encontradas nos problemas antecedentes, uma vez que o parâmetro λ multiplica o termo contendo y', além do que contém y. Nesses problemas, determine os autovalores reais e as autofunções correspondentes.

19. $y'' + y' + \lambda(y' + y) = 0,$
$y'(0) = 0, \qquad y(1) = 0$

20. $x^2y'' - \lambda(xy' - y) = 0,$
$y(1) = 0, \qquad y(2) - y'(2) = 0$

21. Considere o problema
$$y'' + \lambda y = 0, \qquad 2y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$
(a) Encontre a equação satisfeita pelos autovalores positivos. Mostre que existe uma seqüência infinita de tais autovalores. Encontre λ_1 e λ_2. Depois, mostre que $\lambda_n \approx [(2n + 1)\pi/2]^2$ para n grande.
(b) Encontre a equação satisfeita pelos autovalores negativos. Mostre que existe exatamente um autovalor negativo e encontre seu valor.

22. Considere o problema
$$y'' + \lambda y = 0, \qquad \alpha y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$
onde α é uma constante dada.
(a) Mostre que, para todos os valores de α, existe uma seqüência infinita de autovalores positivos.
(b) Se $\alpha < 1$, mostre que todos os autovalores (reais) são positivos. Mostre que o menor autovalor tende a zero quando α tende a 1 por valores mais baixos.
(c) Mostre que $\lambda = 0$ é um autovalor se, e somente se, $\alpha = 1$.
(d) Se $\alpha > 1$, mostre que existe exatamente um autovalor negativo e que esse autovalor diminui quando α aumenta.

23. Considere o problema
$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0.$$
Mostre que, se ϕ_m e ϕ_n são autofunções associadas aos autovalores λ_m e λ_n, respectivamente, com $\lambda_m \neq \lambda_n$, então
$$\int_0^L \phi_m(x)\phi_n(x)\, dx = 0.$$
Sugestão: Note que
$$\phi_m'' + \lambda_m \phi_m = 0, \qquad \phi_n'' + \lambda_n \phi_n = 0.$$
Multiplique a primeira dessas equações por ϕ_n, a segunda por ϕ_m e integre de 0 a L usando integração por partes. Finalmente, subtraia uma equação da outra.

24. Vamos considerar, neste problema, um problema de autovalores de ordem mais alta. No estudo das vibrações transversas de uma barra elástica uniforme, chega-se à equação diferencial
$$y^{\text{iv}} - \lambda y = 0,$$
onde y é o deslocamento transversal e $\lambda = m\omega^2/EI$; m é a massa por unidade de comprimento da barra, E é o módulo de Young, I é o momento de inércia da seção reta em relação a um eixo perpendicular ao plano de vibração que contém o centróide e ω é a freqüência de vibração. Então, para uma barra cujas propriedades materiais e geométricas são dadas, os autovalores determinam as freqüências naturais de vibração. As condições de contorno em cada extremidade são, em geral, de um dos seguintes tipos:

$y = y' = 0,$ extremidade presa,
$y = y'' = 0,$ extremidade apoiada ou com dobradiça,
$y'' = y''' = 0,$ extremidade livre.

Para cada um dos três casos, encontre a forma das autofunções e a equação satisfeita pelos autovalores desse problema de valores de contorno de quarta ordem. Determine λ_1 e λ_2, os dois autovalores de menor módulo. Suponha que os autovalores são reais e positivos.

(a) $y(0) = y''(0) = 0, \ y(L) = y''(L) = 0$
(b) $y(0) = y''(0) = 0, \ y(L) = y'(L) = 0$
(c) $y(0) = y'(0) = 0, \ y''(L) = y'''(L) = 0$ (viga em balanço)

25. Esse problema ilustra o fato de que o autovalor pode aparecer tanto nas condições de contorno quanto na equação diferencial. Considere as vibrações longitudinais de uma barra uniforme de comprimento L. Pode-se mostrar que o deslocamento axial $u(x, t)$ satisfaz a equação diferencial parcial
$$(E/\rho)u_{xx} = u_{tt}; \qquad 0 < x < L, \quad t > 0, \qquad \text{(i)}$$

onde E é o módulo de Young e ρ é a massa por unidade de volume. Se a extremidade em $x = 0$ está fixa, então a condição de contorno aí é

$$u(0, t) = 0, \qquad t > 0. \tag{ii}$$

Suponha que a extremidade em $x = L$ está rigidamente presa a uma massa m, mas não tem outras restrições. Podemos obter a condição de contorno aí escrevendo a lei de Newton para a massa. Da teoria de elasticidade, pode-se mostrar que a força exercida na barra pela massa é dada por $-EAu_x(L, t)$. Logo, a condição de contorno é

$$EAu_x(L, t) + mu_{tt}(L, t) = 0, \qquad t > 0. \tag{iii}$$

(a) Suponha que $u(x, t) = X(x)T(t)$. Mostre que $X(x)$ e $T(t)$ satisfazem as equações diferenciais

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{iv}$$

$$T'' + \lambda(E/\rho)T = 0. \tag{v}$$

(b) Mostre que as condições de contorno são

$$X(0) = 0, \qquad X'(L) - \gamma\lambda L X(L) = 0, \tag{vi}$$

onde $\gamma = m/\rho AL$ é um parâmetro adimensional que fornece a razão entre a massa presa e a massa da barra.

Sugestão: Use a equação diferencial para $T(t)$ para simplificar a condição de contorno em $x = L$.

(c) Determine a forma das autofunções e a equação satisfeita pelos autovalores reais das equações (iv) e (vi). Encontre os dois primeiros autovalores λ_1 e λ_2 se $\gamma = 0{,}5$.

11.2 Problemas de Valores de Contorno de Sturm-Liouville

Vamos considerar, agora, problemas de valores de contorno com fronteiras de dois pontos, do tipo obtido na Seção 11.1, separando as variáveis em um problema de condução de calor em uma barra com propriedades materiais variáveis e um termo de fonte proporcional à temperatura. Esse tipo de problema ocorre em muitas outras aplicações.

Esses problemas de valores de contorno estão associados, em geral, aos nomes de Sturm e Liouville.[1] Eles consistem em uma equação diferencial da forma

$$[p(x)y']' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \tag{1}$$

no intervalo $0 < x < 1$, junto com condições de contorno do tipo

$$a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0, \qquad b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0 \tag{2}$$

nas extremidades. É conveniente, muitas vezes, introduzir o operador diferencial linear homogêneo L definido por

$$L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y. \tag{3}$$

Então, a equação diferencial (1) pode ser escrita como

$$L[y] = \lambda r(x)y. \tag{4}$$

[1]Charles-François Sturm (1803-1855) e Joseph Liouville (1809-1882), em uma série de artigos entre 1836 e 1837, estabeleceram diversas propriedades da classe de problemas de valores de contorno associados a seus nomes, inclusive os resultados enunciados nos teoremas de 11.2.1 a 11.2.4. Sturm também é famoso por um teorema sobre o número de zeros de um polinômio e, além disso, tem muitos trabalhos em física e mecânica. Além de sua pesquisa em análise, álgebra e teoria dos números, Liouville foi o fundador, e editor durante 39 anos, do importante *Journal de mathématiques pures et appliquées*. Um de seus resultados mais importantes foi a demonstração (em 1844) da existência de números transcendentais.

Vamos supor que as funções p, p', q e r são contínuas no intervalo $0 \le x \le 1$ e que, além disso, $p(x) > 0$ e $r(x) > 0$ em todos os pontos $0 \le x \le 1$. Essas hipóteses são necessárias para tornar a teoria o mais simples possível e manter, ao mesmo tempo, uma generalidade razoável. Essas condições são satisfeitas, de fato, em muitos problemas importantes de física matemática. Por exemplo, a equação $y'' + \lambda y = 0$, que aparece, repetidamente, na seção anterior, é da forma (1) com $p(x) = 1$, $q(x) = 0$ e $r(x) = 1$. As condições de contorno (2) são **separadas**, isto é, cada uma envolve apenas um dos pontos de fronteira. Essas são as condições de contorno separadas mais gerais possíveis para uma equação diferencial de segunda ordem.

Antes de estabelecer algumas propriedades do problema de Sturm-Liouville (1), (2), precisamos obter uma identidade, conhecida como a **identidade de Lagrange**, básica no estudo de problemas de valores de contorno lineares. Suponha que u e v são funções com derivadas segundas contínuas no intervalo $0 \le x \le 1$. Então,[2]

$$\int_0^1 L[u]v\,dx = \int_0^1 [-(pu')'v + quv]\,dx.$$

Integrando o primeiro termo na integral à direita do sinal de igualdade duas vezes por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 L[u]v\,dx &= -p(x)u'(x)v(x)\Big|_0^1 + p(x)u(x)v'(x)\Big|_0^1 \\ &\quad + \int_0^1 [-u(pv')' + uqv]\,dx \\ &= -p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]\Big|_0^1 \\ &\quad + \int_0^1 uL[v]\,dx.\end{aligned}$$

Logo, passando para o lado esquerdo do sinal da igualdade a integral à direita, temos

$$\int_0^1 \{L[u]v - uL[v]\}\,dx = -p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]\Big|_0^1, \tag{5}$$

que é a identidade de Lagrange.

Vamos supor, agora, que as funções u e v na Eq. (5) satisfazem, também, as condições de contorno (2). Então, supondo que $a_2 \neq 0$ e que $b_2 \neq 0$, a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (5) fica

$$\begin{aligned}&-p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]\Big|_0^1 \\ &= -p(1)[u'(1)v(1) - u(1)v'(1)] + p(0)[u'(0)v(0) \\ &\quad - u(0)v'(0)] \\ &= -p(1)\left[-\frac{b_1}{b_2}u(1)v(1) + \frac{b_1}{b_2}u(1)v(1)\right] \\ &\quad + p(0)\left[-\frac{a_1}{a_2}u(0)v(0) + \frac{a_1}{a_2}u(0)v(0)\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

[2]Para simplificar, algumas vezes vamos usar a notação $\int_0^1 f\,dx$ em vez de $\int_0^1 f(x)\,dx$.

O mesmo resultado vale se a_2 ou b_2 for nulo; a demonstração, nesse caso, é ainda mais simples e é deixada para o leitor. Logo, se o operador diferencial L é dado pela Eq. (3) e se as funções u e v satisfazem as condições de contorno (2), a identidade de Lagrange se reduz a

$$\int_0^1 \{L[u]v - uL[v]\}\,dx = 0. \qquad (6)$$

Vamos escrever a Eq. (6) de maneira ligeiramente diferente. Definimos, na Eq. (4) da Seção 10.2, o produto interno (u, v) de duas funções reais u e v em um intervalo dado; usando o intervalo $0 \leq x \leq 1$, temos

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)\,dx. \qquad (7)$$

Com essa notação, a Eq. (6) fica

$$(L[u], v) - (u, L[v]) = 0. \qquad (8)$$

Para provar o Teorema 11.2.1 abaixo, vamos precisar trabalhar com funções complexas. Por analogia com a definição na Seção 7.2 para vetores, definimos o produto interno de duas funções complexas em $0 \leq x \leq 1$ como

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)\overline{v}(x)\,dx, \qquad (9)$$

onde $\overline{v}$ é o complexo conjugado de v. É claro que a Eq. (9) fica igual à Eq. (7) se $u(x)$ e $v(x)$ são reais. É importante saber que a Eq. (8) permanece válida sob as condições enunciadas se u e v forem funções complexas e o produto interno (9) for usado. Para ver isso, podemos começar com a quantidade $\int_0^1 L[u]\overline{v}\,dx$ e seguir os passos que levam à Eq. (6), usando o fato de que $p(x)$, $q(x)$, a_1, a_2, b_1 e b_2 são todos reais (veja o Problema 22).

Vamos considerar algumas das implicações da Eq. (8) para o problema de Sturm-Liouville (1), (2). Vamos supor, sem demonstração,[3] que esse problema tem, de fato, autovalores e autofunções. Nos teoremas de 11.2.1 a 11.2.4 abaixo, enunciamos diversas de suas propriedades importantes, embora relativamente elementares. Cada uma dessas propriedades é ilustrada para o problema de Sturm-Liouville básico

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \qquad (10)$$

cujos autovalores são $\lambda_n = n^2\pi^2$, com as autofunções correspondentes $\phi_n(x) = \operatorname{sen} n\pi x$.

Teorema 11.2.1

Todos os autovalores do problema de Sturm-Liouville (1), (2) são reais.

Para provar esse teorema, vamos supor que λ é um autovalor (possivelmente complexo) do problema (1), (2) e que ϕ é uma autofunção associada, também, possivelmente, complexa. Vamos escrever $\lambda = \mu + i\nu$ e $\phi(x) = U(x) + iV(x)$, onde μ, ν, $U(x)$ e $V(x)$ são reais. Então, fazendo $u = \phi$ e $v = \phi$ na Eq. (8), temos

$$(L[\phi], \phi) = (\phi, L[\phi]). \qquad (11)$$

Sabemos, no entanto, que $L[\phi] = \lambda r\phi$, de modo que a Eq. (11) fica

$$(\lambda r\phi, \phi) = (\phi, \lambda r\phi). \qquad (12)$$

Usando a definição (9) do produto interno para escrever a Eq. (12) por extenso, obtemos

$$\int_0^1 \lambda r(x)\phi(x)\overline{\phi}(x)\,dx = \int_0^1 \phi(x)\overline{\lambda}\overline{r}(x)\overline{\phi}(x)\,dx. \qquad (13)$$

Como $r(x)$ é real, a Eq. (13) se reduz a

$$(\lambda - \overline{\lambda})\int_0^1 r(x)\phi(x)\overline{\phi}(x)\,dx = 0,$$

ou

$$(\lambda - \overline{\lambda})\int_0^1 r(x)[U^2(x) + V^2(x)]\,dx = 0. \qquad (14)$$

O integrando na Eq. (14) não é negativo nem é identicamente nulo. Como o integrando é contínuo, segue que a integral é positiva. Portanto, o fator $\lambda - \overline{\lambda} = 2i\nu$ tem que ser nulo. Logo, $\nu = 0$ e λ é real, o que prova o teorema.

Uma conseqüência importante do Teorema 11.2.1 é que, para se encontrar autovalores e autofunções de um problema de valores de contorno de Sturm-Liouville, basta procurar por autovalores reais. Lembre-se de que foi isso que fizemos no Cap. 10. É, também, possível mostrar que as autofunções do problema de valores de contorno (1), (2) são reais. Uma demonstração está esboçada no Problema 23.

Teorema 11.2.2

Se ϕ_1 e ϕ_2 são duas autofunções do problema de Sturm-Liouville (1), (2), correspondente aos autovalores λ_1 e λ_2, respectivamente, e, se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então

$$\int_0^1 r(x)\phi_1(x)\phi_2(x)\,dx = 0. \qquad (15)$$

Esse teorema expressa a propriedade de **ortogonalidade** das autofunções em relação à função peso r. Para provar o teorema, observamos que ϕ_1 e ϕ_2 satisfazem as equações diferenciais

$$L[\phi_1] = \lambda_1 r\phi_1 \qquad (16)$$

e

$$L[\phi_2] = \lambda_2 r\phi_2, \qquad (17)$$

respectivamente. Fazendo $u = \phi_1$, $v = \phi_2$ e substituindo na Eq. (8), obtemos

$$(\lambda_1 r\phi_1, \phi_2) - (\phi_1, \lambda_2 r\phi_2) = 0,$$

ou, usando a Eq. (9),

$$\lambda_1\int_0^1 r(x)\phi_1(x)\overline{\phi}_2(x)\,dx - \overline{\lambda}_2\int_0^1 \phi_1(x)\overline{r}(x)\overline{\phi}_2(x)\,dx = 0.$$

Como λ_2, $r(x)$ e $\phi_2(x)$ são reais, essa equação fica

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^1 r(x)\phi_1(x)\phi_2(x)\,dx = 0. \qquad (18)$$

Como, por hipótese, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ϕ_1 e ϕ_2 têm que satisfazer a Eq. (15) e o teorema está demonstrado.

[3] A demonstração pode ser encontrada, por exemplo, nos livros de Sagan (Cap. 5) ou Birkhoff e Rota (Cap. 10).

Teorema 11.2.3

Os autovalores do problema de Sturm-Liouville (1), (2) são todos simples, isto é, a cada autovalor corresponde apenas uma autofunção linearmente independente. Além disso, os autovalores formam uma seqüência infinita e podem ser ordenados crescentemente, de modo que

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_n < \cdots.$$

Além disso, $\lambda_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.

A demonstração desse teorema é um pouco mais avançada do que a dos dois teoremas antecedentes e será omitida. No entanto, a demonstração de que os autovalores são simples está esquematizada no Problema 20.

Observamos, novamente, que todas as propriedades enunciadas nos teoremas de 11.2.1 a 11.2.3 são exemplificadas pelos autovalores $\lambda_n = n^2\pi^2$ e as autofunções $\phi_n(x) = \operatorname{sen} n\pi x$ do problema exemplo (10). É claro que os autovalores são reais. As autofunções satisfazem as relações de ortogonalidade

$$\int_0^1 \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = \int_0^1 \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi x\,dx = 0,$$
$$m \neq n, \qquad (19)$$

estabelecida na Seção 10.2 por integração direta. Além disso, os autovalores podem ser ordenados de modo que $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ e $\lambda_n \to \infty$. Finalmente, para cada autovalor corresponde uma única autofunção linearmente independente.

Vamos supor que os autovalores do problema de Sturm-Liouville (1), (2) estão ordenados como indicado no Teorema 11.2.3. Existe uma autofunção ϕ_n associada a cada autovalor λ_n, determinada a menos de uma constante multiplicativa. É conveniente, muitas vezes, escolher a constante arbitrária que multiplica cada autofunção de modo a satisfazer a condição

$$\int_0^1 r(x)\phi_n^2(x)\,dx = 1, \qquad n = 1, 2, \ldots. \qquad (20)$$

A Eq. (20) é uma condição de normalização e as autofunções que satisfazem essa condição são ditas **normalizadas**. De fato, nesse caso, elas formam um **conjunto ortonormal completo** (em relação à função peso r), pois satisfazem, também, a relação de ortogonalidade (15). Algumas vezes, é útil combinar as Eqs. (15) e (20) em uma única equação. Para isso, definimos o símbolo δ_{mn}, conhecido como o δ de Kronecker,[4] por

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ 1, & \text{se } m = n. \end{cases} \qquad (21)$$

Usando o δ de Kronecker, podemos escrever as Eqs. (15) e (20) como

$$\int_0^1 r(x)\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = \delta_{mn}. \qquad (22)$$

Exemplo 1

Determine as autofunções normalizadas do problema (10):

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Os autovalores desse problema são $\lambda_1 = \pi^2$, $\lambda_2 = 4\pi^2$, ..., $\lambda_n = n^2\pi^2$, ... e as autofunções correspondentes são $k_1 \operatorname{sen} \pi x$, $k_2 \operatorname{sen} 2\pi x$, ..., $k_n \operatorname{sen} n\pi x$, ..., respectivamente. Nesse caso, a função peso é $r(x) = 1$. Para satisfazer a Eq. (20), precisamos escolher k_n tal que

$$\int_0^1 (k_n \operatorname{sen} n\pi x)^2\,dx = 1 \qquad (23)$$

para cada valor de n. Como

$$k_n^2 \int_0^1 \operatorname{sen}^2 n\pi x\,dx = k_n^2 \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2n\pi x\right)dx = \tfrac{1}{2}k_n^2,$$

a Eq. (23) é satisfeita se k_n for escolhido como sendo $\sqrt{2}$ para cada valor de n. Logo, as autofunções normalizadas do problema de valores de contorno dado é

$$\phi_n(x) = \sqrt{2}\operatorname{sen} n\pi x, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (24)$$

Exemplo 2

Determine as autofunções normalizadas do problema

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 0. \qquad (25)$$

No Exemplo 1 da Seção 11.1, vimos que os autovalores λ_n satisfazem a equação

$$\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n} + \sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n} = 0, \qquad (26)$$

e que as autofunções correspondentes são

$$\phi_n(x) = k_n \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\,x, \qquad (27)$$

onde k_n é arbitrária. Podemos determinar k_n da condição de normalização (20). Como $r(x) = 1$ nesse problema, temos

$$\begin{aligned}\int_0^1 \phi_n^2(x)\,dx &= k_n^2 \int_0^1 \operatorname{sen}^2\sqrt{\lambda_n}\,x\,dx \\ &= k_n^2 \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos 2\sqrt{\lambda_n}\,x\right)dx \\ &= k_n^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\sqrt{\lambda_n}\,x}{4\sqrt{\lambda_n}}\right)\Bigg|_0^1\end{aligned}$$

[4]Leopold Kronecker (1823-1891), um aluno de Dirichlet, esteve ligado à Universidade de Berlim a maior parte de sua vida, embora só tenha tido uma posição formal como professor a partir de 1883 (pois tinha fortuna própria). Trabalhou em teoria dos números, funções elétricas, álgebra e suas interconexões.

$$= k_n^2 \frac{2\sqrt{\lambda_n} - \operatorname{sen} 2\sqrt{\lambda_n}}{4\sqrt{\lambda_n}}$$

$$= k_n^2 \frac{\sqrt{\lambda_n} - \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}}{2\sqrt{\lambda_n}}$$

$$= k_n^2 \frac{1 + \cos^2\sqrt{\lambda_n}}{2},$$

onde usamos a Eq. (26) no último passo. Logo, para normalizar as autofunções ϕ_n, precisamos escolher

$$k_n = \left(\frac{2}{1 + \cos^2\sqrt{\lambda_n}}\right)^{1/2}. \qquad (28)$$

As autofunções normalizadas do problema dado são

$$\phi_n(x) = \frac{\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\,x}{(1 + \cos^2\sqrt{\lambda_n})^{1/2}}; \qquad n = 1, 2, \ldots. \qquad (29)$$

Vamos considerar o problema de expandir uma função dada f em uma série de autofunções do problema de Sturm-Liouville (1), (2). Já vimos exemplos de tais expansões nas Seções de 10.2 a 10.4. Por exemplo, mostramos que, se f é contínua, tem derivada seccionalmente contínua em $0 \le x \le 1$ e satisfaz as condições de contorno $f(0) = f(1) = 0$, então f pode ser expandida em uma série de Fourier da forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\pi x. \qquad (30)$$

As funções $\operatorname{sen} n\pi x$, $n = 1, 2, \ldots$, são, precisamente, as autofunções do problema de valores de contorno (10). Os coeficientes b_n são dados por

$$b_n = 2\int_0^1 f(x) \operatorname{sen} n\pi x \, dx \qquad (31)$$

e a série (30) converge para cada x em $0 \le x \le 1$. De maneira análoga, f pode ser expandida em uma série de Fourier em cossenos usando-se as autofunções $\cos n\pi x$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, do problema de valores de contorno $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(1) = 0$.

Suponha que uma função dada f, satisfazendo condições convenientes, pode ser expandida em uma série infinita de autofunções do problema de Sturm-Liouville mais geral (1), (2). Se isso puder ser feito, então

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \qquad (32)$$

onde as funções $\phi_n(x)$ satisfazem as Eqs. (1) e (2) e, também, a condição de ortogonalidade (22). Para calcular os coeficientes na série (32), multiplicamos a Eq. (32) por $r(x)\phi_m(x)$, onde m é um inteiro positivo fixo, e integramos de $x = 0$ a $x = 1$. Supondo que a série pode ser integrada termo a termo, obtemos

$$\int_0^1 r(x) f(x) \phi_m(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^1 r(x)\phi_m(x)\phi_n(x)\, dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{mn}. \qquad (33)$$

Logo, usando a definição de δ_{mn}, temos

$$c_m = \int_0^1 r(x) f(x) \phi_m(x)\, dx = (f, r\phi_m),$$

$$m = 1, 2, \ldots. \qquad (34)$$

Assim, os coeficientes na série (32) foram determinados formalmente. A Eq. (34) tem a mesma estrutura que as fórmulas de Euler-Fourier, para os coeficientes de uma série de Fourier, e a série em autofunções (32) também tem propriedades de convergência semelhantes às das séries de Fourier. O teorema a seguir é análogo ao Teorema 10.3.1.

Teorema 11.2.4

Sejam $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$ as autofunções normalizadas do problema de Sturm-Liouville (1), (2):

$$[p(x)y']' - q(x)y + \lambda r(x)y = 0,$$

$$a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0, \qquad b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0.$$

Suponha que f e f' são seccionalmente contínuas em $0 \le x \le 1$. Então, a série (32), com os coeficientes c_n são dados pela Eq. (34), converge para $[f(x+) + f(x-)]/2$ em cada ponto do intervalo aberto $0 < x < 1$.

Se f satisfaz, além dessas, outras condições, pode-se estabelecer uma conclusão mais forte. Suponha que, além das hipóteses do Teorema 11.2.4, a função f é contínua em $0 \le x \le 1$. Se $a_2 = 0$ na primeira das Eqs. (2) [de modo que $\phi_n(0) = 0$], suponha que $f(0) = 0$. Analogamente, se $b_2 = 0$ na segunda das Eqs. (2), suponha que $f(1) = 0$. Caso contrário, não há necessidade de se supor nenhuma condição de contorno para f. Então, a série (32) converge para $f(x)$ em todos os pontos do intervalo fechado $0 \le x \le 1$.

Exemplo 3

Expanda a função

$$f(x) = x, \qquad 0 \le x \le 1 \qquad (35)$$

em termos das autofunções normalizadas $\phi_n(x)$ do problema (25).

Vimos, no Exemplo 2, que as autofunções normalizadas são

$$\phi_n(x) = k_n \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\, x, \qquad (36)$$

onde k_n é dada pela Eq. (28) e λ_n satisfaz a Eq. (26). Para encontrar a expansão para f em termos das autofunções ϕ_n, escrevemos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \qquad (37)$$

onde os coeficientes são dados pela Eq. (34). Logo,

$$c_n = \int_0^1 f(x)\phi_n(x)\,dx = k_n \int_0^1 x \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\,x\,dx.$$

Integrando por partes, obtemos

$$c_n = k_n \left(\frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n} - \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}} \right) = k_n \frac{2\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n},$$

onde usamos a Eq. (26) na última passagem. Substituindo k_n dada pela Eq. (28), obtemos

$$c_n = \frac{2\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n(1+\cos^2\sqrt{\lambda_n})^{1/2}}. \qquad (38)$$

Portanto,

$$f(x) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\,x}{\lambda_n(1+\cos^2\sqrt{\lambda_n})}. \qquad (39)$$

Observe que, embora a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (39) seja uma série em senos, não está incluída na discussão sobre séries de Fourier na Seção 10.4.

Problemas Auto-adjuntos. Problemas de valores de contorno de Sturm-Liouville têm importância própria, mas podem ser vistos, também, como pertencentes a uma classe muito maior de problemas que têm muitas das mesmas propriedades. Por exemplo, existem muitas semelhanças entre problemas de Sturm-Liouville e o sistema algébrico

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}, \qquad (40)$$

onde a matriz $n \times n$ $\mathbf{A}$ é real e simétrica ou auto-adjunta. Comparando os resultados mencionados na Seção 7.3 com os desta seção, observamos que, em ambos os casos, os autovalores são reais e as autofunções ou autovetores formam um conjunto ortogonal. Além disso, as autofunções ou autovetores podem ser usados como uma base para se expressar uma função ou vetor, respectivamente, essencialmente arbitrários, como uma soma. A diferença mais importante é que a matriz tem, apenas, um número finito de autovalores e autovetores, enquanto um problema de Sturm-Liouville tem uma infinidade. É interessante, e de importância fundamental em matemática, que esses problemas aparentemente diferentes — o problema matricial (40) e o problema de Sturm-Liouville (1), (2) — são, de fato, parte de uma única teoria subjacente. Normalmente, referimo-nos a essa teoria como a teoria dos operadores lineares e ela faz parte da área de análise funcional.

Vamos observar, agora, algumas generalizações para os problemas de Sturm-Liouville, que ainda preservam os principais resultados dos teoremas de 11.2.1 a 11.2.4 — a existência de uma seqüência de autovalores reais que tendem ao infinito, a ortogonalidade das autofunções e a possibilidade de se expandir uma função arbitrária em uma série de autofunções. Essas generalizações dependem de a relação crucial (8) permanecer válida.

Vamos considerar o problema de valores de contorno que consiste na equação diferencial

$$L[y] = \lambda r(x)y, \qquad 0 < x < 1, \qquad (41)$$

onde

$$L[y] = P_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_0(x)y, \qquad (42)$$

e n condições de contorno homogêneas nas extremidades do intervalo. Se a Eq. (8) for válida para um par de funções suficientemente diferenciáveis que satisfaçam as condições de contorno, então o problema dado é dito **auto-adjunto**. É importante notar que a Eq. (8) envolve restrições tanto sobre a equação diferencial, quanto sobre as condições de contorno. O operador diferencial L tem que ser tal que o mesmo operador aparece em ambos os termos da Eq. (8). Para isso, é preciso que L tenha ordem par. Além disso, um operador de segunda ordem tem que ter a forma (3), um operador de quarta ordem tem que ter a forma

$$L[y] = [p(x)y'']'' - [q(x)y']' + s(x)y, \qquad (43)$$

e operadores de ordem mais alta têm que ter uma estrutura análoga. Além disso, as condições de contorno têm que ser tais de modo a eliminar os termos de fronteira que aparecem durante a integração por partes usada para se deduzir a Eq. (8). Por exemplo, em um problema de segunda ordem, isso é verdadeiro para as condições de contorno separadas (2) e, também, em outros casos determinados, como o que é dado no Exemplo 4 a seguir.

Vamos supor que temos um problema de valores de contorno auto-adjunto para a Eq. (41), onde $L[y]$ é dado pela Eq. (43). Vamos supor que p, q, r e s são contínuas em $0 \leq x \leq 1$ e que as derivadas de p e q, indicadas na Eq. (43), também são contínuas. Se, além disso, $p(x) > 0$ e $r(x) > 0$ em $0 \leq x \leq 1$, então, existe uma seqüência infinita de autovalores tendendo a $+\infty$, as autofunções são ortogonais em relação à função peso r e uma função arbitrária pode ser expandida em uma série de autofunções. No entanto, as autofunções podem não ser simples para esses problemas mais gerais.

Vamos considerar, agora, a relação entre problemas de Sturm-Liouville e séries de Fourier. Observamos, anteriormente, que as séries de Fourier em senos e em co-senos podem ser obtidas usando-se as autofunções de determinados problemas de Sturm-Liouville envolvendo a equação diferencial $y'' + \lambda y = 0$. Isso levanta a pergunta de se podemos obter uma série de Fourier completa, incluindo os termos tanto em senos como em co-senos, escolhendo-se um conjunto apropriado de condições de contorno. A resposta é dada pelo exemplo a seguir, que serve para ilustrar, também, a ocorrência de condições de contorno não separadas.

Exemplo 4

Encontre os autovalores e autofunções do problema de valores de contorno

$$y'' + \lambda y = 0, \quad (44)$$

$$y(-L) - y(L) = 0, \qquad y'(-L) - y'(L) = 0. \quad (45)$$

Esse não é um problema de Sturm-Liouville, já que as condições de contorno não são separadas. As condições de contorno (45) são chamadas **condições de contorno periódicas**, já que elas forçam que y e y' tenham os mesmos valores em $x = L$ e $x = -L$. A demonstração de que o problema (44), (45) é auto-adjunto é direta. Um cálculo simples estabelece que $\lambda_0 = 0$ é um autovalor e que a autofunção correspondente é $\phi_0(x) = 1$. Além disso, existem autovalores adicionais $\lambda_1 = (\pi/L)^2$, $\lambda_2 = (2\pi/L)^2, \ldots, \lambda_n = (n\pi/L)^2, \ldots$. A cada um desses autovalores não-nulos correspondem *duas* autofunções linearmente independentes; por exemplo, correspondendo a λ_n, existem duas autofunções $\phi_n(x) = \cos(n\pi x/L)$ e $\psi_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/L)$. Isso ilustra o fato de que os autovalores podem não ser simples quando as condições de contorno não são separadas. Além disso, se procuramos expandir uma função dada de período $2L$ em uma série de autofunções do problema (44), (45), obtemos a série

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right),$$

que é, simplesmente, a série de Fourier de f.

Vamos considerar outros problemas com condições de contorno não separadas, nem trataremos de problemas de ordem maior do que segunda, exceto em poucos problemas. Existe, no entanto, um outro tipo de generalização que queremos discutir. É o caso em que os coeficientes p, q e r na Eq. (1) não satisfazem condições de continuidade e positividade tão estritas como as enunciadas no início desta seção. Tais problemas são chamados problema de Sturm-Liouville singulares e serão o assunto da Seção 11.4.

Problemas

Nos problemas de 1 a 5, determine as autofunções normalizadas do problema dado

1. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
2. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$
3. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
4. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 0$; veja a Seção 11.1, Problema 8.
5. $y'' - 2y' + (1+\lambda)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$; veja a Seção 11.1, Problema 17.

Nos problemas de 6 a 9, encontre os coeficientes da expansão em autofunções $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x)$ da função dada, usando as autofunções normalizadas do Problema 1.

6. $f(x) = 1, \quad 0 \le x \le 1$
7. $f(x) = x, \quad 0 \le x \le 1$
8. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$
9. $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$

Nos problemas de 10 a 13, encontre os coeficientes da expansão em autofunções $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x)$ da função dada, usando as autofunções normalizadas do Problema 4.

10. $f(x) = 1, \quad 0 \le x \le 1$
11. $f(x) = x, \quad 0 \le x \le 1$
12. $f(x) = 1 - x, \quad 0 \le x \le 1$
13. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$

Nos problemas de 14 a 18, determine se o problema de valores de contorno dado é auto-adjunto.

14. $y'' + y' + 2y = 0, \ y(0) = 0, \ y(1) = 0$
15. $(1 + x^2)y'' + 2xy' + y = 0, \ y'(0) = 0, \ y(1) + 2y'(1) = 0$
16. $y'' + y = \lambda y, \ y(0) - y'(1) = 0, \ y'(0) - y(1) = 0$
17. $(1 + x^2)y'' + 2xy' + y = \lambda(1 + x^2)y, \ y(0) - y'(1) = 0, \ y'(0) + 2y(1) = 0$
18. $y'' + \lambda y = 0, \ y(0) = 0, \ y(\pi) + y'(\pi) = 0$
19. Mostre que, se as funções u e v satisfazem as Eqs. (2) e se $a_2 = 0$, ou $b_2 = 0$, ou ambos, então,
$$p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]\Big|_0^1 = 0.$$
20. Esboçamos, neste problema, uma demonstração para a primeira parte do Teorema 11.2.3: que os autovalores do problema de Sturm-Liouville (1), (2) são simples. Para um λ dado, suponha que ϕ_1 e ϕ_2 são duas autofunções linearmente independentes. Calcule o wronskiano $W(\phi_1, \phi_2)(x)$ e use as condições de contorno (2) para mostrar que $W(\phi_1, \phi_2)(0) = 0$. Depois, use os Teoremas 3.3.2 e 3.3.3 para concluir que ϕ_1 e ϕ_2 não podem ser linearmente independentes como suposto.
21. Considere o problema de Sturm-Liouville
$$-[p(x)y']' + q(x)y = \lambda r(x)y,$$
$$a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0, \qquad b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0,$$
onde p, q e r satisfazem as condições enunciadas no texto.
(a) Mostre que, se λ for um autovalor e se ϕ for uma autofunção associada, então
$$\lambda\int_0^1 r\phi^2\,dx = \int_0^1 (p\phi'^2 + q\phi^2)\,dx + \frac{b_1}{b_2}p(1)\phi^2(1) - \frac{a_1}{a_2}p(0)\phi^2(0),$$
desde que $a_2 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$. Como esse resultado tem que ser modificado se $a_2 = 0$ ou $b_2 = 0$?
(b) Mostre que, se $q(x) \ge 0$, e se b_1/b_2 e $-a_1/a_2$ não são negativos, então o autovalor λ é maior ou igual a zero.
(c) Sob as condições do item (b), mostre que o autovalor λ é estritamente positivo a menos que $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ e $q(x) = 0$ para todo x em $0 \leqslant x \leqslant 1$.
22. Deduza a Eq. (8) usando o produto interno (9) e supondo que u e v são funções complexas.
Sugestão: Considere a quantidade $\int_0^1 L[u]\bar{v}\,dx$ separe u e v, em suas partes reais e imaginárias, e proceda como no texto.
23. Neste problema, indicamos uma demonstração de que as autofunções do problema de Sturm-Liouville (1), (2) são reais.

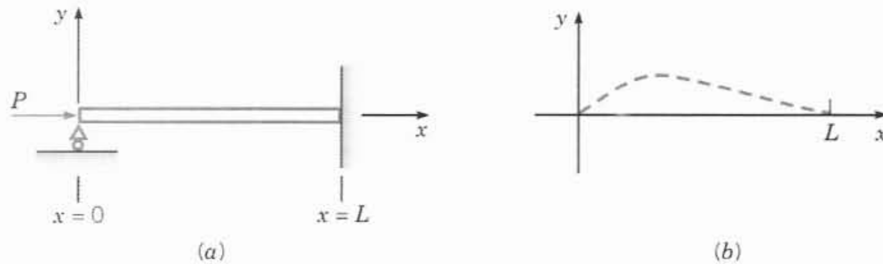


FIG. 11.2.1 (*a*) Uma coluna sendo comprimida. (*b*) Forma da coluna deformada.

(a) Sejam λ um autovalor e ϕ uma autofunção associada. Suponha que $\phi(x) = U(x) + iV(x)$ e mostre que U e V são, também, autofunções associadas a λ.
(b) Usando o Teorema 11.2.3, ou o resultado do Problema 20, mostre que U e V são linearmente dependentes.
(c) Mostre que ϕ tem que ser real, a menos de uma constante multiplicativa que pode ser complexa.

24. Considere o problema

$$x^2y'' = \lambda(xy' - y), \qquad y(1) = 0, \quad y(2) = 0.$$

Note que λ aparece como um coeficiente de y', além do próprio y. É possível estender a noção de problema auto-adjunto para esse tipo de problema e mostrar que esse problema, em particular, não é auto-adjunto. Mostre que o problema tem autovalores, mas que nenhum deles é real. Isso ilustra que, em geral, problemas que não são auto-adjuntos podem ter autovalores que não são reais.

Deformação de uma Coluna Elástica. Na investigação da deformação de uma coluna elástica de comprimento L sob uma força axial P (Fig. 11.2.1*a*), somos levados à equação diferencial

$$y^{\text{iv}} + \lambda y'' = 0, \qquad 0 < x < L. \tag{i}$$

O parâmetro λ é igual a P/EI, onde E é o módulo de Young e I é o momento de inércia da seção reta em relação a um eixo que passa pelo centróide e é perpendicular ao plano xy. As condições de contorno em $x = 0$ e $x = L$ dependem de como as extremidades da coluna estão apoiadas. Condições de contorno típicas são

$y = y' = 0$, extremidade presa;
$y = y'' = 0$, extremidade apoiada (com dobradiça).

A barra ilustrada na Fig. 11.2.1*a* está apoiada, simplesmente, em $x = 0$ e presa em $x = L$. Deseja-se determinar os autovalores e autofunções da Eq. (i) sujeita às condições de contorno adequadas. Em particular, o menor autovalor λ_1 dá a força que faz com que a coluna se deforme, ou possa ficar em uma posição de equilíbrio curva, como ilustrado na Fig. 11.2.1*b*. A autofunção correspondente descreve a configuração da coluna deformada. Note que a equação diferencial (i) não está coberta pela teoria descrita nesta seção. É possível mostrar, no entanto, que, em cada um dos casos dados aqui, todos os autovalores são reais e positivos. Os Problemas 25 e 26 tratam de problemas sobre deformação de colunas.

25. Para cada uma das condições de contorno a seguir, encontre o menor autovalor (a força de deformação) de $y^{(4)} + \lambda y'' = 0$ e encontre, também, a autofunção correspondente (a forma da coluna deformada).
(a) $y(0) = y''(0) = 0, \quad y(L) = y''(L) = 0$
(b) $y(0) = y''(0) = 0, \quad y(L) = y'(L) = 0$
(c) $y(0) = y'(0) = 0, \quad y(L) = y'(L) = 0$

26. Em alguns problemas de deformação, o parâmetro autovalor aparece nas condições de contorno, além da equação diferencial. Tal caso ocorre quando a coluna está presa em uma extremidade e a outra extremidade está livre. Nesse caso, a equação diferencial $y^{(4)} + \lambda y'' = 0$ tem que ser resolvida sujeita às condições de contorno

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(L) = 0, \quad y'''(L) + \lambda y'(L) = 0.$$

Encontre o menor autovalor e a autofunção correspondente.

27. Em uma camada de rocha porosa, solutos (isto é, substâncias dissolvidas) na água que flui pelos poros da rocha são transportados de duas maneiras diferentes. O processo pelo qual um soluto é transportado pelo movimento total do fluxo da água é chamado de **avecção**. O soluto também é transportado pelas pequenas variações na velocidade da água ao longo dos caminhos tortuosos dentro dos poros individuais, um processo chamado de **dispersão mecânica**. A forma unidimensional da equação de avecção — dispersão para um soluto não reativo dissolvido em um meio poroso saturado, homogêneo e isotrópico sob um fluxo uniforme constante é

$$c_t + vc_x = Dc_{xx}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0, \tag{i}$$

onde $c(x, t)$ é a concentração do soluto, v é a velocidade média linear da água, D é o coeficiente da dispersão hidrodinâmica e L é o comprimento do caminho. Suponha que as condições de contorno são

$$c(0,t) = 0, \qquad c_x(L,t) = 0, \qquad t > 0 \tag{ii}$$

e que a condição inicial é

$$c(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < L, \tag{iii}$$

onde $f(x)$ é a concentração inicial dada do soluto.
(a) Suponha que $c(x, t) = X(x)\,T(t)$, use o método de separação de variáveis e encontre as equações que $X(x)$ e $T(t)$ satisfazem, respectivamente. Mostre que o problema para $X(x)$ pode ser escrito na forma de Sturm-Liouville

$$[p(x)X']' + \lambda r(x)X = 0, \qquad 0 < x < L, \tag{iv}$$

$$X(0) = 0, \qquad X'(L) = 0, \tag{v}$$

onde $p(x) = r(x) = \exp(-vx/D)$. Portanto os autovalores são reais e as autofunções são ortogonais em relação à função peso $r(x)$.
(b) Seja $\mu^2 = \lambda - (v^2/4D^2)$. Mostre que as autofunções são

$$X_n(x) = e^{vx/2D} \operatorname{sen} \mu_n x, \tag{vi}$$

onde μ_n satisfaz a equação

$$\operatorname{tg} \mu L = -2D\mu/v. \tag{vii}$$

(c) Mostre graficamente que a Eq. (vii) tem uma seqüência infinita de soluções positivas e que $\mu_n \cong (2n - 1)\pi/2L$ para n grande.
(d) Mostre que

$$\int_0^L r(x)X_n^2(x)\,dx = \frac{L}{2} + \frac{v}{4D\mu_n^2} \operatorname{sen}^2 \mu_n L.$$

(e) Encontre uma solução formal do problema (i), (ii), (iii) com uma série envolvendo as autofunções $X_n(x)$.

(f) Sejam $v = 1$, $D = 0{,}5$, $L = 10$ e $f(x) = \delta(x - 3)$, onde δ é a função delta de Dirac[5]. Usando a solução encontrada no item (e), faça o gráfico de $c(x, t)$ em função de x para diversos valores de t, tais como $t = 0{,}5$; 1; 3; 6 e 10. Faça o gráfico também de $c(x, t)$ em função de t para diversos valores de x. Note que a quantidade necessária de parcelas para se obter um gráfico preciso depende fortemente dos valores de t e de x.

(g) Descreva em poucas palavras como a solução evolui com o tempo.

28. Introduz-se continuamente um rastreador não reativo com concentração c_0 em um fluxo constante na extremidade superior de uma coluna de comprimento L cheia de um meio granular homogêneo. Supondo que a concentração do rastreador na coluna é inicialmente nula, o problema de valores de contorno que modela esse processo é

$$c_t + vc_x = Dc_{xx}, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0,$$
$$c(0,t) = c_0, \qquad c_x(L,t) = 0, \qquad t > 0,$$
$$c(x,0) = 0, \qquad 0 < x < L,$$

onde $c(x, t)$, v e D são como no Problema 27.

(a) Suponha que $c(x, t) = c_0 + u(x, t)$ e encontre o problema de valores de contorno satisfeito por $u(x, t)$.

(b) Procedendo como no Problema 27, encontre $u(x, t)$ como uma expansão em autofunções.

(c) Sejam $v = 1$, $D = 0{,}5$, $c_0 = 1$ e $L = 10$. Faça o gráfico de $c(x, t)$ em função de x para diversos valores de t e faça, também, o gráfico de $c(x, t)$ em função de t para diversos valores de x.

(d) Descreva em poucas palavras como a solução evolui com o tempo. Por exemplo, aproximadamente quanto tempo vai levar para se atingir, essencialmente, a solução estado estacionário?

11.3 Problemas de Valores de Contorno Não-Homogêneos

Vamos discutir, nesta seção, como resolver problemas de valores de contorno não-homogêneos, tanto para equações diferenciais ordinárias, quanto para parciais. A maior parte de nossa atenção estará direcionada para problemas onde só a equação diferencial não é homogênea, enquanto as condições de contorno são homogêneas. Vamos supor que a solução possa ser expandida em uma série em autofunções de um problema relacionado homogêneo e, depois, determinar os coeficientes nessa série de modo que o problema não-homogêneo seja satisfeito. Vamos descrever esse método primeiro para problemas de valores de contorno para equações diferenciais lineares ordinárias de segunda ordem. Depois, vamos ilustrar sua utilização em equações diferenciais parciais resolvendo um problema de condução de calor em uma barra com propriedades variáveis e na presença de fontes de calor.

Problema de Sturm-Liouville Não-Homogêneo. Considere o problema de valores de contorno que consiste na equação diferencial não-homogênea

$$L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y = \mu r(x)y + f(x). \quad (1)$$

onde μ é uma constante dada e f é uma função dada em $0 \le x \le 1$, e nas condições de contorno

$$a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0, \qquad b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0. \quad (2)$$

Como na Seção 11.2, vamos supor que p, p', q e r são contínuas em $0 \le x \le 1$, e que $p(x) > 0$ e $r(x) > 0$ nesse intervalo. Vamos resolver o problema (1), (2) usando as autofunções do problema homogêneo correspondente que consiste na equação diferencial

$$L[y] = \lambda r(x) y \quad (3)$$

e nas condições de contorno (2). Sejam $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ os autovalores desse problema e sejam $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ as autofunções normalizadas correspondentes.

Vamos supor que a solução $y = \phi(x)$ do problema não-homogêneo (1), (2) possa ser expressa como uma série da forma

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x). \quad (4)$$

Da Eq. (34) da Seção 11.2, sabemos que

$$b_n = \int_0^1 r(x)\phi(x)\phi_n(x)\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots. \quad (5)$$

No entanto, como não conhecemos $\phi(x)$, não podemos usar a Eq. (5) para calcular b_n. Em vez disso, vamos tentar determinar b_n de modo que o problema (1), (2) seja satisfeito e usar, depois, a Eq. (4) para encontrar $\phi(x)$. Note que ϕ dado pela Eq. (4) sempre satisfaz as condições de contorno (2), já que cada ϕ_n satisfaz.

Vamos considerar, agora, a equação diferencial que ϕ tem que satisfazer. Ela é, simplesmente, a Eq. (1) com ϕ no lugar de y:

$$L[\phi](x) = \mu r(x)\phi(x) + f(x). \quad (6)$$

Vamos substituir a série (4) na equação diferencial (6) e tentar determinar b_n de modo que a equação diferencial seja satisfeita. O termo à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (6) fica

$$L[\phi](x) = L\left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n\phi_n\right](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n L[\phi_n](x)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n r(x)\phi_n(x), \quad (7)$$

onde supusemos que podemos trocar a ordem das operações de soma e de diferenciação.

Note que a função r aparece na Eq. (7) e, também, no termo $\mu r(x)\phi(x)$ na Eq. (6). Isso sugere reescrever o termo não-homogêneo na Eq. (6) como $r(x)[f(x)/r(x)]$, de modo que $r(x)$ apareça, também, multiplicando esse termo. Se a função f/r satisfaz as condições do Teorema 11.2.4, então

$$\frac{f(x)}{r(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \quad (8)$$

onde, usando a Eq. (5) com f/r no lugar de ϕ,

$$c_n = \int_0^1 r(x)\frac{f(x)}{r(x)}\phi_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\phi_n(x)\,dx,$$
$$n = 1, 2, \ldots. \quad (9)$$

[5]Veja a Seção 6.5, especialmente a Eq. (16) da seção.

Usando as Eqs. (4), (7) e (8) para substituir $\phi(x)$, $L[\phi](x)$ e $f(x)$, respectivamente, na Eq. (6), obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\lambda_n r(x)\phi_n(x) = \mu r(x)\sum_{n=1}^{\infty} b_n\phi_n(x) + r(x)\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x).$$

Depois de juntar os termos e cancelar o fator comum não-nulo $r(x)$, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(\lambda_n - \mu)b_n - c_n]\phi_n(x) = 0. \quad (10)$$

Se a Eq. (10) é satisfeita para todo x no intervalo $0 \le x \le 1$, então o coeficiente de $\phi_n(x)$ tem que ser zero para todo n; veja o Problema 14 para uma demonstração desse fato. Logo,

$$(\lambda_n - \mu)b_n - c_n = 0, \qquad n = 1, 2, \dots. \quad (11)$$

Precisamos, agora, considerar dois casos, um dos quais tem dois subcasos.

Suponha, primeiro, que $\mu \neq \lambda_n$ para $n = 1, 2, 3, \dots$, isto é, μ é diferente de todos os autovalores do problema homogêneo correspondente. Então,

$$b_n = \frac{c_n}{\lambda_n - \mu}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (12)$$

e

$$y = \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \mu}\phi_n(x). \quad (13)$$

A Eq. (13), com c_n dado pela Eq. (9), é uma solução formal do problema de valores de contorno não-homogêneo (1), (2). Nosso argumento não prova que a série (13) converge. No entanto, qualquer solução do problema de valores de contorno (1), (2), satisfaz, claramente, as condições do Teorema 11.2.4; de fato, satisfaz as condições mais fortes dadas no parágrafo que segue o teorema citado. É razoável, portanto, esperar que a série (13) convirja em cada ponto e esse fato pode ser estabelecido desde que, por exemplo, f seja contínua.

Vamos supor, agora, que μ é igual a um dos autovalores do problema homogêneo correspondente, por exemplo, $\mu = \lambda_m$; então, a situação é muito diferente. Nesse caso, para $n = m$, a Eq. (11) tem a forma $0 \cdot b_m - c_m = 0$. Novamente, precisamos considerar dois casos.

Se $\mu = \lambda_m$ e $c_m \neq 0$, então é impossível resolver a Eq. (11) para b_m e o problema não-homogêneo (1), (2) não tem solução.

Se $\mu = \lambda_m$ e $c_m = 0$, então a Eq. (11) é satisfeita independente do valor de b_m; em outras palavras, b_m permanece arbitrário. Nesse caso, o problema de valores de contorno (1), (2) tem solução, mas ela não é única, já que contém um múltiplo arbitrário da autofunção ϕ_m.

Como c_m é dado pela Eq. (9), a condição $c_m = 0$ significa que

$$\int_0^1 f(x)\phi_m(x)\,dx = 0. \quad (14)$$

Logo, se $\mu = \lambda_m$, o problema de valores de contorno não-homogêneo (1), (2) só pode ser resolvido se f for ortogonal à autofunção associada ao autovalor λ_m.

Os resultados que acabamos de obter formalmente estão resumidos no teorema a seguir.

Teorema 11.3.1

O problema de valores de contorno não-homogêneo (1), (2) tem uma única solução para cada f sempre que μ for diferente de todos os autovalores do problema homogêneo correspondente; a solução é dada pela Eq. (13) e a série converge para todo x em $0 \le x \le 1$. Se μ for igual a um autovalor λ_m do problema homogêneo correspondente, então o problema de valores de contorno não-homogêneo não tem solução, a menos que f seja ortogonal a ϕ_m, isto é, a menos que a condição (14) seja válida. Nesse caso, a solução não é única e contém um múltiplo arbitrário de $\phi_m(x)$.

A parte principal do Teorema 11.3.1 é enunciada, algumas vezes, da seguinte forma:

Teorema 11.3.2

Para um dado valor de μ, ou o problema não-homogêneo (1), (2) tem uma única solução para cada f contínua (se μ for diferente de todos os autovalores λ_m do problema homogêneo correspondente), ou então o problema homogêneo (3), (2) tem uma solução não-trivial (a autofunção associada a λ_m).

Essa última forma do teorema é conhecida como a alternativa de Fredholm.[6] Esse é um dos teoremas básicos da análise matemática e ocorre em muitos contextos diferentes. Você pode conhecê-lo em conexão com conjuntos de equações algébricas lineares, onde a propriedade do determinante da matriz de coeficientes ser ou não nulo substitui as afirmações sobre μ e λ_m. Veja a discussão na Seção 7.3.

Exemplo 1

Resolva o problema de valores de contorno

$$y'' + 2y = -x, \quad (15)$$

$$y(0) = 0, \qquad y(1) + y'(1) = 0. \quad (16)$$

Esse problema particular pode ser resolvido diretamente de maneira elementar e tem solução

$$y = \frac{\operatorname{sen}\sqrt{2}\,x}{\operatorname{sen}\sqrt{2} + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}} - \frac{x}{2}. \quad (17)$$

O método de solução descrito a seguir ilustra o uso de expansão em autofunções, um método que pode ser usado em muitos problemas que não podem ser resolvidos por procedimentos elemen-

[6]O matemático sueco Erik Ivar Fredholm (1866-1927), professor na Universidade de Estocolmo, estabeleceu a teoria moderna de equações integrais em um artigo fundamental publicado em 1903. O trabalho de Fredholm enfatizou as semelhanças entre equações integrais e sistemas de equações algébricas. Existem, também, muitas relações entre equações diferenciais e equações integrais; por exemplo, veja a Seção 2.8 e o Problema 22 da Seção 6.6.

tares. Para identificar a Eq. (15) com a Eq. (1), vamos escrever a Eq. (15) na forma

$$-y'' = 2y + x. \tag{18}$$

Procuramos a solução do problema dado como uma série em termos das autofunções normalizadas ϕ_n do problema homogêneo correspondente

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0. \tag{19}$$

Essas autofunções foram encontradas no Exemplo 2 da Seção 11.2 e são

$$\phi_n(x) = k_n \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, x, \tag{20}$$

onde

$$k_n = \left(\frac{2}{1 + \cos^2 \sqrt{\lambda_n}} \right)^{1/2} \tag{21}$$

e λ_n satisfaz

$$\operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n} + \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} = 0. \tag{22}$$

Lembre que vimos, no Exemplo 1 da Seção 11.1, que

$$\lambda_1 \cong 4{,}116, \qquad \lambda_2 \cong 24{,}14,$$
$$\lambda_3 \cong 63{,}66, \qquad \lambda_n \cong (2n-1)^2\pi^2/4 \quad \text{para } n = 4, 5, \ldots.$$

Supondo que y é dado pela Eq. (4),

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x),$$

segue que os coeficientes b_n são dados pela Eq. (12),

$$b_n = \frac{c_n}{\lambda_n - 2},$$

onde os c_n são os coeficientes da expansão do termo não-homogêneo $f(x) = x$ na Eq. (18) em uma série contendo as autofunções ϕ_n. Esses coeficientes foram encontrados no Exemplo 3 da Seção 11.2 e são

$$c_n = \frac{2\sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n (1 + \cos^2 \sqrt{\lambda_n})^{1/2}}. \tag{23}$$

Juntando tudo, obtemos, finalmente, a solução

$$y = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n(\lambda_n - 2)(1 + \cos^2 \sqrt{\lambda_n})} \operatorname{sen} \sqrt{\lambda_n}\, x. \tag{24}$$

Embora as Eqs. (17) e (24) pareçam muito diferentes, elas são, de fato, duas expressões diferentes para a mesma função. Isso segue da unicidade no Teorema 11.3.1 ou 11.3.2, já que $\lambda = 2$ não é autovalor do problema homogêneo (19). Por outro lado, pode-se mostrar a equivalência das Eqs. (17) e (24) expandindo-se a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (17) em termos das autofunções $\phi_n(x)$. Para esse problema, é claro que a fórmula (17) é mais conveniente do que a série (24). No entanto, enfatizamos, mais uma vez, que, em outros problemas, podemos não ser capazes de obter a solução exceto por métodos envolvendo séries (ou métodos numéricos).

Problemas de Condução de Calor Não-Homogêneos. Para mostrar como a expansão em autofunções pode ser usada para se resolver problemas para equações diferenciais parciais, vamos considerar a equação do calor generalizada

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u + F(x, t) \tag{25}$$

com as condições de contorno

$$u_x(0, t) - h_1 u(0, t) = 0, \; u_x(1, t) + h_2 u(1, t) = 0 \tag{26}$$

e a condição inicial

$$u(x, 0) = f(x). \tag{27}$$

Esse problema foi discutido, anteriormente, no Apêndice A do Cap. 10 e na Seção 11.1. Nessa última seção, fizemos $u(x, t) = X(x)T(t)$ na equação homogênea obtida supondo que $F(x, t) = 0$ e mostramos que $X(x)$ tem que ser solução do problema de valores de contorno

$$-[p(x)X']' + q(x)X = \lambda r(x)X, \tag{28}$$
$$X'(0) - h_1 X(0) = 0, \qquad X'(1) + h_2 X(1) = 0. \tag{29}$$

Se supusermos que p, q e r satisfazem as condições adequadas de continuidade e que $p(x)$ e $r(x)$ são sempre positivas, o problema (28), (29) é um problema de Sturm-Liouville, como discutido na Seção 11.2. Obtemos, então, uma seqüência de autovalores $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ e autofunções correspondentes normalizadas $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$.

Vamos resolver o problema de valores de contorno não-homogêneo dado (25), (26), (27) supondo que $u(x, t)$ pode ser expresso como uma série de autofunções

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \phi_n(x), \tag{30}$$

e mostrando, depois, como determinar os coeficientes $b_n(t)$. O procedimento é, basicamente, o mesmo utilizado no problema (1), (2) considerado antes, embora seja mais complicado sob certos aspectos. Por exemplo, os coeficientes b_n agora dependem de t, já que, caso contrário, u só dependeria de x. Note que as condições de contorno (26) são automaticamente satisfeitas por uma expressão da forma (30), pois cada $\phi_n(x)$ satisfaz as condições de contorno (29).

Vamos substituir u na Eq. (25) pela expressão na Eq. (30). Dos dois primeiros termos na expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (25), obtemos, formalmente,

$$\begin{aligned}
[p(x)u_x]_x - q(x)u &= \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x) \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n'(x) \right] \\
&\quad - q(x) \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\{[p(x)\phi_n'(x)]' \\
&\quad - q(x)\phi_n(x)\}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Como $[p(x)\,\phi_n'(x)]' - q(x)\phi_n(x) = -\lambda_n r(x)\phi_n(x)$, obtemos, finalmente,

$$[p(x)u_x]_x - q(x)u = -r(x)\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\lambda_n\phi_n(x). \quad (32)$$

Vamos considerar, agora, a expressão à esquerda do sinal de igualdade na Eq. (25). Temos

$$r(x)u_t = r(x)\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x)$$
$$= r(x)\sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t)\phi_n(x). \quad (33)$$

Temos, também, que expressar o termo não-homogêneo na Eq. (25) com uma série de autofunções. Mais uma vez, é conveniente considerar a razão $F(x, t)/r(x)$ e escrever

$$\frac{F(x,t)}{r(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t)\phi_n(x), \quad (34)$$

onde os coeficientes são dados por

$$\gamma_n(t) = \int_0^1 r(x)\frac{F(x,t)}{r(x)}\phi_n(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 F(x,t)\phi_n(x)\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots. \quad (35)$$

Como $F(x, t)$ é dado, podemos considerar as funções $\gamma_n(t)$ como sendo conhecidas.

Juntando todos esses resultados, substituímos as Eqs. (32), (33) e (34) na Eq. (25) e vemos que

$$r(x)\sum_{n=1}^{\infty} b_n'(t)\phi_n(x) = -r(x)\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\lambda_n\phi_n(x)$$
$$+ r(x)\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t)\phi_n(x). \quad (36)$$

Para simplificar a Eq. (36), cancelamos o fator $r(x)$ de todos os termos e escrevemos tudo dentro de um somatório:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n'(t) + \lambda_n b_n(t) - \gamma_n(t)\right]\phi_n(x) = 0. \quad (37)$$

Mais uma vez, se a Eq. (37) é válida para todo x em $0 < x < 1$, é preciso que a quantidade dentro dos colchetes seja nula para todo n (veja, novamente, o Problema 14). Logo, $b_n(t)$ é uma solução da equação diferencial ordinária linear de primeira ordem

$$b_n'(t) + \lambda_n b_n(t) = \gamma_n(t), \qquad n = 1, 2, \ldots, \quad (38)$$

onde $\gamma_n(t)$ é dado pela Eq. (35). Para determinar completamente $b_n(t)$, precisamos de uma condição inicial

$$b_n(0) = B_n, \qquad n = 1, 2, \ldots \quad (39)$$

para a Eq. (38). Obtemos isso da condição inicial (27). Fazendo $t = 0$ na Eq. (30) e usando a Eq. (27), temos

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0)\phi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\phi_n(x) = f(x). \quad (40)$$

Logo, os valores iniciais B_n são os coeficientes da expansão em autofunções de $f(x)$. Portanto,

$$B_n = \int_0^1 r(x)f(x)\phi_n(x)\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots. \quad (41)$$

Note que tudo que está à direita do sinal de igualdade na Eq. (41) é conhecido, de modo que podemos considerar B_n como conhecido.

O problema de valor inicial (38), (39) pode ser resolvido pelos métodos da Seção 2.1. O fator integrante é $\mu(t) = \exp(\lambda_n t)$ e segue que

$$b_n(t) = B_n e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)}\gamma_n(s)\,ds, \quad n = 1, 2, \ldots. \quad (42)$$

Os detalhes desse cálculo são deixados para o leitor. Note que o primeiro termo à direita do sinal de igualdade na Eq. (42) depende da função f através do coeficiente B_n, enquanto o segundo depende do termo não-homogêneo F através dos coeficientes $\gamma_n(s)$.

Assim, uma solução explícita do problema de valores de contorno (25), (26), (27) é dada pela Eq. (30),

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x),$$

onde os coeficientes $b_n(t)$ são determinados pela Eq. (42). As quantidades B_n e $\gamma_n(s)$ na Eq. (42) são dadas, por sua vez, pelas Eqs. (41) e (35), respectivamente.

Resumindo, para usar esse método para resolver um problema de valores de contorno como o dado pelas Eqs. (25), (26), (27), precisamos:

1. Encontrar os autovalores λ_n e as autofunções normalizadas ϕ_n do problema homogêneo (28), (29).
2. Calcular os coeficientes B_n e $\gamma_n(s)$ das Eqs. (41) e (35), respectivamente.
3. Calcular a integral na Eq. (42) para determinar $b_n(t)$.
4. Somar a série infinita (30).

Como alguns ou todos esses passos podem ser difíceis, todo o processo pode ser bastante complicado. Uma característica que facilita é que, com freqüência, a série (30) converge rapidamente, caso em que basta alguns poucos termos para se obter uma aproximação adequada da solução.

Exemplo 2

Encontre a solução do problema de condução de calor

$$u_t = u_{xx} + xe^{-t}, \quad (43)$$

$$u(0, t) = 0, \qquad u_x(1, t) + u(1, t) = 0, \quad (44)$$

$$u(x, 0) = 0. \quad (45)$$

Novamente, vamos usar as autofunções normalizadas ϕ_n do problema (19) e supor que u é dada por

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x).$$

Os coeficientes b_n são determinados da equação diferencial

$$b_n' + \lambda_n b_n = \gamma_n(t), \qquad (46)$$

onde λ_n é o n-ésimo autovalor do problema (19) e $\gamma_n(t)$ é o n-ésimo coeficiente na expansão do termo não-homogêneo xe^{-t} em termos das autofunções ϕ_n. Temos, então,

$$\gamma_n(t) = \int_0^1 xe^{-t}\phi_n(x)\,dx = e^{-t}\int_0^1 x\phi_n(x)\,dx$$
$$= c_n e^{-t}, \qquad (47)$$

onde $C_n \int_0^1 x\phi_n(x)\,dx$. é dado pela Eq. (23). A condição inicial para a Eq. (46) é

$$b_n(0) = 0 \qquad (48)$$

já que a distribuição inicial de temperatura (45) é zero em toda a parte. A solução do problema de valor inicial (46), (48) é

$$b_n(t) = e^{-\lambda_n t}\int_0^t e^{\lambda_n s} c_n e^{-s}\,ds = c_n e^{-\lambda_n t}\,\frac{e^{(\lambda_n - 1)t} - 1}{\lambda_n - 1}$$
$$= \frac{c_n}{\lambda_n - 1}(e^{-t} - e^{-\lambda_n t}). \qquad (49)$$

Logo, a solução do problema de condução de calor (43), (44), (45) é dada por

$$u(x,t) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\,(e^{-t} - e^{-\lambda_n t})\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\,x}{\lambda_n(\lambda_n - 1)(1 + \cos^2\sqrt{\lambda_n})}. \qquad (50)$$

A solução dada pela Eq. (50) é exata, mas complicada. Para julgar se pode-se obter uma aproximação satisfatória da solução usando-se, apenas, uns poucos termos dessa série, precisamos estimar sua velocidade de convergência. Primeiro, dividimos a série na Eq. (50) em duas partes:

$$u(x,t) = 4e^{-t}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\,x}{\lambda_n(\lambda_n - 1)(1 + \cos^2\sqrt{\lambda_n})}$$
$$- 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_n t}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\,x}{\lambda_n(\lambda_n - 1)(1 + \cos^2\sqrt{\lambda_n})}. \qquad (51)$$

Lembre-se, do Exemplo 1 na Seção 11.1, que os autovalores λ_n são, aproximadamente, proporcionais a n^2. Na primeira série da Eq. (51) os fatores trigonométricos são todos limitados quando $n \to \infty$; portanto, essa série converge de maneira semelhante às séries $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}$ ou $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$. Logo, são necessários, no máximo, dois ou três termos para se obter uma excelente aproximação para essa parte da solução. A segunda série contém o fator adicional $e^{-\lambda_n t}$, de modo que converge mais rápido ainda para $t > 0$; todos os termos depois do primeiro são, quase que certamente, desprezíveis.

Outras Generalizações. Expansões em autofunções podem ser usadas para se resolver uma variedade muito maior de problemas do que a discussão precedente e os exemplos podem sugerir. Por exemplo, condições de contorno não-homogêneas independentes do tempo podem ser tratadas de maneira semelhante ao que vimos na Seção 10.6. Para reduzir o problema a um com condições de contorno homogêneas, subtraia de u uma função v escolhida de modo a satisfazer as condições de contorno dadas. Então a diferença $w = u - v$ satisfaz um problema com condições de contorno homogêneas, mas com um termo não-homogêneo e uma condição inicial modificados. Esse problema pode ser resolvido pelo procedimento descrito nesta seção.

Uma dificuldade em potencial no uso de expansão em autofunções é que é preciso encontrar as autofunções normalizadas do problema homogêneo correspondente. Para uma equação diferencial com coeficientes variáveis isso pode ser difícil, senão impossível. Em tais casos, é possível, algumas vezes, usar outras funções, como autofunções de um problema mais simples que satisfaça as mesmas condições de contorno. Por exemplo, se as condições de contorno forem

$$u(0,t) = 0, \qquad u(1,t) = 0, \qquad (52)$$

pode ser conveniente substituir as funções $\phi_n(x)$ na Eq. (30) por $\operatorname{sen} n\pi x$. Essas funções satisfazem, pelo menos, as condições de contorno, embora, em geral, não sejam soluções da equação diferencial homogênea correspondente. A seguir, expandimos o termo não-homogêneo $F(x, t)$ em uma série da forma (34), com $\phi_n(x)$ substituído, novamente, por $\operatorname{sen} n\pi x$, e depois substituímos tanto u quanto F na Eq. (25). Juntando os coeficientes de $\operatorname{sen} n\pi x$ para cada n, temos um conjunto infinito de equações diferenciais lineares de primeira ordem para determinar $b_1(t), b_2(t), \ldots$. A diferença essencial entre esse caso e o considerado anteriormente é que, agora, as equações para as funções $b_n(t)$ estão *acopladas*. Logo, elas não podem ser resolvidas uma a uma como antes, mas têm que ser tratadas simultaneamente. Na prática, o sistema infinito é substituído por um sistema finito que o aproxima, do qual são calculadas aproximações com um número finito de coeficientes.

Problema de valores de contorno para equações de ordem mais alta também podem ser resolvidos, muitas vezes, por expansão em autofunções. Em alguns casos, o procedimento segue, quase que exatamente, o procedimento para equações de segunda ordem. No entanto, podem aparecer, também, muitas complicações.

Finalmente, enfatizamos que a discussão nesta seção foi puramente formal. Argumentos separados, algumas vezes bastante elaborados, são necessários para se estabelecer a convergência da expansão em autofunções, ou justificar alguns dos passos usados, como a diferenciação termo a termo da série de autofunções.

Existem, também, outros métodos bem diferentes para se resolver problemas de valores de contorno não-homogêneos. Um desses leva a uma solução expressa como uma integral definida, em vez de uma série infinita. Essa abordagem envolve certas funções conhecidas como funções de Green e, para equações diferenciais ordinárias, é o assunto dos problemas de 28 a 36.

Problemas

Nos problemas de 1 a 5, resolva o problema dado usando expansão em autofunções.

1. $y'' + 2y = -x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
2. $y'' + 2y = -x, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0;$
   veja a Seção 11.2, Problema 7.
3. $y'' + 2y = -x, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0;$
   veja a Seção 11.2, Problema 3.
4. $y'' + 2y = -x, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 0;$
   veja a Seção 11.2, Problema 11.
5. $y'' + 2y = -1 + |1 - 2x|, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$

Nos problemas de 6 a 9, determine uma expansão formal em série de autofunções para a solução do problema dado. Suponha que f satisfaz as condições do Teorema 11.3.1. Diga para quais valores de μ a solução existe.

6. $y'' + \mu y = -f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
7. $y'' + \mu y = -f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$
8. $y'' + \mu y = -f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
9. $y'' + \mu y = -f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 0$

Nos problemas de 10 a 13, determine se existe algum valor da constante a para o qual o problema tem solução. Encontre a solução para cada um desses valores.

10. $y'' + \pi^2 y = a + x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
11. $y'' + 4\pi^2 y = a + x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
12. $y'' + \pi^2 y = a, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
13. $y'' + \pi^2 y = a - \cos \pi x, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$
14. Sejam $\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$ as autofunções normalizadas da equação diferencial (3) sujeita às condições de contorno (2). Se $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n(x)$ converge a $f(x)$, onde $f(x) = 0$ para todo x em $0 \leq x \leq 1$, mostre que $c_n = 0$ para todo n.
    Sugestão: Multiplique por $r(x)\phi_m(x)$, integre e use a propriedade de ortogonalidade das autofunções.
15. Seja L um operador diferencial de segunda ordem. Mostre que a solução $y = \phi(x)$ do problema
    $$L[y] = f(x),$$
    $$\alpha_1 y(0) + \alpha_2 y'(0) = a, \qquad \beta_1 y(1) + \beta_2 y'(1) = b$$
    pode ser escrita como $y = u + v$, onde $u = \phi_1(x)$ e $v = \phi_2(x)$ são soluções dos problemas
    $$L[u] = 0,$$
    $$\alpha_1 u(0) + \alpha_2 u'(0) = a, \qquad \beta_1 u(1) + \beta_2 u'(1) = b$$
    e
    $$L[v] = f(x),$$
    $$\alpha_1 v(0) + \alpha_2 v'(0) = 0, \qquad \beta_1 v(1) + \beta_2 v'(1) = 0,$$
    respectivamente.
16. Mostre que o problema
    $$y'' + \pi^2 y = \pi^2 x, \qquad y(0) = 1, \quad y(1) = 0$$
    tem solução
    $$y = c_1 \operatorname{sen} \pi x + \cos \pi x + x.$$
    Mostre, também, que essa solução não pode ser obtida separando-se o problema como sugerido no Problema 15, já que, nesse caso, nenhum dos dois subproblemas pode ser resolvido.
17. Considere o problema
    $$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad y(0) = a, \quad y(1) = b.$$
    Suponha que $y = u + v$, onde v é qualquer função duas vezes diferenciável satisfazendo as condições de contorno (mas não necessariamente a equação diferencial). Mostre que u é uma solução do problema
    $$u'' + p(x)u' + q(x)u = g(x), \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 0,$$
    onde $g(x) = -[v'' + p(x)v' + q(x)v]$, logo é conhecida uma vez escolhida v. Dessa forma, a não-homogeneidade pode ser transferida das condições de contorno para a equação diferencial. Encontre uma função v para esse problema.
18. Usando o método do Problema 17, transforme o problema
    $$y'' + 2y = 2 - 4x, \qquad y(0) = 1, \quad y(1) + y'(1) = -2$$
    em um novo problema no qual as condições de contorno são homogêneas. Resolva esse último problema olhando o Exemplo 1 do texto.

Nos problemas de 19 a 22, use expansão em autofunções para encontrar a solução do problema de valores de contorno dado.

19. $u_t = u_{xx} - x, \quad u(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0,$
    $u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x/2);$
    veja o Problema 2.
20. $u_t = u_{xx} + e^{-t}, \quad u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) + u(1,t) = 0,$
    $u(x,0) = 1 - x;$
    veja os Problemas 10 e 12 da Seção 11.2.
21. $u_t = u_{xx} + 1 - |1 - 2x|, \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0,$
    $u(x,0) = 0;$
    veja o Problema 5.
22. $u_t = u_{xx} + e^{-t}(1 - x), \quad u(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0,$
    $u(x,0) = 0;$
    veja os Problemas 6 e 7 da Seção 11.2.
23. Considere o problema de valores de contorno
    $$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u + F(x),$$
    $$u(0,t) = T_1, \qquad u(1,t) = T_2, \qquad u(x,0) = f(x).$$
    (a) Seja $v(x)$ uma solução do problema
    $$[p(x)v']' - q(x)v = -F(x), \qquad v(0) = T_1, \quad v(1) = T_2$$
    Se $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$, encontre o problema de valores de contorno satisfeito por w. Note que esse problema pode ser resolvido pelo método desta seção.
    (b) Generalize o procedimento do item (a) para o caso em que u satisfaz as condições de contorno
    $$u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = T_1, \qquad u_x(1,t) + h_2 u(1,t) = T_2.$$

Nos Problemas 24 e 25, use o método indicado no Problema 23 para resolver o problema de valores de contorno dado.

24. $u_t = u_{xx} - 2,$
    $u(0,t) = 1, \quad u(1,t) = 0,$
    $u(x,0) = x^2 - 2x + 2$
25. $u_t = u_{xx} - \pi^2 \cos \pi x,$
    $u_x(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 1,$
    $u(x,0) = \cos(3\pi x/2) - \cos \pi x$
26. O método de expansão em autofunções é usado, muitas vezes, para problemas não-homogêneos relacionados com a equação de onda ou sua generalização. Considere o problema
    $$r(x)u_{tt} = [p(x)u_x]_x - q(x)u + F(x,t), \qquad \text{(i)}$$
    $$u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = 0, \qquad u_x(1,t) + h_2 u(1,t) = 0, \qquad \text{(ii)}$$
    $$u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x). \qquad \text{(iii)}$$

Esse problema pode aparecer em conexão com generalizações da equação do telégrafo (Problema 16 na Seção 11.1) ou vibrações longitudinais de uma barra elástica (Problema 25 na Seção 11.1).
(a) Faça $u(x, t) = X(x)T(t)$ na equação homogênea correspondente à Eq. (i) e mostre que $X(x)$ satisfaz as Eqs. (28) e (29) do texto. Denote por λ_n e $\phi_n(x)$ os autovalores e as autofunções normalizadas desse problema.

(b) Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\phi_n(x)$ e mostre que $b_n(t)$ tem que satisfazer o problema de valor inicial

$$b_n''(t) + \lambda_n b_n(t) = \gamma_n(t), \qquad b_n(0) = \alpha_n, \quad b_n'(0) = \beta_n,$$

onde α_n, β_n e γ_n são os coeficientes das expansões de $f(x)$, $g(x)$ e $F(x, t)/r(x)$, respectivamente, em termos das autofunções $\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x), \ldots$.

27. Neste problema, vamos explorar um pouco mais a analogia entre problemas de Sturm-Liouville de valores de contorno e matrizes auto-adjuntas. Seja **A** uma matriz auto-adjunta $n \times n$ com autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ e autovetores ortogonais correspondentes $\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(n)}$.
Considere o sistema não-homogêneo de equações

$$\mathbf{Ax} - \mu\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{i}$$

onde μ é um número real dado e **b** é um vetor dado. Vamos mostrar um modo de resolver a Eq. (i) que é análogo ao método apresentado no texto para se resolver as Eqs. (1) e (2).

(a) Mostre que $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} b_i\boldsymbol{\xi}^{(i)}$, onde $b_i = (\mathbf{b}, \boldsymbol{\xi}^{(i)})$.

(b) Suponha que $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{\xi}^{(i)}$ e mostre que, para que a Eq. (i) seja satisfeita, é necessário que $a_i = b_i/(\lambda_i - \mu)$. Logo,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\mathbf{b}, \boldsymbol{\xi}^{(i)})}{\lambda_i - \mu}\boldsymbol{\xi}^{(i)}, \tag{ii}$$

desde que μ não seja um dos autovalores de **A**, $\mu \neq \lambda_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Compare esse resultado com a Eq. (13).

Funções de Green.[7] Considere o sistema não-homogêneo de equações algébricas

$$\mathbf{Ax} - \mu\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{i}$$

onde **A** é uma matriz auto-adjunta $n \times n$, μ é um número real dado e **b** é um vetor dado. Em vez de usar uma expansão em autovetores como no Problema 27, podemos resolver a Eq. (i) calculando a matriz inversa $(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})^{-1}$, que existe se μ não é autovalor de **A**. Então,

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})^{-1}\mathbf{b}. \tag{ii}$$

Os problemas de 28 a 36 indicam um modo de se resolver problemas de valores de contorno não-homogêneos análogo à utilização da matriz inversa para um sistema de equações algébricas lineares. A função de Green tem um papel semelhante à inversa da matriz de coeficientes. Esse método leva a soluções expressas em forma de integral definida, em vez de série infinita. Exceto no Problema 35, vamos supor, por simplicidade, que $\mu = 0$.

28. (a) Mostre, pelo método de variação dos parâmetros, que a solução geral da equação diferencial

$$-y'' = f(x)$$

pode ser escrita na forma

$$y = \phi(x) = c_1 + c_2 x - \int_0^x (x - s)f(s)\,ds,$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.
(b) Suponha que $y = \phi(x)$ satisfaz, também, as condições de contorno $y(0) = 0$, $y(1) = 0$. Mostre que, nesse caso,

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = \int_0^1 (1 - s)f(s)\,ds.$$

(c) Mostre que, sob as condições dos itens (a) e (b), $\phi(x)$ pode ser escrita na forma

$$\phi(x) = \int_0^x s(1 - x)f(s)\,ds + \int_x^1 x(1 - s)f(s)\,ds.$$

(d) Definindo

$$G(x, s) = \begin{cases} s(1 - x), & 0 \le s \le x, \\ x(1 - s), & x \le s \le 1, \end{cases}$$

mostre que a solução fica da forma

$$\phi(x) = \int_0^1 G(x, s)f(s)\,ds.$$

A função $G(x, s)$ que aparece no integrando é uma função de Green. A utilidade da função de Green está no fato de que ela é independente do termo não-homogêneo na equação diferencial. Assim, uma vez determinada a função de Green, a solução do problema de valores de contorno é determinada por uma única integração para qualquer termo não-homogêneo $f(x)$. Além disso, note que não há necessidade de se determinar constantes arbitrárias, já que $\phi(x)$ como dada pela fórmula integral envolvendo a função de Green satisfaz, automaticamente, as condições de contorno.

29. Por um procedimento semelhante ao do Problema 28, mostre que a solução do problema de valores de contorno

$$-(y'' + y) = f(x), \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

é

$$y = \phi(x) = \int_0^1 G(x, s)f(s)\,ds,$$

onde

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} s \,\operatorname{sen}(1 - x)}{\operatorname{sen} 1}, & 0 \le s \le x, \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sen} x \,\operatorname{sen}(1 - s)}{\operatorname{sen} 1}, & x \le s \le 1. \end{cases}$$

30. É possível mostrar que o problema de Sturm-Liouville

$$L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y = f(x), \tag{i}$$

$$a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0, \qquad b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0 \tag{ii}$$

tem uma solução em termos da função de Green

$$y = \phi(x) = \int_0^1 G(x, s)f(s)\,ds, \tag{iii}$$

[7]As funções de Green levam esse nome em homenagem a George Green (1793-1841) da Inglaterra. Ele foi, praticamente, um autodidata em matemática e fez contribuições significativas em eletricidade e magnetismo, mecânica dos fluidos e equações diferenciais parciais. Seu trabalho mais importante foi um ensaio sobre eletricidade e magnetismo, publicado privadamente em 1828. Nesse artigo, Green foi o primeiro a reconhecer a importância das funções potenciais. Introduziu as funções conhecidas hoje como funções de Green para resolver problemas de valores de contorno e desenvolveu teoremas sobre transformações integrais, dos quais o teorema de Green no plano é um caso particular. No entanto, esses resultados não se tornaram conhecidos em larga escala até que o ensaio de Green fosse republicado na década de 1850 através dos esforços de William Thomson (Lord Kelvin).

desde que $\lambda = 0$ não seja um autovalor de $L[y] = \lambda y$ sujeita às condições de contorno (ii). Além disso, $G(x, s)$ é dada por

$$G(x,s) = \begin{cases} -y_1(s)y_2(x)/p(x)W(y_1,y_2)(x), & 0 \le s \le x, \\ -y_1(x)y_2(s)/p(x)W(y_1,y_2)(x), & x \le s \le 1, \end{cases} \quad \text{(iv)}$$

onde y_1 é uma solução de $L[y] = 0$ satisfazendo a condição de contorno em $x = 0$, y_2 é uma solução de $L[y] = 0$ satisfazendo a condição de contorno em $x = 1$ e $W(y_1, y_2)$ é o wronskiano de y_1 e y_2.
(a) Verifique que a função de Green obtida no Problema 28 é dada pela fórmula (iv).
(b) Verifique que a função de Green obtida no Problema 29 é dada pela fórmula (iv).
(c) Prove que $p(x)W(y_1, y_2)(x)$ é uma constante, mostrando que sua derivada é nula.
(d) Usando a Eq. (iv) e o resultado do item (c), mostre que $G(x, s) = G(s, x)$.
(e) Verifique que $y = \phi(x)$ na Eq. (iii), com $G(x, s)$ dada pela Eq. (iv), satisfaz a equação diferencial (i) e as condições de contorno (ii).

Nos problemas de 31 a 34, resolva o problema de valores de contorno dado determinando a função de Green apropriada e expressando a solução como uma integral definida. Use as equações de (i) a (iv) do Problema 30.

31. $-y'' = f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$
32. $-y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0$
33. $-(y'' + y) = f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y(1) = 0$
34. $-y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$
35. Considere o problema de valores de contorno

$$L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y = \mu r(x)y + f(x), \quad \text{(i)}$$

$$a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0, \qquad b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0. \quad \text{(ii)}$$

De acordo com o texto, a solução $y = \phi(x)$ é dada pela Eq. (13), onde c_n é definido pela Eq. (9), desde que μ não seja um autovalor do problema homogêneo correspondente. Nesse caso, pode-se mostrar, também, que a solução é dada por uma integral envolvendo a função de Green da forma

$$y = \phi(x) = \int_0^1 G(x, s, \mu) f(s)\, ds. \quad \text{(iii)}$$

Note que, nesse problema, a função de Green depende, também, do parâmetro μ.
(a) Mostre que, para que essas duas expressões para $\phi(x)$ sejam equivalentes, é preciso que

$$G(x, s, \mu) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\phi_i(x)\phi_i(s)}{\lambda_i - \mu}, \quad \text{(iv)}$$

onde λ_i e ϕ_i são os autovalores e autofunções, respectivamente, das Eqs. (3), (2) do texto. Novamente, vemos, da Eq. (iv), que μ não pode ser igual a nenhum autovalor λ_i.
(b) Deduza a Eq. (iv), diretamente, supondo que $G(x, s, \mu)$ tem uma expansão em autofunções da forma

$$G(x, s, \mu) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(x, \mu)\phi_i(s); \quad \text{(v)}$$

determine $a_i(x, \mu)$ multiplicando a Eq. (v) por $r(s)\phi_j(s)$ e integrando em relação a s de $s = 0$ a $s = 1$.
Sugestão: Mostre, primeiro, que λ_i e ϕ_i satisfazem a equação

$$\phi_i(x) = (\lambda_i - \mu) \int_0^1 G(x, s, \mu) r(s)\phi_i(s)\, ds. \quad \text{(vi)}$$

36. Considere o problema de valores de contorno

$$-d^2y/ds^2 = \delta(s - x), \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

onde s é a variável independente, $s = x$ é um ponto definido no intervalo $0 < s < 1$ e δ é a função δ de Dirac (veja a Seção 6.5). Mostre que a solução desse problema é a função de Green $G(x, s)$ obtida no Problema 28.

Ao resolver o problema dado, note que $\delta(s - x) = 0$ nos intervalos $0 \le s < x$ e $x < s \le 1$. Note, ainda, que $-dy/ds$ dá um salto de tamanho 1 quando s passa pelo valor x.

Esse problema ilustra uma propriedade geral, a saber, que a função de Green $G(x, s)$ pode ser identificada como a resposta no ponto s de um impulso unitário no ponto x. Um termo mais geral f em $0 \le x \le 1$ pode ser visto como uma distribuição contínua de impulsos de tamanho $f(x)$ no ponto x. A solução do problema de valores de contorno não-homogêneo como uma integral envolvendo a função de Green pode ser interpretada, então, como a superposição do conjunto de impulsos representados pelo termo não-homogêneo $f(x)$.

11.4 Problemas de Sturm-Liouville Singulares

Nas seções anteriores neste capítulo, consideramos problemas de Sturm-Liouville de valores de contorno: a equação diferencial

$$L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y = \lambda r(x)y, \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

junto com condições de contorno da forma

$$\alpha_1 y(0) + \alpha_2 y'(0) = 0, \quad (2)$$

$$\beta_1 y(1) + \beta_2 y'(1) = 0. \quad (3)$$

Até agora, sempre supusemos que o problema era regular, isto é, que p era diferenciável, q e r contínuas, e $p(x) > 0$ e $r(x) > 0$ em todos os pontos do intervalo *fechado*. No entanto, existem, também, equações de interesse físico nas quais algumas dessas condições não são satisfeitas.

Por exemplo, suponha que queremos estudar a equação de Bessel de ordem ν no intervalo $0 < x < 1$. Essa equação é escrita, algumas vezes, na forma[8]

$$-(xy')' + \frac{\nu^2}{x}y = \lambda x y, \quad (4)$$

de modo que $p(x) = x$, $q(x) = \nu^2/x$ e $r(x) = x$. Logo, $p(0) = 0$, $r(0) = 0$ e $q(x)$ é ilimitada e, portanto, descontínua, quando $x \to 0$. No entanto, as condições impostas nos problemas de Sturm-Liouville regulares são satisfeitas nos outros pontos do intervalo.

Analogamente, para a equação de Legendre, temos

$$-[(1 - x^2)y']' = \lambda y, \qquad -1 < x < 1, \quad (5)$$

onde $\lambda = \alpha(\alpha + 1)$, $p(x) = 1 - x^2$, $q(x) = 0$ e $r(x) = 1$. Aqui, as condições sobre p, q e r são satisfeitas no intervalo $0 \le x \le 1$, exceto em $x = 1$, onde p se anula.

Usamos o termo problema de Sturm-Liouville singular para nos referir a uma determinada classe de problemas de valores de contorno para a equação diferencial (1) nos quais as funções p, q e r satisfazem as condições enunciadas anteriormente no intervalo aberto $0 < x < 1$, mas pelo menos uma dessas funções deixa de satisfazer uma ou mais dessas condições em um, ou ambos, dos extremos do intervalo. Vamos descrever em maiores detalhes, mais adiante nesta seção, condições de contorno sepa-

[8]A substituição $t = \sqrt{\lambda}\, x$ reduz a Eq. (4) à forma padrão $t^2y'' + ty' + (t^2 - \nu^2)y = 0$.

radas adequadas. Problemas singulares podem ocorrer, também, se o intervalo é ilimitado, por exemplo, $0 \leq x < \infty$. Não consideraremos, neste livro, esse último tipo de problema singular.

Como exemplo de um problema singular em um intervalo finito, considere a equação

$$xy'' + y' + \lambda xy = 0, \tag{6}$$

ou

$$-(xy')' = \lambda xy, \tag{7}$$

no intervalo $0 < x < 1$, e suponha que $\lambda > 0$. Essa equação aparece no estudo das vibrações livres de uma membrana circular elástica e será mais discutida na Seção 11.5. Se definirmos uma nova variável independente t por $t = \sqrt{\lambda}\, x$, então

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\lambda}\,\frac{dy}{dt}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \lambda\,\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Logo, a Eq. (6) fica

$$\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\,\lambda\,\frac{d^2y}{dt^2} + \sqrt{\lambda}\,\frac{dy}{dt} + \lambda\frac{t}{\sqrt{\lambda}}y = 0,$$

ou, cancelando o fator comum $\sqrt{\lambda}$,

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + ty = 0. \tag{8}$$

A Eq. (8) é a equação de Bessel de ordem zero (veja a Seção 5.8). A solução geral da Eq. (8) para $t > 0$ é

$$y = c_1 J_0(t) + c_2 Y_0(t);$$

portanto, a solução geral da Eq. (7) para $x > 0$ é

$$y = c_1 J_0(\sqrt{\lambda}\,x) + c_2 Y_0(\sqrt{\lambda}\,x), \tag{9}$$

onde J_0 e Y_0 denotam as funções de Bessel de primeira e segunda espécie, respectivamente, de ordem zero. Das Eqs. (7) e (13) da Seção 5.8, temos

$$J_0(\sqrt{\lambda}\,x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \lambda^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}, \quad x > 0, \tag{10}$$

$$Y_0(\sqrt{\lambda}\,x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{\sqrt{\lambda}\,x}{2}\right) J_0(\sqrt{\lambda}\,x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m \lambda^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right], \quad x > 0, \tag{11}$$

onde $H_m = 1 + (1/2) + \ldots + (1/m)$ e $\gamma = \lim_{m\to\infty}(H_m - \ln m)$. Os gráficos de $y = J_0(x)$ e $y = Y_0(x)$ são dados na Fig. 5.8.2.

Suponha que procuramos uma solução da Eq. (7) que satisfaça, também, às condições de contorno

$$y(0) = 0, \tag{12}$$

$$y(1) = 0, \tag{13}$$

que são típicas do que encontramos em outros problemas neste capítulo. Como $J_0(0) = 1$ e $Y_0(x) \to -\infty$ quando $x \to 0$, a condição $y(0) = 0$ só pode ser satisfeita escolhendo-se $c_1 = c_2 = 0$ na Eq. (9). Assim, o problema de valores de contorno (7), (12), (13) só tem a solução trivial.

Uma interpretação desse resultado é que a condição de contorno (12) em $x = 0$ é restritiva demais para a equação diferencial (7). Isso ilustra a situação geral, a saber, de que é preciso considerar um tipo de condição de contorno modificada em um ponto singular da fronteira. No problema em consideração, suponha que pedimos apenas que a solução (9) e sua derivada permaneça limitada. Em outras palavras, definimos como condição de contorno em $x = 0$ a condição

$$y,\ y' \text{ limitados quando } x \to 0. \tag{14}$$

Essa condição pode ser satisfeita escolhendo-se $c_2 = 0$ na Eq. (9), de modo a eliminar a solução não-limitada Y_0. A segunda condição de contorno, $y(1) = 0$, fornece, então,

$$J_0(\sqrt{\lambda}) = 0. \tag{15}$$

É possível mostrar[9] que a Eq. (15) tem um conjunto infinito de raízes positivas discretas, que fornecem os autovalores $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ do problema dado. As autofunções correspondentes são

$$\phi_n(x) = J_0\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right), \tag{16}$$

determinadas a menos de uma constante multiplicativa. O problema de valores de contorno (7), (13), (14) é um exemplo de um problema de Sturm-Liouville singular. Esse exemplo ilustra o fato de que, se as condições de contorno são relaxadas de maneira apropriada, então um problema de Sturm-Liouville singular pode ter uma seqüência infinita de autovalores e autofunções, como no caso de um problema de Sturm-Liouville regular.

Devido à sua importância nas aplicações, vale a pena investigar problemas de Sturm-Liouville singulares um pouco mais. Existem dois pontos a se considerar:

1. Precisamente que tipo de condições de contorno podem ser permitidas em um problema de Sturm-Liouville singular?
2. Até que ponto os autovalores e autofunções de um problema de Sturm-Liouville singular têm as mesmas propriedades que um problema regular? Em particular, os autovalores são reais? As autofunções são ortogonais? Uma função dada pode ser expandida em autofunções?

Ambos esses pontos podem ser respondidos através de um estudo da identidade

$$\int_0^1 \{L[u]v - uL[v]\}\, dx = 0, \tag{17}$$

que teve um papel essencial no desenvolvimento da teoria de problemas de Sturm-Liouville regulares. Vamos, então, investigar as condições sob as quais essa relação é válida para problemas singulares, onde a integral (17) pode ser uma integral imprópria. Para ser específico, vamos considerar a equação diferencial (1) e supor que $x = 0$ é um ponto singular de fronteira e $x = 1$, não. A condição de contorno (3) é imposta no ponto regular $x = 1$, mas vamos deixar sem especificar, por enquanto, a condição de contorno em $x = 0$. De fato, nosso objetivo principal é determinar que tipos de condições de contorno podem ser permitidas em um ponto singular da fronteira, de modo que a Eq. (17) continue válida.

---

[9] A função J_0 está bastante tabulada; as raízes da Eq. (15) podem ser encontradas em diversas tabelas, por exemplo, as contidas em Jahnke e Emde, ou em Abramowitz e Stegun. As três primeiras raízes da Eq. (15) são $\sqrt{\lambda} = 2{,}405$; $5{,}520$ e $8{,}654$, respectivamente, com quatro algarismos significativos; $\sqrt{\lambda_n} \cong (n - 1/4)\pi$ para n grande.

Como o problema de valores de contorno sendo investigado é singular em $x = 0$, escolhemos $\epsilon > 0$ e consideramos a integral $\int_\epsilon^1 L[u]v\,dx$, em vez de $\int_0^1 L[u]v\,dx$, como na Seção 11.2. Depois, vamos fazer ϵ tender a zero. Supondo que u e v têm, pelo menos, duas derivadas contínuas em $\epsilon \leq x \leq 1$ e integrando por partes duas vezes, obtemos

$$\int_\epsilon^1 \{L[u]v - uL[v]\}\,dx = -p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]\Big|_\epsilon^1. \tag{18}$$

O termo de fronteira em $x = 1$ é eliminado, novamente, se u e v satisfazem a condição de contorno (3) e, então,

$$\int_\epsilon^1 \{L[u]v - uL[v]\}\,dx = p(\epsilon)[u'(\epsilon)v(\epsilon) - u(\epsilon)v'(\epsilon)]. \tag{19}$$

Tomando o limite quando $\epsilon \to 0$, temos

$$\int_0^1 \{L[u]v - uL[v]\}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0} p(\epsilon)[u'(\epsilon)v(\epsilon) - u(\epsilon)v'(\epsilon)]. \tag{20}$$

Logo, a Eq. (17) é válida se, e somente se, além das hipóteses enunciadas anteriormente, temos

$$\lim_{\epsilon\to 0} p(\epsilon)[u'(\epsilon)v(\epsilon) - u(\epsilon)v'(\epsilon)] = 0 \tag{21}$$

para todo par de funções u e v na classe em consideração. A Eq. (21) é, portanto, o critério que determina que condições de contorno são permitidas em $x = 0$, se esse é um ponto singular de fronteira. Uma condição semelhante é colocada em $x = 1$ se esse for um ponto singular, a saber,

$$\lim_{\epsilon\to 0} p(1-\epsilon)[u'(1-\epsilon)v(1-\epsilon) - u(1-\epsilon)v'(1-\epsilon)] = 0. \tag{22}$$

Resumindo, como na Seção 11.2, um problema de valores de contorno singular para a Eq. (1) é dito **auto-adjunto** se a Eq. (17) é válida, possivelmente como uma integral imprópria, para cada par de funções u e v com as seguintes propriedades: elas são duas vezes continuamente diferenciáveis no intervalo aberto $0 < x < 1$, satisfazem uma condição de contorno da forma (2) em cada ponto regular de fronteira e satisfazem uma condição de contorno suficiente para garantir a Eq. (21), se $x = 0$ é um ponto singular de fronteira, ou a Eq. (22), se $x = 1$ é um ponto singular de fronteira. Se pelo menos um ponto de fronteira é singular, então a equação diferencial (1), junto com as duas condições de contorno do tipo que acabamos de descrever, formam um **problema de Sturm-Liouville singular**.

Por exemplo, para a Eq. (7), temos $p(x) = x$. Se ambas as funções u e v satisfazem a condição de contorno (14) em $x = 0$, é claro que a Eq. (21) é válida. Logo, o problema de valores de contorno singular que consiste na equação diferencial (7), a condição de contorno (14) em $x = 0$ e qualquer condição de contorno da forma (3) em $x = 1$, é auto-adjunto.

A diferença mais gritante entre problemas de Sturm-Liouville regulares e singulares é que, em um problema singular, os autovalores podem não ser discretos. Em outras palavras, o problema pode ter soluções não-triviais para todo valor de λ, ou para todo valor de λ em algum intervalo. Em tais casos, diz-se que o problema tem **espectro contínuo**. Pode acontecer que um problema singular tenha uma mistura de autovalores discretos e espectro contínuo. Finalmente, é possível que exista apenas um conjunto discreto de autovalores, como no caso regular discutido na Seção 11.2. Esse é o caso, por exemplo, do problema que consiste nas Eqs. (7), (13), (14). Pode ser difícil, em geral, determinar o que ocorre, de fato, em um problema dado.

Uma discussão sistemática de problemas de Sturm-Liouville singulares é, de fato, bastante sofisticada[10] e requer uma extensão considerável dos métodos apresentados neste livro. Vamos nos restringir a alguns exemplos relacionados a aplicações físicas; em cada um desses exemplos, sabe-se que existe um conjunto infinito e de autovalores discretos.

Se um problema de Sturm-Liouville singular tem apenas um conjunto discreto de autovalores e autofunções, então a Eq. (17) pode ser usada, como na Seção 11.2, para provar que os autovalores de tal problema são reais e que as autofunções são ortogonais em relação à função peso r. A expansão de uma função dada em uma série de autofunções segue, então, como na Seção 11.2.

Tais expansões são úteis, como no caso regular, para se resolver problemas de valores de contorno não-homogêneos. O procedimento é bastante semelhante ao descrito na Seção 11.3. Alguns exemplos para equações diferenciais ordinárias estão indicados nos problemas de 1 a 4 e alguns problemas para equações diferenciais parciais aparecem na Seção 11.5.

Por exemplo, as autofunções $\phi_n(x) = J_0(\sqrt{\lambda_n}\,x)$ do problema de Sturm-Liouville singular

$$-(xy')' = \lambda xy, \qquad 0 < x < 1,$$
$$y,\ y' \text{ limitados quando } x \to 0, \qquad y(1) = 0$$

satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\int_0^1 x\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0, \qquad m \neq n \tag{23}$$

em relação à função peso $r(x) = x$. Então, se f é uma função dada, supomos que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\sqrt{\lambda_n}\,x). \tag{24}$$

Multiplicando a Eq. (24) por $xJ_0(\sqrt{\lambda_m}\,x)$ e integrando termo a termo de $x = 0$ a $x = 1$, obtemos

$$\int_0^1 xf(x)J_0(\sqrt{\lambda_m}\,x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^1 xJ_0(\sqrt{\lambda_m}\,x)\,J_0(\sqrt{\lambda_n}\,x)\,dx. \tag{25}$$

Devido à condição de ortogonalidade (23), a expressão à direita do sinal de igualdade na Eq. (25) contém um único termo; logo,

$$c_m = \frac{\displaystyle\int_0^1 xf(x)J_0(\sqrt{\lambda_m}\,x)\,dx}{\displaystyle\int_0^1 xJ_0^2(\sqrt{\lambda_m}\,x)\,dx}, \tag{26}$$

o que determina os coeficientes na série (24).

[10] Veja, por exemplo, o Cap. 5 do livro de Yosida.

A convergência da série (24) é obtida por uma extensão do Teorema 11.2.4 para cobrir esse caso. Pode-se mostrar, também, que esse teorema é válido para outros conjuntos de funções de Bessel, que são soluções de problemas de valores de contorno apropriados, para os polinômios de Legendre e para soluções de outros problemas de Sturm-Liouville singulares de interesse considerável.

É preciso enfatizar que os problemas singulares mencionados aqui não são, necessariamente, típicos. Em geral, problemas de valores de contorno singulares são caracterizados por espectro contínuo, em vez de conjuntos de autovalores discretos. O conjunto correspondente de autofunções é, portanto, não enumerável, e não existem expansões em série do tipo descritas no Teorema 11.2.4. Elas são substituídas por representações integrais apropriadas.

Problemas

1. Encontre uma solução formal para o problema de valores de contorno não-homogêneo

$$-(xy')' = \mu xy + f(x),$$

$$y, y' \text{ limitados quando } x \to 0, \qquad y(1) = 0,$$

onde f é uma função contínua dada em $0 \leq x \leq 1$ e μ não é um autovalor do problema homogêneo associado.
Sugestão: Use uma expansão em série semelhante às utilizadas na Seção 11.3.

2. Considere o problema de valores de contorno

$$-(xy')' = \lambda xy,$$

$$y, y' \text{ limitados quando } x \to 0, \qquad y'(1) = 0$$

(a) Mostre que $\lambda_0 = 0$ é um autovalor desse problema com autofunção associada $\phi_0(x) = 1$. Se $\lambda > 0$, mostre, formalmente, que as autofunções são dadas por $\phi_n(x) = J_0(\sqrt{\lambda_n}x)$, onde $\sqrt{\lambda_n}$ é a n-ésima raiz positiva (em ordem crescente) da equação $J_0'(\sqrt{\lambda}) = 0$. É possível mostrar que existe uma seqüência infinita de tais raízes.
(b) Mostre que, se $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, então

$$\int_0^1 x\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0, \qquad m \neq n.$$

(c) Encontre uma solução formal para o problema não-homogêneo

$$-(xy')' = \mu xy + f(x),$$

$$y, y' \text{ limitados quando } x \to 0, \qquad y'(1) = 0$$

onde f é uma função contínua dada em $0 \leq x \leq 1$ e μ não é um autovalor do sistema homogêneo correspondente.

3. Considere o problema

$$-(xy')' + (k^2/x)y = \lambda xy,$$

$$y, y' \text{ limitados quando } x \to 0, \qquad y(1) = 0$$

onde k é um inteiro positivo.
(a) Usando a substituição $t = \sqrt{\lambda}x$, mostre que a equação diferencial dada se reduz a uma equação de Bessel de ordem k (veja o Problema 9 da Seção 5.8). Uma solução é $J_k(t)$; uma segunda solução linearmente independente, denotada por $Y_k(t)$, é ilimitada quando $t \to 0$.
(b) Mostre, formalmente, que os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ do problema dado são os quadrados dos zeros positivos de $J_k(\sqrt{\lambda})$ e que as autofunções correspondentes são $\phi_n(x) = J_k(\sqrt{\lambda_n}x)$. É possível mostrar que existe uma seqüência infinita de tais zeros.
(c) Mostre que as autofunções $\phi_n(x)$ satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\int_0^1 x\phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0, \qquad m \neq n.$$

(d) Determine os coeficientes na expansão formal em série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x).$$

(e) Encontre uma solução formal do problema não-homogêneo

$$-(xy')' + (k^2/x)y = \mu xy + f(x),$$

$$y, y' \text{ limitados quando } x \to 0, \qquad y(1) = 0$$

onde f é uma função contínua dada no intervalo $0 \leq x \leq 1$ e μ não é um autovalor do problema homogêneo correspondente.

4. Considere a equação de Legendre (veja os problemas de 22 a 24 da Seção 5.3)

$$-[(1 - x^2)y']' = \lambda y$$

sujeita às condições de contorno

$$y(0) = 0, \qquad y, y' \text{ limitados quando } x \to 1.$$

As autofunções desse problema são os polinômios de Legendre de grau ímpar $\phi_1(x) = P_1(x) = x$, $\phi_2 = P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2, \ldots, \phi_n(x) = P_{2n-1}(x), \ldots$, correspondendo aos autovalores $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4 \cdot 3, \ldots, \lambda_n = 2n(2n-1), \ldots$.
(a) Mostre que

$$\int_0^1 \phi_m(x)\phi_n(x)\,dx = 0, \qquad m \neq n.$$

(b) Encontre uma solução formal do problema não-homogêneo

$$-[(1 - x^2)y']' = \mu y + f(x),$$

$$y(0) = 0, \qquad y, y' \text{ limitados quando } x \to 1.$$

onde f é uma função contínua dada em $0 \leq x \leq 1$ e μ não é um autovalor do problema homogêneo associado.

5. A equação

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \lambda y = 0 \qquad \text{(i)}$$

é a equação de Chebyshev; veja o Problema 10 da Seção 5.3.
(a) Mostre que a Eq. (i) pode ser escrita na forma

$$-[(1 - x^2)^{1/2}y']' = \lambda(1 - x^2)^{-1/2}y, \qquad -1 < x < 1. \qquad \text{(ii)}$$

(b) Considere as condições de contorno

$$y, y' \text{ limitados quando } x \to -1, \quad y, y' \text{ limitados quando } x \to 1. \qquad \text{(iii)}$$

Mostre que o problema de valores de contorno (ii), (iii) é auto-adjunto.
(c) Pode-se mostrar que o problema de valores de contorno (ii), (iii) tem os autovalores $\lambda_0 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \ldots, \lambda_n = n^2, \ldots$. As autofunções correspondentes são os polinômios de Chebyshev $T_n(x)$: $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 1 - 2x^2, \ldots$. Mostre que

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{(1 - x^2)^{1/2}}\,dx = 0, \qquad m \neq n. \qquad \text{(iv)}$$

Note que essa é uma integral imprópria convergente.

11.5 Observações Adicionais sobre o Método de Separação de Variáveis: Uma Expansão em Funções de Bessel

Estamos interessados, neste capítulo, em estender o método de separação de variáveis desenvolvido no Cap. 10 para uma classe maior de

problemas — problemas envolvendo equações diferenciais mais gerais, condições de contorno mais gerais ou regiões geométricas diferentes. Indicamos, na Seção 11.3, como tratar uma classe mais geral de equações diferenciais ou de condições de contorno. Vamos nos concentrar, aqui, em problemas colocados em diversas regiões geométricas, com ênfase naqueles que nos levam a problemas de Sturm-Liouville singulares quando as variáveis são separadas.

Devido a sua simplicidade relativa, assim como a importância física considerável de muitos problemas onde ele é aplicável, o método de separação de variáveis merece seu lugar de destaque na teoria e aplicações de equações diferenciais parciais. No entanto, esse método tem determinadas limitações que não devem ser esquecidas. Em primeiro lugar, o problema tem que ser linear, de modo que o princípio de superposição possa ser usado para se construir soluções adicionais, formando-se combinações lineares das soluções fundamentais de um problema homogêneo apropriado.

De um ponto de vista prático, precisamos, também, ser capazes de resolver as equações diferenciais ordinárias, obtidas após a separação das variáveis, de um modo razoavelmente conveniente. Em alguns problemas onde, em princípio, o método de separação de variáveis poderia ser aplicado, seu valor prático torna-se muito limitado devido à falta de informação sobre as soluções das equações diferenciais que aparecem.

Além disso, a geometria da região envolvida no problema fica sujeita a restrições bastante severas. Por um lado, é preciso usar um sistema de coordenadas no qual as variáveis podem ser separadas e a equação diferencial parcial pode ser substituída por um conjunto de equações diferenciais ordinárias. Para a equação de Laplace, existem em torno de uma dezena de tais sistemas de coordenadas; os leitores deste livro, em sua maioria, só estão familiarizados, provavelmente, com coordenadas retangulares, cilíndricas e esféricas. Por outro lado, a fronteira da região de interesse tem que ser formada por curvas ou superfícies onde uma das variáveis permaneça constante. Assim, em um nível elementar, estamos limitados a regiões limitadas por retas ou arcos circulares em duas dimensões, ou por planos, cilindros circulares, cones circulares ou esferas em três dimensões.

Em problemas tridimensionais, o operador de Laplace $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ leva à equação $X'' + \lambda X = 0$ em coordenadas retangulares, à equação de Bessel em coordenadas cilíndricas e à equação de Legendre em coordenadas esféricas. Esse fato é responsável, em grande parte, pelo estudo intensivo que foi feito dessas equações e das funções definidas por elas. Vale a pena observar, também, que duas das três situações mais importantes levam a problemas de Sturm-Liouville singulares, em vez de regulares. Os problemas singulares não são, portanto, excepcionais e podem despertar interesse maior do que os regulares. O resto desta seção é dedicado a um exemplo envolvendo a expansão de uma função dada em uma série de funções de Bessel.

Vibrações de uma Membrana Elástica Circular. Na Seção 10.7 [Eq. (7)], observamos que as vibrações transversais de uma membrana elástica fina são governadas pela equação de ondas a duas dimensões

$$a^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_{tt}. \qquad (1)$$

Para estudar o movimento de uma membrana circular, é conveniente escrever a Eq. (1) em coordenadas polares:

$$a^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right) = u_{tt}. \qquad (2)$$

Vamos supor que a membrana tem raio unitário, que está presa em toda a circunferência e que, inicialmente, ocupa uma posição deslocada da posição de repouso, independente da variável angular θ, e é solta no instante $t = 0$. Devido à simetria circular da condição inicial e da condição de contorno, é natural supor que u também seja independente de θ, isto é, que u seja uma função, apenas, de r e t. Nesse caso, a equação diferencial (2) fica

$$a^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\right) = u_{tt}, \qquad 0 < r < 1, \quad t > 0. \qquad (3)$$

A condição de contorno em $r = 1$ é

$$u(1, t) = 0, \qquad t \geq 0, \qquad (4)$$

e as condições iniciais são

$$u(r, 0) = f(r), \qquad 0 \leq r \leq 1, \qquad (5)$$

$$u_t(r, 0) = 0, \qquad 0 \leq r \leq 1, \qquad (6)$$

onde $f(r)$ descreve a configuração inicial da membrana. Por consistência, precisamos, também, que $f(1) = 0$. Finalmente, enunciamos explicitamente a condição que u é limitada em $0 \leq r \leq 1$.

Supondo que $u(r, t) = R(r)T(t)$ e substituindo na Eq. (3), obtemos

$$\frac{R'' + (1/r)R'}{R} = \frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = -\lambda^2. \qquad (7)$$

Antecipamos que a constante de separação é negativa, escrevendo-a como $-\lambda^2$ com $\lambda > 0$.[11] A Eq. (7) nos leva, então, às seguintes equações diferenciais ordinárias:

$$r^2R'' + rR' + \lambda^2r^2R = 0, \qquad (8)$$

$$T'' + \lambda^2a^2T = 0. \qquad (9)$$

Logo, da Eq. (9),

$$T(t) = k_1 \operatorname{sen} \lambda at + k_2 \cos \lambda at. \qquad (10)$$

Definindo uma nova variável independente $\xi = \lambda r$ na Eq. (8), obtemos

$$\xi^2\frac{d^2R}{d\xi^2} + \xi\frac{dR}{d\xi} + \xi^2R = 0, \qquad (11)$$

que é a equação de Bessel de ordem zero. Portanto,

$$R = c_1J_0(\xi) + c_2Y_0(\xi), \qquad (12)$$

onde J_0 e Y_0 são as funções de Bessel de primeira e segunda espécies, respectivamente, de ordem zero (veja a Seção 11.4). Em função de r, temos

$$R = c_1J_0(\lambda r) + c_2Y_0(\lambda r). \qquad (13)$$

A condição de limitação que $u(r, t)$ tem que satisfazer implica que R tem que permanecer limitada quando $r \to 0$. Como $Y_0(\lambda r) \to \infty$ quando $r \to 0$, precisamos escolher $c_2 = 0$. A condição de contorno (4) implica, então, que

$$J_0(\lambda) = 0. \qquad (14)$$

Em conseqüência, os valores permitidos para a constante de separação são obtidos das raízes da equação transcendental (14). Lembre-se, da Seção 11.4, que $J_0(\lambda)$ tem um conjunto discreto infinito de zeros positivos, que denotamos por $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n,$

[11] Denotando a constante de separação por $-\lambda^2$, em vez de, simplesmente, $-\lambda$, evitamos muitos radicais na discussão a seguir.

..., ordenados em ordem crescente. Além disso, as funções $J_0(\lambda_n r)$ são as autofunções de um problema de Sturm-Liouville singular e podem ser usadas como base para uma expansão em série da função f. As soluções fundamentais desse problema, que satisfazem a equação diferencial parcial (3), a condição de contorno (4) e a condição de limitação, são

$$u_n(r,t) = J_0(\lambda_n r)\ \text{sen}\,\lambda_n at, \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad (15)$$
$$v_n(r,t) = J_0(\lambda_n r)\ \cos\lambda_n at, \qquad n = 1, 2, \ldots. \qquad (16)$$

Vamos supor, agora, que $u(r, t)$ pode ser expressa como uma combinação linear infinita das soluções fundamentais (15), (16):

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[k_n u_n(r,t) + c_n v_n(r,t)\right]$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}[k_n J_0(\lambda_n r)\,\text{sen}\,\lambda_n at + c_n J_0(\lambda_n r)\cos\lambda_n at]. \quad (17)$$

As condições iniciais implicam que

$$u(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r) = f(r) \qquad (18)$$

e que

$$u_t(r,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a k_n J_0(\lambda_n r) = 0. \qquad (19)$$

Da Eq. (26) da Seção 11.4, obtemos

$$k_n = 0, \quad c_n = \frac{\displaystyle\int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_n r)\,dr}{\displaystyle\int_0^1 r[J_0(\lambda_n r)]^2\,dr}; \quad n = 1, 2, \ldots. \quad (20)$$

Logo, a solução da equação diferencial parcial (3) que satisfaz a condição de contorno (4) e as condições iniciais (5) e (6) é dada por

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r)\ \cos\lambda_n at \qquad (21)$$

com os coeficientes c_n definidos pela Eq. (20).

Problemas

1. Considere a equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ no paralelogramo cujos vértices são (0, 0), (2, 0), (3, 2) e (1, 2). Suponha que a condição de contorno no lado $y = 2$ é $u(x, 2) = f(x)$ para $1 \le x \le 3$ e que, nos três outros lados, $u = 0$ (veja a Fig. 11.5.1).
(a) Mostre que não existem soluções não-triviais da equação diferencial da forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$ que satisfaçam, também, as condições de contorno homogêneas.
(b) Sejam $\xi = x - \frac{1}{2}y$, $\eta = y$. Mostre que o paralelogramo dado no plano xy é transformado no quadrado $0 \le \xi \le 2$, $0 \le \eta \le 2$ no plano $\xi\eta$. Mostre que a equação diferencial é transformada em
$$\tfrac{5}{4}u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} = 0.$$
Como as condições de contorno são transformadas?
(c) Mostre que, no plano $\xi\eta$ a equação diferencial não tem soluções da forma
$$u(\xi,\eta) = U(\xi)V(\eta).$$
Assim, no plano xy, a forma da fronteira impede que se encontre uma solução pelo método de separação de variáveis, enquanto no plano $\xi\eta$ a região é aceitável, mas as variáveis da equação diferencial não podem mais ser separadas.
2. Encontre o deslocamento $u(r, t)$ de uma membrana circular elástica de raio 1 em vibração satisfazendo a condição de contorno
$$u(1,t) = 0, \qquad t \ge 0,$$
e as condições iniciais
$$u(r,0) = 0, \qquad u_t(r,0) = g(r), \qquad 0 \le r \le 1,$$
onde $g(1) = 0$.
Sugestão: A equação diferencial a ser satisfeita é a Eq. (3) desta seção.
3. Encontre o deslocamento $u(r, t)$ de uma membrana circular elástica de raio 1 em vibração satisfazendo a condição de contorno
$$u(1,t) = 0, \qquad t \ge 0,$$
e as condições iniciais
$$u(r,0) = f(r), \qquad u_t(r,0) = g(r), \qquad 0 \le r \le 1,$$
onde $f(1) = g(1) = 0$.
4. A equação de onda em coordenadas polares é
$$u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta} = a^{-2}u_{tt}.$$
Mostre que, se $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, então R, Θ e T satisfazem as equações diferenciais ordinárias
$$r^2R'' + rR' + (\lambda^2r^2 - n^2)R = 0,$$
$$\Theta'' + n^2\Theta = 0,$$
$$T'' + \lambda^2a^2T = 0.$$
5. Em coordenadas cilíndricas r, θ, z, definidas por
$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\theta, \qquad z = z,$$
a equação de Laplace fica
$$u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta} + u_{zz} = 0.$$
(a) Mostre que, se $u(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z)$, então R, Θ e Z satisfazem as equações diferenciais ordinárias
$$r^2R'' + rR' + (\lambda^2r^2 - n^2)R = 0,$$
$$\Theta'' + n^2\Theta = 0,$$
$$Z'' - \lambda^2Z = 0.$$
(b) Mostre que, se $u(r, \theta, z)$ é independente de θ, então a primeira equação no item (a) fica
$$r^2R'' + rR' + \lambda^2r^2R = 0,$$
a segunda é totalmente omitida e a terceira permanece inalterada.
6. Encontre a temperatura estado estacionário em uma barra semi-infinita $0 < z < \infty$, $0 \le r < 1$, se a temperatura é independente de θ e tende a zero quando $z \to \infty$. Suponha que a temperatura $u(r, z)$ satisfaz as condições de contorno
$$u(1,z) = 0, \qquad z > 0,$$
$$u(r,0) = f(r), \qquad 0 \le r \le 1.$$
Sugestão: Olhe o Problema 5.
7. A equação
$$v_{xx} + v_{yy} + k^2v = 0$$
é uma generalização da equação de Laplace, chamada, algumas vezes, de equação de Helmholtz.[12]

[12]Hermann von Helmholtz (1821-1894) estudou medicina e fisiologia; no início de sua carreira fez contribuições importantes à ótica e à acústica fisiológicas, inclusive a invenção do oftalmoscópio em 1851. Mais tarde seus interesses voltaram-se para a física, especialmente mecânica dos fluídos e hidrodinâmica. Ao longo de sua vida foi catedrático em fisiologia ou em física em diversas universidades alemãs.

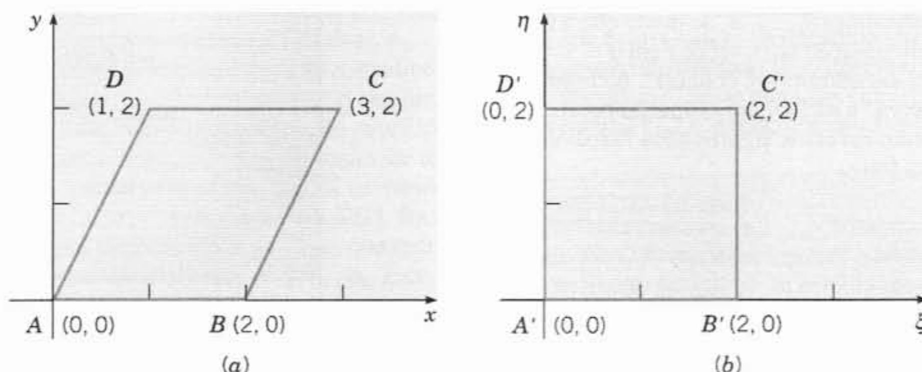


FIG. 11.5.1 A região no Problema 1.

(a) Em coordenadas polares, a equação de Helmholtz fica

$$v_{rr} + (1/r)v_r + (1/r^2)v_{\theta\theta} + k^2 v = 0.$$

Se $v(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$, mostre que R e Θ satisfazem as equações diferenciais ordinárias

$$r^2 R'' + rR' + (k^2r^2 - \lambda^2)R = 0, \qquad \Theta'' + \lambda^2\Theta = 0.$$

(b) Considere a equação de Helmholtz no disco $r < c$. Encontre a solução que permanece limitada em todos os pontos do disco, que é periódica em θ com período 2π e que satisfaz a condição de contorno $v(c, \theta) = f(\theta)$, onde f é uma função dada em $0 \leq \theta < 2\pi$.

Sugestão: A equação para R é uma equação de Bessel. Veja o Problema 3 na Seção 11.4.

8. Considere o fluxo de calor em um cilindro de comprimento infinito e raio 1: $0 \leq r < 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Suponha que a superfície do cilindro seja mantida a temperatura zero e que a distribuição inicial de temperatura seja uma função que só depende da variável radial. Então, a temperatura u só depende de r e t, e satisfaz a equação de calor

$$\alpha^2[u_{rr} + (1/r)u_r] = u_t, \qquad 0 < r < 1, \quad t > 0,$$

e as seguintes condições inicial e de contorno:

$$u(r, 0) = f(r), \qquad 0 \leq r \leq 1,$$
$$u(1, t) = 0, \qquad t > 0.$$

Mostre que

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r)e^{-\alpha^2\lambda_n^2 t},$$

onde $J_0(\lambda_n) = 0$. Encontre uma fórmula para c_n.

9. Em coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ ($\rho > 0, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$), definidas por

$$x = \rho\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad z = \rho\cos\phi,$$

a equação de Laplace fica

$$\rho^2 u_{\rho\rho} + 2\rho u_\rho + (\csc^2\phi)u_{\theta\theta} + u_{\phi\phi} + (\cot\phi)u_\phi = 0.$$

(a) Mostre que, se $u(\rho, \theta, \phi) = \mathrm{P}(\rho)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$, então P, Θ e Φ satisfazem equações diferenciais ordinárias da forma

$$\rho^2\mathrm{P}'' + 2\rho\mathrm{P}' - \mu^2\mathrm{P} = 0,$$
$$\Theta'' + \lambda^2\Theta = 0,$$
$$(\operatorname{sen}^2\phi)\Phi'' + (\operatorname{sen}\phi\cos\phi)\Phi' + (\mu^2\operatorname{sen}^2\phi - \lambda^2)\Phi = 0.$$

A primeira dessas equações é do tipo de Euler, enquanto a terceira está relacionada à equação de Legendre.

(b) Mostre que, se $u(\rho, \theta, \phi)$ é independente de θ, então a primeira equação no item (a) permanece inalterada, a segunda é omitida e a terceira fica

$$(\operatorname{sen}^2\phi)\Phi'' + (\operatorname{sen}\phi\cos\phi)\Phi' + (\mu^2\operatorname{sen}^2\phi)\Phi = 0.$$

(c) Mostre que, se definirmos uma nova variável independente por $s = \cos\phi$, então a equação para Φ no item (b) fica

$$(1 - s^2)\frac{d^2\Phi}{ds^2} - 2s\frac{d\Phi}{ds} + \mu^2\Phi = 0, \qquad -1 \leq s \leq 1.$$

Note que essa é a equação de Legendre.

10. Encontre a temperatura estado estacionário $u(\rho, \phi)$ na esfera de raio unitário se a temperatura é independente de θ e satisfaz a condição de contorno

$$u(1, \phi) = f(\phi), \qquad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Sugestão: Olhe o Problema 9 e os problemas de 22 a 29 na Seção 5.3. Use o fato de que só as soluções da equação de Legendre que são finitas em ambos os pontos ± 1 é que são polinômios de Legendre.

11.6 Séries de Funções Ortogonais: Convergência na Média

Na Seção 11.2, dissemos que, sob certas condições, uma função dada f pode ser expandida em uma série em autofunções de um problema de Sturm-Liouville de valores de contorno e que a série converge para $[f(x+) + f(x-)]/2$ em cada ponto do intervalo aberto. Sob condições um pouco mais restritivas, a série converge para $f(x)$ em todos os pontos do intervalo fechado. Esse tipo de convergência é conhecido como convergência pontual. Nesta seção, vamos descrever um tipo diferente de convergência, especialmente útil para séries em funções ortogonais, tais como autofunções.

Suponha que temos um conjunto de funções $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$, que são contínuas e satisfazem a condição de ortogonalidade

$$\int_0^1 r(x)\phi_i(x)\phi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \qquad (1)$$

onde r é uma função peso não-negativa. Suponha, também, que queremos aproximar uma função dada f, definida em $0 \leq x \leq 1$, por uma combinação linear de $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Isto é, se

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i(x), \qquad (2)$$

queremos escolher coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ de modo que a função S_n forneça a melhor aproximação possível de f em $0 \le x \le 1$. O primeiro problema que encontramos é enunciar, precisamente, o que queremos dizer com "a melhor aproximação possível de f em $0 \le x \le 1$". Existem diversos significados razoáveis que podem ser dados a essa frase.

1. Podemos escolher n pontos $x_1, \ldots, x_n$ no intervalo $0 \le x \le 1$ e exigir que $S_n(x)$ tenha o mesmo valor que $f(x)$ em cada um desses pontos. Os coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ são encontrados resolvendo-se o seguinte conjunto de equações lineares algébricas:
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(x_j) = f(x_j), \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$
Esse procedimento é conhecido como o **método da colocação**. Ele tem a vantagem de que é muito fácil escrever as Eqs. (3); é preciso, apenas, calcular as funções envolvidas nos pontos $x_1, \ldots, x_n$. Se esses pontos forem bem escolhidos e se n for bem grande, presume-se que $S_n(x)$ não será, apenas, igual a $f(x)$ nos pontos escolhidos, mas estará, também, razoavelmente próximo em todos os outros pontos. No entanto, a colocação tem diversas desvantagens. Uma é que, se for adicionada mais uma função básica ϕ_{n+1}, é necessário mais um ponto x_{n+1} e *todos* os coeficientes têm que ser recalculados. Isso significa que não é conveniente melhorar a precisão de uma aproximação pelo método de colocação incluindo-se termos adicionais. Além disso, os coeficientes a_i dependem dos pontos $x_1, \ldots, x_n$ e não é óbvio qual o melhor modo de selecionar esses pontos.
2. De modo alternativo, podemos considerar a diferença $|f(x) - S_n(x)|$ e tentar torná-la a menor possível. O problema aqui é que $|f(x) - S_n(x)|$ é uma função de x e dos coeficientes $a_1, \ldots, a_n$, e não é claro como calcular os a_i. A escolha dos a_i que torna $|f(x) - S_n(x)|$ menor em um ponto pode torná-lo maior em outro. Um modo de proceder pode ser considerar, então, a menor cota superior[13] de $|f(x) - S_n(x)|$ para x em $0 \le x \le 1$ e escolher, depois, $a_1, \ldots, a_n$ de modo a tornar essa quantidade a menor possível. Isto é, se
$$E_n(a_1, \ldots, a_n) = \sup_{0 \le x \le 1} |f(x) - S_n(x)|, \tag{4}$$
escolha $a_1, \ldots, a_n$ de modo a minimizar E_n. Esse método é, intuitivamente, muito bom, e é usado, com freqüência, nos cálculos teóricos. No entanto, na prática, é geralmente muito difícil, se não impossível, escrever uma fórmula explícita para $E_n(a_1, \ldots, a_n)$. Além disso, esse procedimento tem uma desvantagem em comum com a colocação: ao se adicionar um termo a $S_n(x)$, temos que recalcular todos os coeficientes precedentes. Por isso, não é muito usado em problemas práticos.
3. Um outro modo de proceder é considerar
$$I_n(a_1, \ldots, a_n) = \int_0^1 r(x)|f(x) - S_n(x)|\, dx. \tag{5}$$
Se $r(x) = 1$, então I_n é a área entre os gráficos de $y = f(x)$ e $y = S_n(x)$ (veja a Fig. 11.6.1). Podemos determinar os coeficientes a_i de modo a minimizar I_n. Para evitar complicações resultantes da utilização de valores absolutos, é mais conveniente considerar, em vez disso,
$$R_n(a_1, \ldots, a_n) = \int_0^1 r(x)[f(x) - S_n(x)]^2\, dx \tag{6}$$
como nossa medida da qualidade da aproximação de $f(x)$ pela combinação linear $S_n(x)$. Embora R_n seja, claramente, semelhante a I_n sob alguns aspectos, não tem a interpretação geométrica simples de I_n. Apesar disso, é muito mais fácil, matematicamente, trabalhar com R_n do que com I_n. A quantidade R_n é chamada **erro médio quadrático** da aproximação de f por S_n. Se $a_1, \ldots, a_n$ são escolhidas de modo a minimizar R_n, então dizemos que S_n aproxima f no sentido da média quadrática.

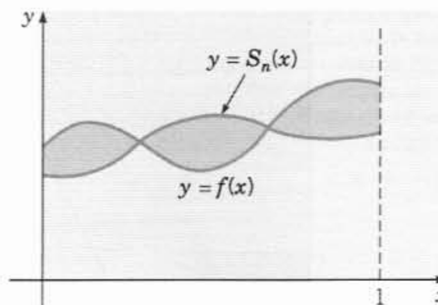


FIG. 11.6.1 Aproximação de $f(x)$ por $S_n(x)$.

Para escolher $a_1, \ldots, a_n$ de modo a minimizar R_n, precisamos satisfazer as condições necessárias
$$\partial R_n / \partial a_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$
Escrevendo a Eq. (7) e observando que $\partial S_n(x; a_1, \ldots, a_n)/\partial a_i$ é igual a $\phi_i(x)$, obtemos
$$-\frac{\partial R_n}{\partial a_i} = 2\int_0^1 r(x)[f(x) - S_n(x)]\phi_i(x)\, dx = 0. \tag{8}$$
Substituindo $S_n(x)$ pela expressão dada na Eq. (2) e usando a relação de ortogonalidade (1), temos
$$a_i = \int_0^1 r(x) f(x) \phi_i(x)\, dx, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$
Os coeficientes definidos pela Eq. (9) são chamados de coeficientes de Fourier de f em relação ao conjunto ortonormal $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ e à função peso r. Como as condições (7) são apenas necessárias, e não suficientes, para que R_n seja um mínimo, é preciso um argumento separado para se mostrar que, de fato, R_n é minimizado se os a_i forem escolhidos pela Eq. (9). Esse argumento está esboçado no Problema 5.

Note que os coeficientes (9) são os mesmos que os da expansão em série de autofunções cuja convergência, sob certas condições, foi enunciada no Teorema 11.2.4. Assim, $S_n(x)$ é a n-ésima soma parcial dessa série e constitui a melhor aproximação de $f(x)$ na média quadrática que é possível com as funções $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Vamos supor, daqui em diante, que os coeficientes a_i em $S_n(x)$ são dados pela Eq. (9).

A relevância da Eq. (9) tem dois outros aspectos importantes. Em primeiro lugar, ela fornece uma fórmula para cada a_i *separadamente*, em vez de como um conjunto de equações al-

[13] A menor cota superior, ou supremo (sup), é uma cota superior que é menor do que todas as outras. O sup de uma função limitada sempre existe e é igual ao máximo da função, se ela tiver máximo.

gébricas para $a_1, \ldots, a_n$, como o método da colocação, por exemplo. Isso se deve à ortogonalidade das funções básicas $\phi_1, \ldots, \phi_n$. Além disso, a fórmula para a_i é *independente* de n, o número de termos em $S_n(x)$. O significado prático disso é o seguinte: suponha que, para se obter uma melhor aproximação para f, desejamos usar uma aproximação com um número maior de termos — digamos k termos, com $k > n$. Então, não há necessidade de se recalcular os n primeiros coeficientes em $S_k(x)$. Basta calcular, usando a Eq. (9), os coeficientes $a_{n+1}, \ldots, a_k$ que apareceram devido às funções básicas adicionais $\phi_{n+1}, \ldots, \phi_k$. É claro que, se as funções f, r e ϕ_n forem complicadas, pode ser necessário calcular as integrais numericamente.

Vamos supor agora que exista uma seqüência infinita de funções $\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$, contínuas e ortonormais no intervalo $0 \le x \le 1$. Suponha, além disso, que, quando n cresce indefinidamente, o erro médio quadrático R_n tende a zero. Nesse caso, a série infinita

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i(x)$$

converge **na média quadrática** (ou, simplesmente, na **média**) para $f(x)$. Convergência na média é um tipo de convergência essencialmente diferente da convergência pontual considerada até agora. Uma série pode convergir na média sem convergir em cada ponto. Isso é plausível, geometricamente, já que a área entre as duas curvas, que se comporta do mesmo modo que o erro médio quadrático, pode ser zero mesmo que as funções não sejam iguais em todos os pontos. Elas podem diferir em qualquer conjunto finito, por exemplo, sem afetar o erro médio quadrático. É menos óbvio, mas também verdadeiro, que, mesmo que uma série convirja em todos os pontos, ela pode não convergir na média. De fato, o erro médio quadrático pode até tornar-se ilimitado. Um exemplo desse fenômeno é dado no Problema 4.

Suponha que queiramos saber que classe de funções, definidas no intervalo $0 \le x \le 1$, possam ser representadas por uma série infinita do conjunto ortonormal ϕ_i, $i = 1, 2, \ldots$. A resposta depende do tipo de convergência que queremos. Dizemos que o conjunto $\phi_1, \ldots, \phi_n, \ldots$ é **completo** em relação à convergência na média quadrática para um conjunto de funções F se, para cada função f em F, a série

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \phi_i(x), \qquad (10)$$

com os coeficientes dados pela Eq. (9), converge na média. Existe uma definição semelhante para o completamento em relação à convergência pontual.

Teoremas relacionados com a convergência de séries como as da Eq. (10) podem ser reformulados em função da idéia de completamento. Por exemplo, o Teorema 11.2.4 pode ser enunciado da seguinte maneira: as autofunções do problema de Sturm-Liouville

$$-[p(x)y']' + q(x)y = \lambda r(x)y, \qquad 0 < x < 1, \qquad (11)$$

$$a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0, \qquad b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0 \qquad (12)$$

são completas em relação à convergência pontual usual para o conjunto de funções contínuas em $0 \le x \le 1$ com derivada seccionalmente contínua nesse mesmo intervalo.

Se a convergência pontual é substituída por convergência na média, o Teorema 11.2.4 pode ser bastante generalizado. Antes de enunciar tal teorema, análogo ao Teorema 11.2.4, precisamos definir o que é uma função de quadrado integrável. Uma função f é dita de **quadrado integrável** no intervalo $0 \le x \le 1$ se ambas, f e f^2, são integráveis[14] nesse intervalo. O teorema a seguir é semelhante ao Teorema 11.2.4, exceto que envolve convergência na média.

Teorema 11.6.1

As autofunções ϕ_i do problema de Sturm-Liouville (11), (12) são completas em relação à convergência na média para o conjunto de funções que são de quadrado integrável em $0 \le x \le 1$. Em outras palavras, dada qualquer função de quadrado integrável f, a série (10), com os coeficientes dados pela Eq. (9), converge para $f(x)$ na média quadrática.

A classe de funções especificadas no Teorema 11.6.1 é, de fato, muito grande. A classe de funções de quadrado integrável inclui funções com muitas descontinuidades, inclusive alguns tipos de descontinuidades infinitas, assim como funções que não são diferenciáveis em ponto algum. Todas essas funções podem ser expandidas em séries de autofunções do problema de Sturm-Liouville (11), (12) que convergem na média. No entanto, em muitos casos essas séries não convergem pontualmente, pelo menos não em todos os pontos. Assim, a convergência na média está, naturalmente, mais associada a séries de funções ortogonais, como autofunções, do que a convergência pontual.

A teoria de séries de Fourier, discutida no Cap. 10, é, simplesmente, um caso particular da teoria geral de problemas de Sturm-Liouville. Por exemplo, as funções

$$\phi_n(x) = \sqrt{2}\,\text{sen}\, n\pi x \qquad (13)$$

são as autofunções normalizadas do problema de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \qquad (14)$$

Logo, se f é uma função dada de quadrado integrável em $0 \le x \le 1$, então, de acordo com o Teorema 11.6.1, a série

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \phi_m(x) = \sqrt{2} \sum_{m=1}^{\infty} b_m \,\text{sen}\, m\pi x, \qquad (15)$$

onde

$$b_m = \int_0^1 f(x)\phi_m(x)\, dx = \sqrt{2} \int_0^1 f(x)\, \text{sen}\, m\pi x\, dx, \qquad (16)$$

converge na média. A série (15) é, precisamente, a série de Fourier em senos discutida na Seção 10.4. Se f satisfaz as condições mais fortes enunciadas no Teorema 11.2.4, então essa série converge pontualmente, além de convergir na média. Analogamente, uma série de Fourier em co-senos está associada com o problema de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0. \qquad (17)$$

[14]Para a integral de Riemann usada no cálculo elementar, as hipóteses de que f e f^2 são integráveis são independentes: existem funções f tais que f é integrável e f^2 não é, e vice-versa (veja o Problema 6). Uma integral generalizada, conhecida como a integral de Lebesgue, tem a propriedade (entre outras) que, se f^2 é integrável, então f também o é. A expressão *de quadrado integrável* tornou-se usual em conexão com esse tipo de integração.

Exemplo 1

Seja $f(x) = 1$ para $0 < x < 1$. Expanda $f(x)$ usando as autofunções (13) e discuta a convergência, pontual e na média, da série resultante.

A série tem a forma (15) e seus coeficientes b_m são dados pela Eq. (16). Logo,

$$b_m = \sqrt{2}\int_0^1 \operatorname{sen} m\pi x\, dx = \frac{\sqrt{2}}{m\pi}(1 - \cos m\pi) \quad (18)$$

e a n-ésima soma parcial da série é

$$S_n(x) = 2\sum_{m=1}^{n} \frac{1-\cos m\pi}{m\pi} \operatorname{sen} m\pi x. \quad (19)$$

O erro médio quadrático é

$$R_n = \int_0^1 [f(x) - S_n(x)]^2\, dx. \quad (20)$$

Calculando R_n para diversos valores de n e fazendo um gráfico do resultado, obtemos a Fig. 11.6.2. Essa figura indica que R_n decresce sempre que n cresce. É claro, o Teorema 11.6.1 afirma que $R_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Pontualmente, sabemos que $S_n(x) \to f(x) = 1$ quando $n \to \infty$ para $0 < x < 1$; além disso, $S_n(x)$ tem o valor nulo em $x = 0$ e $x = 1$ para todo n. Embora a série convirja pontualmente para cada valor de x, a menor cota superior do erro não diminui quando n aumenta. Para cada n, existem pontos arbitrariamente próximos de $x = 0$ e de $x = 1$ onde o erro está arbitrariamente próximo de 1.

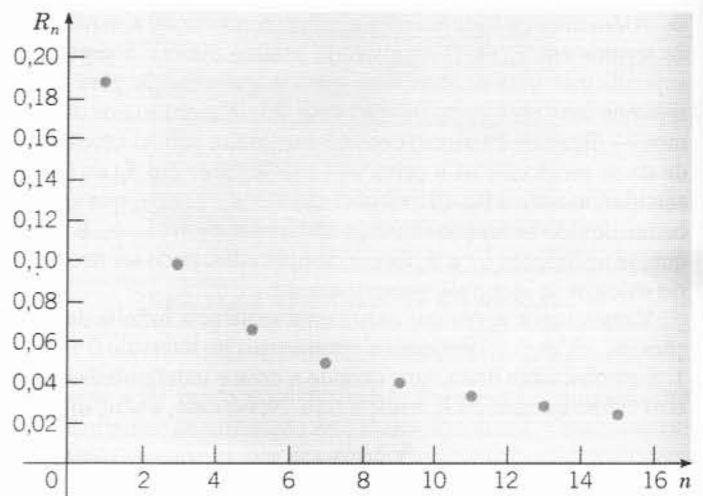


FIG. 11.6.2 Dependência em n do erro médio quadrático R_n no Exemplo 1.

O Teorema 11.6.1 pode ser estendido para cobrir problemas de valores de contorno auto-adjuntos com condições de contorno periódicas, tais como o problema

$$y'' + \lambda y = 0, \quad (21)$$

$$y(-L) - y(L) = 0, \qquad y'(-L) - y'(L) = 0 \quad (22)$$

considerado no Exemplo 4 da Seção 11.2. As autofunções do problema (21), (22) são $\phi_n(x) = \cos(n\pi x/L)$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ e $\psi_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ para $n = 1, 2, \ldots$. Se f é uma função dada, de quadrado integrável em $-L \le x \le L$, então sua expansão nas autofunções ϕ_n e ψ_n é da forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (23)$$

onde

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad (24)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots. \quad (25)$$

Essa expansão é, exatamente, a série de Fourier de f discutida nas Seções 10.2 e 10.3. De acordo com a generalização do Teorema 11.6.1, a série (23) converge na média, qualquer que seja a função de quadrado integrável f, embora f possa não satisfazer as condições do Teorema 10.3.1, que garante convergência pontual.

Problemas

1. Estenda os resultados do Exemplo 1 encontrando o menor valor de n para o qual $R_n < 0{,}02$, onde R_n é dado pela Eq. (20).
2. Seja $f(x) = x$ para $0 < x < 1$ e seja $\phi_m(x) = \sqrt{2}\ \operatorname{sen}(m\pi x)$.
   (a) Encontre os coeficientes b_m na expansão de $f(x)$ em termos de $\phi_1(x), \phi_2(x), \ldots$.
   (b) Calcule o erro médio quadrático R_n para diversos valores de n e faça um gráfico dos resultados.
   (c) Encontre o menor valor de n para o qual $R_n < 0{,}01$.
3. Siga as instruções do Problema 2 usando $f(x) = x(1 - x)$ para $0 < x < 1$.
4. Vamos mostrar, neste problema, que a convergência pontual de uma seqüência $S_n(x)$ não implica convergência na média e reciprocamente.
   (a) Seja $S_n(x) = n\sqrt{x}e^{-nx^2/2}$, $0 \le x \le 1$. Mostre que $S_n(x) \to 0$ quando $n \to \infty$ para cada x em $0 \le x \le 1$. Mostre, também, que
   $$R_n = \int_0^1 [0 - S_n(x)]^2\, dx = \frac{n}{2}(1 - e^{-n}),$$
   e, portanto, $R_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Logo, a convergência pontual não implica em convergência na média.
   (b) Seja $S_n(x) = x^n$ para $0 \le x \le 1$ e seja $f(x) = 0$ para $0 \le x \le 1$. Mostre que
   $$R_n = \int_0^1 [f(x) - S_n(x)]^2\, dx = \frac{1}{2n+1},$$
   e, portanto, $S_n(x)$ converge para $f(x)$ na média. Mostre, também, que $S_n(x)$ não converge para $f(x)$ pontualmente em $0 \le x \le 1$. Logo, a convergência na média não implica em convergência pontual.

5. Suponha que as funções $\phi_1, \ldots, \phi_n$ satisfazem a relação de ortogonalidade (1) e que uma função dada $f(x)$ deve ser aproximada por $S_n(x) = c_1\phi_1(x) + \ldots + c_n\phi_n(x)$, onde os coeficientes c_n não são, necessariamente, os da Eq. (9). Mostre que o erro médio quadrático R_n dado pela Eq. (6) pode ser escrito na forma
$$R_n = \int_0^1 r(x)f^2(x)\,dx - \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n (c_i - a_i)^2,$$
onde os a_i são os coeficientes de Fourier dados pela Eq. (9). Mostre que R_n é minimizado se $c_i = a_i$ para cada i.
6. Vamos mostrar, neste problema, através de exemplos, que a integrabilidade (no sentido de Riemann) de f e de f^2 são independentes.

   (a) Seja $f(x) = \begin{cases} x^{-1/2}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

   Mostre que $\int_0^1 f(x)\,dx$ existe como uma integral imprópria, mas $\int_0^1 f^2(x)\,dx$ não existe.

   (b) Seja $f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ racional}, \\ -1, & x \text{ irracional}. \end{cases}$

   Mostre que $\int_0^1 f^2(x)\,dx$ existe, mas $\int_0^1 f(x)\,dx$ não existe.
7. Suponha que queiramos construir um conjunto de polinômios ortonormais $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x), \ldots$ no intervalo $1 \le x \le 1$, onde $f_k(x)$ tem grau k. Em outras palavras, os polinômios têm que satisfazer
$$(f_j, f_k) = \int_0^1 f_j(x)f_k(x)\,dx = \delta_{jk}.$$
   (a) Encontre $f_0(x)$ escolhendo o polinômio de grau zero tal que $(f_0, f_0) = 1$.
   (b) Encontre $f_1(x)$ determinando o polinômio de grau um tal que $(f_0, f_1) = 0$ e $(f_1, f_1) = 1$.
   (c) Encontre $f_2(x)$.
   (d) A condição de normalização $(f_k, f_k) = 1$ é um tanto desajeitada para se usar. Seja $g_0(x), g_1(x), \ldots, g_k(x), \ldots$ a seqüência de polinômios ortogonais em $0 \le x \le 1$ normalizados pela condição $g_k(1) = 1$. Encontre $g_0(x)$, $g_1(x)$ e $g_2(x)$ e compare com $f_0(x)$, $f_1(x)$ e $f_2(x)$.
8. Suponha que queiramos construir um conjunto de polinômios ortogonais $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_k(x), \ldots$ no intervalo $-1 \le x \le 1$, onde $P_k(x)$ tem grau k; veja o Problema 7. Suponha, além disso, que $P_k(x)$ seja normalizada pela condição $P_k(1) = 1$. Encontre $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ e $P_3(x)$. Note que esses são os quatro primeiros polinômios de Legendre (veja o Problema 24 da Seção 5.3).
9. Este problema desenvolve outros resultados associados à convergência na média. Sejam $R_n(a_1, \ldots, a_n)$, $S_n(x)$ e a_i definidos pelas Eqs. (6), (2) e (9), respectivamente.

   (a) Mostre que
$$R_n = \int_0^1 r(x)f^2(x)\,dx - \sum_{i=1}^n a_i^2.$$
   Sugestão: Use a Eq. (6) e integre, usando a relação de ortogonalidade (1).

   (b) Mostre que $\sum_{i=1}^n a_i^2 \le \int_0^1 r(x)f^2(x)\,dx$. Esse resultado é conhecido como a desigualdade de Bessel.

   (c) Mostre que $\sum_{i=1}^\infty a_i^2$ converge.

   (d) Mostre que $\lim_{n\to\infty} R_n = \int_0^1 r(x)f^2(x)\,dx - \sum_{i=1}^\infty a_i^2$.

   (e) Mostre que $\sum_{i=1}^\infty a_i\phi_i(x)$ converge para $f(x)$ na média se, e somente se,
$$\int_0^1 r(x)f^2(x)\,dx = \sum_{i=1}^\infty a_i^2.$$
   Esse resultado é conhecido como a equação de Parseval.

Nos problemas de 10 a 12, sejam $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots$ as autofunções normalizadas do problema de Sturm-Liouville (11), (12).

10. Mostre que, se a_n é o n-ésimo coeficiente de Fourier de uma função de quadrado integrável f, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

    Sugestão: Use a desigualdade de Bessel, Problema 9(b).
11. Mostre que a série
$$\phi_1(x) + \phi_2(x) + \cdots + \phi_n(x) + \cdots$$
    não pode ser uma série de autofunções para nenhuma função de quadrado integrável.
    Sugestão: Veja o Problema 10.
12. Mostre que a série
$$\phi_1(x) + \frac{\phi_2(x)}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{\phi_n(x)}{\sqrt{n}} + \cdots$$
    não pode ser uma série de autofunções para nenhuma função de quadrado integrável.
    Sugestão: Use a desigualdade de Bessel, Problema 9(b).
13. Mostre que a equação de Parseval no Problema 9(e) é obtida, formalmente, elevando-se ao quadrado a série (10) correspondente a f, multiplicando pela função peso r e integrando termo a termo.

REFERÊNCIAS

Os livros a seguir foram mencionados no texto em conexão com determinados teoremas sobre problemas de Sturm-Liouville:

Birkhoff, G., and Rota, G.-C., *Ordinary Differential Equations* (4th ed.) (New York: Wiley, 1989).

Sagan, H., *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics* (New York: Wiley, 1961; New York: Dover, 1989).

Weinberger, H., *A First Course in Partial Differential Equations* (New York: Wiley, 1965; New York: Dover, 1995).

Yosida, K., *Lectures on Differential and Integral Equations* (New York: Wiley-Interscience, 1960; New York: Dover, 1991).

Os livros a seguir são fontes convenientes para dados numéricos ou gráficos sobre funções de Bessel e de Legendre:

Abramowitz, M., and Stegun, I. A. (eds.), *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover, 1965); originally published by the National Bureau of Standards, Washington, DC, 1964.

Jahnke, E., and Emde, F., *Tables of Functions with Formulae and Curves* (Leipzig: Teubner, 1938; New York: Dover, 1945).

Os livros a seguir contêm, também, muita informação sobre problemas de Sturm-Liouville:

Cole, R. H., *Theory of Ordinary Differential Equations* (New York: Irvington, 1968).

Hochstadt, H., *Differential Equations: A Modern Approach* (New York: Holt, 1964; New York: Dover, 1975).

Miller, R. K., and Michel, A. N., *Ordinary Differential Equations* (New York: Academic Press, 1982).

Tricomi, F. G., *Differential Equations* (New York: Hafner, 1961).

Respostas dos Problemas

CAPÍTULO 1 Seção 1.1

1. $y \to 3/2$ quando $t \to \infty$.
2. y se afasta de $3/2$ quando $t \to \infty$.
3. y se afasta de $-3/2$ quando $t \to \infty$.
4. $y \to -1/2$ quando $t \to \infty$.
5. y se afasta de $-1/2$ quando $t \to \infty$.
6. y se afasta de -2 quando $t \to \infty$.
7. $y' = 3 - y$
8. $y' = 2 - 3y$
9. $y' = y - 2$
10. $y' = 3y - 1$
11. $y = 0$ e $y = 4$ são soluções de equilíbrio; $y \to 4$ se o valor inicial é positivo; y se afasta de zero se o valor inicial é negativo.
12. $y = 0$ e $y = 5$ são soluções de equilíbrio; y se afasta de 5 se o valor inicial é maior do que 5; $y \to 0$ se o valor inicial é menor do que 5.
13. $y = 0$ é solução de equilíbrio; $y \to 0$ se o valor inicial é negativo; y se afasta de zero se o valor inicial é positivo.
14. $y = 0$ e $y = 2$ são soluções de equilíbrio; y se afasta de 0 se o valor inicial é negativo; $y \to 2$ se o valor inicial está entre 0 e 2; y se afasta de 2 se o valor inicial é maior do que 2.
15. (j)
16. (c)
17. (g)
18. (b)
19. (h)
20. (e)
21. (a) $dq/dt = 300(10^{-2} - q10^{-6})$; q em g, t em horas (b) $q \to 10^4$ g; não
22. $dV/dt = -kV^{2/3}$ para algum $k > 0$.
23. $du/dt = -0{,}05\,(u - 70)$; u em °F, t em minutos.
24. (a) $dq/dt = 500 - 0{,}4q$; q em mg, t em horas (b) $q \to 1250$ mg
25. (a) $mv' = mg - kv^2$ (b) $v \to \sqrt{mg/k}$ (c) $k = 2/49$
26. y é assintótico a $t - 3$ quando $t \to \infty$.
27. $y \to 0$ quando $t \to \infty$.
28. $y \to \infty$, 0 ou $-\infty$, dependendo do valor inicial de y.
29. $y \to \infty$ ou $-\infty$, dependendo do valor inicial de y.
30. $y \to \infty$ ou $-\infty$ ou y oscila, dependendo do valor inicial de y.
31. $y \to -\infty$ ou é assintótico a $\sqrt{2t - 1}$, dependendo do valor inicial de y.
32. $y \to 0$ e então deixa de existir depois de algum instante $t_f \geq 0$.
33. $y \to \infty$ ou $-\infty$, dependendo do valor inicial de y.

Seção 1.2

1. (a) $y = 5 + (y_0 - 5)e^{-t}$ (b) $y = (5/2) + [y_0 - (5/2)]e^{-2t}$
   (c) $y = 5 + (y_0 - 5)e^{-2t}$
   A solução de equilíbrio é $y = 5$ em (a) e (c), $y = 5/2$ em (b); a solução tende ao equilíbrio mais depressa em (b) e (c) do que em (a).

2. (a) $y = 5 + (y_0 - 5)e^t$ (b) $y = (5/2) + [y_0 - (5/2)]e^{2t}$
(c) $y = 5 + (y_0 - 5)e^{2t}$
A solução de equilíbrio é $y = 5$ em (a) e (c), $y = 5/2$ em (b); a solução se afasta do equilíbrio mais depressa em (b) e (c) do que em (a).
3. (a) $y = ce^{-at} + (b/a)$
(c) (i) O equilíbrio é mais baixo e é aproximado mais rapidamente. (ii) O equilíbrio é mais alto. (iii) O equilíbrio permanece o mesmo e é aproximado mais rapidamente.
4. (a) $y_e = b/a$ (b) $y' = ay$
5. (a) $y_1(t) = ce^{at}$ (b) $y = ce^{at} + (b/a)$
6. $y = ce^{-at} + (b/a)$
7. (a) $T = 2\ln 18 \cong 5{,}78$ meses (b) $T = 2\ln[900/(900 - p_0)]$ meses
(c) $p_0 = 900(1 - e^{-6}) \cong 897{,}8$
8. (a) $r = (\ln 2)/30$ dias^{-1} (b) $r = (\ln 2)/N$ dias^{-1}
9. (a) $T = 5\ln 50 \cong 19{,}56$ s (b) 718,34 m
10. (a) $dv/dt = 9{,}8$, $v(0) = 0$ (b) $T = \sqrt{300/4{,}9} \cong 7{,}82$ s
(c) $v \cong 76{,}68$ m/s
11. (b) $v = 49$ tgh $(t/5)$ m/s
(e) $x = 245 \ln\cosh(t/5)$ m
(f) $T \cong 9{,}48$ s
12. (a) $r \cong 0{,}02828$ dia^{-1} (b) $Q(t) = 100e^{-0{,}02828t}$ (c) $T \cong 24{,}5$ dias
14. $1620\ln(4/3)/\ln 2 \cong 672{,}4$ anos
15. (a) $u = T + (u_0 - T)\,e^{-kt}$
(b) $k\tau = \ln 2$
16. 6,69 horas
17. (a) $Q(t) = CV(1 - e^{-t/RC})$ (b) $Q(t) \to CV = Q_L$
(c) $Q(t) = CV\exp[-(t - t_1)/RC]$
18. (a) $Q' = 3(1 - 10^{-4}Q)$, $Q(0) = 0$
(b) $Q(t) = 10^4(1 - e^{-3t/10^4})$, t em horas; depois de 1 ano, $Q \cong 9277{,}77$ g
(c) $Q' = -3Q/10^4$, $Q(0) = 9277{,}77$
(d) $Q(t) = 9277{,}77e^{-3t/10^4}$, t em horas; depois de 1 ano, $Q \cong 670{,}07$ g
(e) $T \cong 2{,}60$ anos
19. (a) $q' = -q/300$, $q(0) = 5000$ g (b) $q(t) = 5000e^{-t/300}$ (c) não
(d) $T = 300\ln(25/6) \cong 7{,}136$ h
(e) $r = 250\ln(25/6) \cong 256{,}78$ gal/min

Seção 1.3

1. Segunda ordem, linear.
2. Segunda ordem, não-linear.
3. Quarta ordem, linear.
4. Primeira ordem, não-linear.
5. Segunda ordem, não-linear.
6. Terceira ordem, linear.
15. $r = -2$
16. $r = \pm 1$
17. $r = 2, -3$
18. $r = 0, 1, 2$
19. $r = -1, -2$
20. $r = 1, 4$
21. Segunda ordem, linear.
22. Segunda ordem, não-linear.
23. Quarta ordem, linear.
24. Segunda ordem, não-linear.

CAPÍTULO 2 Seção 2.1

1. (c) $y = ce^{-3t} + (t/3) - (1/9) + e^{-2t}$; y é assintótico a $t/3 - 1/9$ quando $t \to \infty$
2. (c) $y = ce^{2t} + t^3e^{2t}/3$; $y \to \infty$ quando $t \to \infty$
3. (c) $y = ce^{-t} + 1 + t^2e^{-t}/2$; $y \to 1$ quando $t \to \infty$
4. (c) $y = (c/t) + (3\cos 2t)/4t + (3\operatorname{sen}2t)/2$; y é assintótico a $(3\operatorname{sen}2t)/2$ quando $t \to \infty$
5. (c) $y = ce^{2t} - 3e^t$; $y \to \infty$ ou $-\infty$ quando $t \to \infty$
6. (c) $y = (c - t\cos t + \operatorname{sen} t)/t^2$; $y \to 0$ quando $t \to \infty$
7. (c) $y = t^2e^{-t^2} + ce^{-t^2}$; $y \to 0$ quando $t \to \infty$
8. (c) $y = (\operatorname{arctg} t + c)/(1 + t^2)^2$; $y \to 0$ quando $t \to \infty$
9. (c) $y = ce^{-t/2} + 3t - 6$; y é assintótico a $3t - 6$ quando $t \to \infty$
10. (c) $y = -te^{-t} + ct$; $y \to \infty, 0$, ou $-\infty$ quando $t \to \infty$
11. (c) $y = ce^{-t} + \operatorname{sen}2t - 2\cos 2t$; y é assintótico a $\operatorname{sen}2t - 2\cos 2t$ quando $t \to \infty$

12. (c) $y = ce^{-t/2} + 3t^2 - 12t + 24$; y é assintótico a $3t^2 - 12t + 24$ quando $t \to \infty$
13. $y = 3e^t + 2(t-1)e^{2t}$
14. $y = (t^2 - 1)e^{-2t}/2$
15. $y = (3t^4 - 4t^3 + 6t^2 + 1)/12t^2$
16. $y = (\text{sen}\, t)/t^2$
17. $y = (t+2)e^{2t}$
18. $y = t^{-2}[(\pi^2/4) - 1 - t\cos t + \text{sen}\, t]$
19. $y = -(1+t)e^{-t}/t^4, \quad t \neq 0$
20. $y = (t - 1 + 2e^{-t})/t, \quad t \neq 0$
21. (b) $y = -\frac{4}{5}\cos t + \frac{8}{5}\text{sen}\, t + (a + \frac{4}{5})e^{t/2}$; $a_0 = -\frac{4}{5}$
    (c) y oscila para $a = a_0$
22. (b) $y = -3e^{t/3} + (a+3)e^{t/2}$; $a_0 = -3$
    (c) $y \to -\infty$ para $a = a_0$
23. (b) $y = [2 + a(3\pi + 4)e^{2t/3} - 2e^{-\pi t/2}]/(3\pi + 4)$; $a_0 = -2/(3\pi + 4)$
    (c) $y \to 0$ para $a = a_0$
24. (b) $y = te^{-t} + (ea - 1)e^{-t}/t$; $a_0 = 1/e$
    (c) $y \to 0$ quando $t \to 0$ para $a = a_0$
25. (b) $y = -\cos t/t^2 + \pi^2 a/4t^2$; $a_0 = 4/\pi^2$
    (c) $y \to \frac{1}{2}$ quando $t \to 0$ para $a = a_0$
26. (b) $y = (e^t - e + a\,\text{sen}\, 1)/\text{sen}\, t$; $a_0 = (e - 1)/\text{sen}\, 1$
    (c) $y \to 1$ para $a = a_0$
27. $(t, y) = (1{,}364312; 0{,}820082)$
28. $y_0 = -1{,}642876$
29. (a) $y = 12 + \frac{8}{65}\cos 2t + \frac{64}{65}\text{sen}\, 2t - \frac{788}{65}e^{-t/4}$; y oscila em torno de 12 quando $t \to \infty$
    (b) $t = 10{,}065778$
30. $y_0 = -5/2$
31. $y_0 = -16/3$; $y \to -\infty$ quando $t \to \infty$ para $y_0 = -16/3$
39. Veja o Problema 2.
40. Veja o Problema 4.
41. Veja o Problema 6.
42. Veja o Problema 12.

Seção 2.2

1. $3y^2 - 2x^3 = c; \quad y \neq 0$
2. $3y^2 - 2\ln|1 + x^3| = c; \quad x \neq -1, y \neq 0$
3. $y^{-1} + \cos x = c$ se $y \neq 0$; também $y = 0$; em toda a parte
4. $3y + y^2 - x^3 + x = c; \quad y \neq -3/2$
5. $2\,\text{tg}\, 2y - 2x - \text{sen}\, 2x = c$ se $\cos 2y \neq 0$; também $y = \pm(2n+1)\pi/4$ para qualquer inteiro n; em toda a parte
6. $y = \text{sen}[\ln|x| + c]$ se $x \neq 0$ e $|y| < 1$; também $y = \pm 1$
7. $y^2 - x^2 + 2(e^y - e^{-x}) = c; \quad y + e^y \neq 0$
8. $3y + y^3 - x^3 = c$; em toda a parte
9. (a) $y = 1/(x^2 - x - 6)$
    (c) $-2 < x < 3$
10. (a) $y = -\sqrt{2x - 2x^2 + 4}$
    (c) $-1 < x < 2$
11. (a) $y = [2(1-x)e^x - 1]^{1/2}$
    (c) $-1{,}68 < x < 0{,}77$ aproximadamente
12. (a) $r = 2/(1 - 2\ln\theta)$
    (c) $0 < \theta < \sqrt{e}$
13. (a) $y = -[2\ln(1 + x^2) + 4]^{1/2}$
    (c) $-\infty < x < \infty$
14. (a) $y = \left[3 - 2\sqrt{1 + x^2}\right]^{-1/2}$
    (c) $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{5}$
15. (a) $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 - 15}$
    (c) $x > \frac{1}{2}\sqrt{15}$
16. (a) $y = -\sqrt{(x^2 + 1)/2}$
    (c) $-\infty < x < \infty$
17. (a) $y = 5/2 - \sqrt{x^3 - e^x + 13/4}$
    (c) $-1{,}4445 < x < 4{,}6297$ aproximadamente
18. (a) $y = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{65 - 8e^x - 8e^{-x}}$
    (c) $|x| < 2{,}0794$ aproximadamente
19. (a) $y = [\pi - \text{arcsen}(3\cos^2 x)]/3$
    (c) $|x - \pi/2| < 0{,}6155$
20. (a) $y = \left[\frac{3}{2}(\text{arcsen}\, x)^2\right]^{1/3}$
    (c) $-1 < x < 1$
21. $y^3 - 3y^2 - x - x^3 + 2 = 0, \quad |x| < 1$
22. $y^3 - 4y - x^3 = -1, \quad |x^3 - 1| < 16/3\sqrt{3}$ ou $-1{,}28 < x < 1{,}60$
23. $y = -1/(x^2/2 + 2x - 1); \quad x = -2$
24. $y = -3/2 + \sqrt{2x - e^x + 13/4}; \quad x = \ln 2$
25. $y = -3/2 + \sqrt{\text{sen}\, 2x + 1/4}; \quad x = \pi/4$
26. $y = \text{tg}\,(x^2 + 2x); \quad x = -1$
27. (a) $y \to 4$ se $y_0 > 0$; $y = 0$ se $y_0 = 0$; $y \to -\infty$ se $y_0 < 0$
    (b) $T = 3{,}29527$
28. (a) $y \to 4$ quando $t \to \infty$

(b) $T = 2{,}84367$
(c) $3{,}6622 < y_0 < 4{,}4042$

29. $x = \dfrac{c}{a}y + \dfrac{ad - bc}{a^2}\ln|ay + b| + k; \quad a \neq 0,\ ay + b \neq 0$
30. (e) $|y + 2x|^3|y - 2x| = c$
31. (b) $\text{arctg}\,(y/x) - \ln|x| = c$
32. (b) $x^2 + y^2 - cx^3 = 0$
33. (b) $|y - x| = c|y + 3x|^5$; também $y = -3x$
34. (b) $|y + x|\,|y + 4x|^2 = c$
35. (b) $2x/(x + y) + \ln|x + y| = c$; também $y = -x$
36. (b) $x/(x + y) + \ln|x| = c$; também $y = -x$
37. (b) $|x|^3|x^2 - 5y^2| = c$
38. (b) $c|x|^3 = |y^2 - x^2|$

Seção 2.3

1. $t = 100\ln 100$ min $\cong 460{,}5$ min
2. $Q(t) = 120\gamma[1 - \exp(-t/60)]$; 120γ
3. $Q = 50e^{-0{,}2}(1 - e^{-0{,}2})$ lb $\cong 7{,}42$ lb
4. $Q(t) = 200 + t - [100(200)^2/(200 + t)^2]$ lb, $t < 300$; $c = 121/125$ lb/gal
$\lim_{t\to\infty} c = 1$ lb/gal
5. (a) $Q(t) = \frac{63.150}{2501}e^{-t/50} + 25 - \frac{625}{2501}\cos t + \frac{25}{5002}\,\text{sen}\,t$
(c) nível = 25; amplitude = $25\sqrt{2501}/5002 \cong 0{,}24995$
6. (c) 130,41 s
7. (a) $(\ln 2)/r$ anos (b) 9,90 anos (c) 8,66%
8. (a) $k(e^{rt} - 1)/r$ (b) $k \cong$ R\$3.930 (c) 9,77%
9. $k =$ R\$3086,64/ano; R\$1259,92
10. (a) R\$89.034,79 (b) R\$102.965,21
11. (a) $t \cong 135{,}36$ meses
(b) R\$152.698,56
12. (a) 0,00012097 ano^{-1} (b) $Q_0\exp(-0{,}00012097t)$, t em anos
(c) 13.305 anos
13. $P = 201.977{,}31 - 1977{,}31e^{(\ln 2)t}$, $0 \le t \le t_f \cong 6{,}6745$ (semanas)
14. (a) $\tau \cong 2{,}9632$; não
(b) $\tau = 10\ln 2 \cong 6{,}9315$
(c) $\tau = 6{,}3805$
15. (b) $y_c \cong 0{,}83$
16. $t = \ln\frac{13}{8}/\ln\frac{13}{12}$ min $\cong 6{,}07$ min
17. (a) $u(t) = 2000/(1 + 0{,}048\,t)^{1/3}$
(c) $\tau \cong 750{,}77$ s
18. (a) $u(t) = ce^{-kt} + T_0 + kT_1(k\cos\omega t + w\,\text{sen}\,\omega t)/(k^2 + \omega^2)$
(b) $R \cong 9{,}11\,°$F; $\tau \cong 3{,}51$ h
(c) $R = kT_1/\sqrt{k^2 + \omega^2}$; $\tau = (1/\omega)\,\text{arctg}\,(\omega/k)$
19. (a) $c = k + (P/r) + [c_0 - k - (P/r)]e^{-rt/V}$; $\lim_{t\to\infty} c = k + (P/r)$
(b) $T = (V\ln 2)/r$; $T = (V\ln 10)/r$
(c) Superior, $T = 431$ anos; Michigan, $T = 71{,}4$ anos; Erie, $T = 6{,}05$ anos; Ontario, $T = 17{,}6$ anos
20. (a) 50,408 m (b) 5,248 s
21. (a) 45,783 m (b) 5,129 s
22. (a) 48,562 m (b) 5,194 s
23. (a) 176,7 pés/s (b) 1074,5 pés (c) 15 pés/s (d) 256,6 s
24. (a) $dv/dx = -\mu v$
(b) $\mu = (66/25)\ln 10$ milhas$^{-1} \cong 6{,}0788$ milhas^{-1}
(c) $\tau = 900/(11\ln 10)$ s $\cong 35{,}533$ s
25. (a) $x_m = -\dfrac{m^2 g}{k^2}\ln\left(1 + \dfrac{kv_0}{mg}\right) + \dfrac{mv_0}{k}$; $\quad t_m = \dfrac{m}{k}\ln\left(1 + \dfrac{kv_0}{mg}\right)$
26. (a) $v = -(mg/k) + [v_0 + (mg/k)]\exp(-kt/m)$ (b) $v = v_0 - gt$; sim
(c) $v = 0$ para $t > 0$
27. (a) $v_L = 2a^2 g(\rho - \rho')/9\mu$ (b) $e = 4\pi a^3 g(\rho - \rho')/3E$

28. (a) 11,58 m/s (b) 13,45 m (c) $k \geq 0{,}2394$ kg/s
29. (a) $v = R\sqrt{2g/(R+x)}$ (b) 50,6 h
30. (b) $x = ut\cos A$, $y = -gt^2/2 + ut\,\mathrm{sen}\,A + h$
    (d) $-16L^2/(u^2\cos^2 A) + L\,\mathrm{tg}\,A + 3 \geq H$
    (e) 0,63 rad $\leq A \leq$ 0,96 rad
    (f) $u = 106{,}89$ pés/s, $A = 0{,}7954$ rad
31. (a) $v = (u\cos A)e^{-rt}$, $w = -g/r + (u\,\mathrm{sen}\,A + g/r)e^{-rt}$
    (b) $x = u\cos A(1 - e^{-rt})/r$, $y = -gt/r + (u\,\mathrm{sen}A + g/r)(1 - e^{-rt})/r + h$
    (d) $u = 145{,}3$ pés/s, $A = 0{,}644$ rad
32. (d) $k = 2{,}193$

Seção 2.4

1. $0 < t < 3$
2. $0 < t < 4$
3. $\pi/2 < t < 3\pi/2$
4. $-\infty < t < -2$
5. $-2 < t < 2$
6. $1 < t < \pi$
7. $2t + 5y > 0$ ou $2t + 5y < 0$
8. $t^2 + y^2 < 1$
9. $1 - t^2 + y^2 > 0$ ou $1 - t^2 + y^2 < 0$, $t \neq 0$, $y \neq 0$
10. Em toda a parte.
11. $y \neq 0$, $y \neq 3$
12. $t \neq n\pi$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $y \neq -1$
13. $y = \pm\sqrt{y_0^2 - 4t^2}$ se $y_0 \neq 0$; $|t| < |y_0|/2$
14. $y = [(1/y_0) - t^2]^{-1}$ se $y_0 \neq 0$; $y = 0$ se $y_0 = 0$; o intervalo é $|t| < 1/\sqrt{y_0}$ se $y_0 > 0$; $-\infty < t < \infty$ se $y_0 \leq 0$
15. $y = y_0/\sqrt{2ty_0^2 + 1}$ se $y_0 \neq 0$; $y = 0$ se $y_0 = 0$; o intervalo é $-1/2y_0^2 < t < \infty$ se $y_0 \neq 0$; $-\infty < t < \infty$ se $y_0 = 0$
16. $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}\ln(1 + t^3) + y_0^2}$; $-[1 - \exp(-3y_0^2/2)]^{1/3} < t < \infty$
17. $y \to 3$ se $y_0 > 0$; $y = 0$ se $y_0 = 0$; $y \to -\infty$ se $y_0 < 0$
18. $y \to -\infty$ se $y_0 < 0$; $y \to 0$ se $y_0 \geq 0$
19. $y \to 0$ se $y_0 \leq 9$; $y \to \infty$ se $y_0 > 9$
20. $y \to -\infty$ se $y_0 < y_c \approx -0{,}019$; caso contrário y é assintótico a $\sqrt{t-1}$
21. (a) Não (b) Sim; faça $t_0 = 1/2$ na Eq. (19) no texto.
    (c) $|y| \leq (4/3)^{3/2} \cong 1{,}5396$
22. (a) $y_1(t)$ é uma solução para $t \geq 2$; $y_2(t)$ é uma solução para todo t.
    (b) f_y não é contínua em $(2, -1)$.
26. (a) $y_1(t) = \dfrac{1}{\mu(t)}$; $y_2(t) = \dfrac{1}{\mu(t)}\displaystyle\int_{t_0}^{t} \mu(s)g(s)\,ds$
28. $y = \pm[5t/(2 + 5ct^5)]^{1/2}$
29. $y = r/(k + cre^{-rt})$
30. $y = \pm[\epsilon/(\sigma + c\epsilon e^{-2\epsilon t})]^{1/2}$
31. $y = \pm\left\{\mu(t)\Big/\left[2\displaystyle\int_{t_0}^{t}\mu(s)\,ds + c\right]\right\}^{1/2}$, onde $\mu(t) = \exp(2\Gamma\,\mathrm{sen}\,t + 2Tt)$
32. $y = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$ para $0 \leq t \leq 1$; $y = \frac{1}{2}(e^2 - 1)e^{-2t}$ para $t > 1$
33. $y = e^{-2t}$ para $0 \leq t \leq 1$; $y = e^{-(t+1)}$ para $t > 1$

Seção 2.5

1. $y = 0$ é instável.
2. $y = -a/b$ é assintoticamente estável, $y = 0$ é instável.
3. $y = 1$ é assintoticamente estável, $y = 0$ e $y = 2$ são instáveis.
4. $y = 0$ é instável.
5. $y = 0$ é assintoticamente estável.
6. $y = 0$ é assintoticamente estável.
7. (c) $y = [y_0 + (1 - y_0)kt]/[1 + (1 - y_0)kt]$
8. $y = 1$ é semi-estável.
9. $y = -1$ é assintoticamente estável, $y = 0$ é semi-estável, $y = 1$ é instável.
10. $y = -1$ e $y = 1$ são assintoticamente estáveis, $y = 0$ é instável.
11. $y = 0$ é assintoticamente estável, $y = b^2/a^2$ é instável.
12. $y = 2$ é assintoticamente estável, $y = 0$ é semi-estável, $y = -2$ é instável.
13. $y = 0$ e $y = 1$ são semi-estáveis.
15. (a) $\tau = (1/r)\ln 4$; 55,452 anos (b) $T = (1/r)\ln[\beta(1 - \alpha)/(1 - \beta)\alpha]$; 175,78 anos
16. (a) $y = 0$ é instável, $y = K$ é assintoticamente estável.
    (b) Convexa para $0 < y \leq K/e$, côncava para $K/e \leq y < K$.

17. (a) $y = K\exp\{[\ln(y_0/K)]e^{-rt}\}$ (b) $y(2) \cong 0{,}7153K \cong 57{,}6 \times 10^6$ kg
(c) $\tau \cong 2{,}215$ anos
18. (b) $(h/a)\sqrt{k/\alpha\pi}$; sim
(c) $k/\alpha \leq \pi a^2$
19. (b) $k^2/2g(\alpha a)^2$
20. (c) $Y = Ey_2 = KE[1 - (E/r)]$ (d) $Y_m = Kr/4$ para $E = r/2$
21. (a) $y_{1,2} = K[1 \mp \sqrt{1 - (4h/rK)}]/2$
22. (a) $y = 0$ é instável, $y = 1$ é assintoticamente estável.
(b) $y = y_0/[y_0 + (1 - y_0)e^{-\alpha t}]$
23. (a) $y = y_0 e^{-\beta t}$ (b) $x = x_0 \exp[-\alpha y_0(1 - e^{-\beta t})/\beta]$ (c) $x_0 \exp(-\alpha y_0/\beta)$
24. (b) $z = 1/[\nu + (1 - \nu)e^{\beta t}]$ (c) 0,0927
25. (a, b) $a = 0 : y = 0$ é semi-estável.
$a > 0 : y = \sqrt{a}$ é assintoticamente estável e $y = -\sqrt{a}$ é instável.
26. (a) $a \leqslant 0 : y = 0$ é assintoticamente estável.
$a > 0 : y = 0$ é instável; $y = \sqrt{a}$ e $y = -\sqrt{a}$ são assintoticamente estáveis.
27. (a) $a < 0 : y = 0$ é assintoticamente estável e $y = a$ é instável.
$a = 0 : y = 0$ é semi-estável.
$a > 0 : y = 0$ é instável e $y = a$ é assintoticamente estável.
28. (a) $\lim_{t\to\infty} x(t) = \min(p, q)$; $x(t) = \dfrac{pq[e^{\alpha(q-p)t} - 1]}{qe^{\alpha(q-p)t} - p}$
(b) $\lim_{t\to\infty} x(t) = p$; $x(t) = \dfrac{p^2\alpha t}{p\alpha t + 1}$

Seção 2.6

1. $x^2 + 3x + y^2 - 2y = c$
2. Não é exata
3. $x^3 - x^2y + 2x + 2y^3 + 3y = c$
4. $x^2y^2 + 2xy = c$
5. $ax^2 + 2bxy + cy^2 = k$
6. Não é exata
7. $e^x \operatorname{sen} y + 2y\cos x = c$; também $y = 0$
8. Não é exata
9. $e^{xy}\cos 2x + x^2 - 3y = c$
10. $y\ln x + 3x^2 - 2y = c$
11. Não é exata
12. $x^2 + y^2 = c$
13. $y = [x + \sqrt{28 - 3x^2}]/2$, $|x| < \sqrt{28/3}$
14. $y = [x - (24x^3 + x^2 - 8x - 16)^{1/2}]/4$, $x > 0{,}9846$
15. $b = 3$; $x^2y^2 + 2x^3y = c$
16. $b = 1$; $e^{2xy} + x^2 = c$
19. $x^2 + 2\ln|y| - y^{-2} = c$; também $y = 0$
20. $e^x \operatorname{sen} y + 2y\cos x = c$
21. $xy^2 - (y^2 - 2y + 2)e^y = c$
22. $x^2e^x \operatorname{sen} y = c$
24. $\mu(t) = \exp \int R(t)\, dt$, onde $t = xy$
25. $\mu(x) = e^{3x}$; $(3x^2y + y^3)e^{3x} = c$
26. $\mu(x) = e^{-x}$; $y = ce^x + 1 + e^{2x}$
27. $\mu(y) = y$; $xy + y\cos y - \operatorname{sen} y = c$
28. $\mu(y) = e^{2y}/y$; $xe^{2y} - \ln|y| = c$; também $y = 0$
29. $\mu(y) = \operatorname{sen} y$; $e^x \operatorname{sen} y + y^2 = c$
30. $\mu(y) = y^2$; $x^4 + 3xy + y^4 = c$
31. $\mu(x, y) = xy$; $x^3y + 3x^2 + y^3 = c$

Seção 2.7

1. (a) 1,2; 1,39; 1,571; 1,7439
(b) 1,1975; 1,38549; 1,56491; 1,73658
(c) 1,19631; 1,38335; 1,56200; 1,73308
(d) 1,19516; 1,38127; 1,55918; 1,72968
2. (a) 1,1; 1,22; 1,364; 1,5368
(b) 1,105; 1,23205; 1,38578; 1,57179
(c) 1,10775; 1,23873; 1,39793; 1,59144
(d) 1,1107; 1,24591; 1,41106; 1,61277
3. (a) 1,25; 1,54; 1,878; 2,2736
(b) 1,26; 1,5641; 1,92156; 2,34359
(c) 1,26551; 1,57746; 1,94586; 2,38287
(d) 1,2714; 1,59182; 1,97212; 2,42554
4. (a) 0,3; 0,538501; 0,724821; 0,866458
(b) 0,284813; 0,513339; 0,693451; 0,831571
(c) 0,277920; 0,501813; 0,678949; 0,815302
(d) 0,271428; 0,490897; 0,665142; 0,799729

5. Converge para $y \geq 0$; não está definida para $y < 0$.
6. Converge para $y \geq 0$; diverge para $y < 0$.
7. Converge.
8. Converge para $|y(0)| < 2{,}37$ (aproximadamente); diverge nos outros casos.
9. Diverge.
10. Diverge.
11. (a) 2,30800; 2,49006; 2,60023; 2,66773; 2,70939; 2,73521
(b) 2,30167; 2,48263; 2,59352; 2,66227; 2,70519; 2,73209
(c) 2,29864; 2,47903; 2,59024; 2,65958; 2,70310; 2,73053
(d) 2,29686; 2,47691; 2,58830; 2,65798; 2,70185; 2,72959
12. (a) 1,70308; 3,06605; 2,44030; 1,77204; 1,37348; 1,11925
(b) 1,79548; 3,06051; 2,43292; 1,77807; 1,37795; 1,12191
(c) 1,84579; 3,05769; 2,42905; 1,78074; 1,38017; 1,12328
(d) 1,87734; 3,05607; 2,42672; 1,78224; 1,38150; 1,12411
13. (a) −1,48849; −0,412339; 1,04687; 1,43176; 1,54438; 1,51971
(b) −1,46909; −0,287883; 1,05351; 1,42003; 1,53000; 1,50549
(c) −1,45865; −0,217545; 1,05715; 1,41486; 1,52334; 1,49879
(d) −1,45212; −0,173376; 1,05941; 1,41197; 1,51949; 1,49490
14. (a) 0,950517; 0,687550; 0,369188; 0,145990; 0,0421429; 0,00872877
(b) 0,938298; 0,672145; 0,362640; 0,147659; 0,0454100; 0,0104931
(c) 0,932253; 0,664778; 0,359567; 0,148416; 0,0469514; 0,0113722
(d) 0,928649; 0,660463; 0,357783; 0,148848; 0,0478492; 0,0118978
15. (a) −0,166134; −0,410872; −0,804660; 4,15867
(b) −0,174652; −0,434238; −0,889140; −3,09810
16. Uma estimativa razoável para y em $t = 0{,}8$ é entre 5,5 e 6. Não é possível obter uma estimativa confiável em $t = 1$ dos dados especificados.
17. Uma estimativa razoável para y em $t = 2{,}5$ é entre 18 e 19. Não é possível obter uma estimativa confiável em $t = 3$ dos dados especificados.
18. (b) $2{,}37 < \alpha_0 < 2{,}38$
19. (b) $0{,}67 < \alpha_0 < 0{,}68$

Seção 2.8

1. $dw/ds = (s+1)^2 + (w+2)^2, \quad w(0) = 0$
2. $dw/ds = 1 - (w+3)^3, \quad w(0) = 0$
3. (a) $\phi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{2^k t^k}{k!}$ (c) $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = e^{2t} - 1$
4. (a) $\phi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k t^k}{k!}$ (c) $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = e^{-t} - 1$
5. (a) $\phi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} t^{k+1}/(k+1)!2^{k-1}$
(c) $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = 4e^{-t/2} + 2t - 4$
6. (a) $\phi_n(t) = t - \dfrac{t^{n+1}}{(n+1)!}$
(c) $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = t$
7. (a) $\phi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{t^{2k-1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}$
8. (a) $\phi_n(t) = -\sum_{k=1}^{n} \dfrac{t^{3k-1}}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3k-1)}$
9. (a) $\phi_1(t) = \dfrac{t^3}{3}; \quad \phi_2(t) = \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^7}{7\cdot 9}; \quad \phi_3(t) = \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^7}{7\cdot 9} + \dfrac{2t^{11}}{3\cdot 7\cdot 9\cdot 11} + \dfrac{t^{15}}{(7\cdot 9)^2\cdot 15}$
10. (a) $\phi_1(t) = t; \quad \phi_2(t) = t - \dfrac{t^4}{4}; \quad \phi_3(t) = t - \dfrac{t^4}{4} + \dfrac{3t^7}{4\cdot 7} - \dfrac{3t^{10}}{16\cdot 10} + \dfrac{t^{13}}{64\cdot 13}$
11. (a) $\phi_1(t) = t, \quad \phi_2(t) = t - \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^4}{4!} - \dfrac{t^6}{6!} + O(t^7),$

$$\phi_3(t) = t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{7t^5}{5!} + \frac{14t^6}{6!} + O(t^7),$$

$$\phi_4(t) = t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - \frac{7t^5}{5!} + \frac{31t^6}{6!} + O(t^7)$$

12. (a) $\phi_1(t) = -t - t^2 - \dfrac{t^3}{2},$

$$\phi_2(t) = -t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^5}{5} - \frac{t^6}{24} + O(t^7),$$

$$\phi_3(t) = -t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{12} - \frac{3t^5}{20} + \frac{4t^6}{45} + O(t^7),$$

$$\phi_4(t) = -t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} - \frac{7t^5}{60} + \frac{t^6}{15} + O(t^7)$$

Seção 2.9

1. $y_n = (-1)^n (0{,}9)^n y_0$; $y_n \to 0$ quando $n \to \infty$
2. $y_n = y_0/(n+1)$; $y_n \to 0$ quando $n \to \infty$
3. $y_n = y_0\sqrt{(n+2)(n+1)/2}$; $y_n \to \infty$ quando $n \to \infty$
4. $y_n = \begin{cases} y_0, & \text{se } n = 4k \text{ ou } n = 4k-1; \\ -y_0, & \text{se } n = 4k-2 \text{ ou } n = 4k-3; \end{cases}$ y_n não tem limite quando $n \to \infty$
5. $y_n = (0{,}5)^n (y_0 - 12) + 12$; $y_n \to 12$ quando $n \to \infty$
6. $y_n = (-1)^n (0{,}5)^n (y_0 - 4) + 4$; $y_n \to 4$ quando $n \to \infty$
7. 7,25%
8. R$2283,63
9. R$258,14
10. (a) R$804,62 (b) R$877,57 (c) R$1028,61
11. 30 anos: R$804,62/mês; R$289.663,20 total 20 anos: R$899,73/mês; R$215.935,20 total
12. R$103.624,62
13. 9,73%
16. (b) $u_n \to -\infty$ quando $n \to \infty$
19. (a) 4,7263 (b) 1,223% (c) 3,5643 (e) 3,5699

Problemas Variados

1. $y = (c/x^2) + (x^3/5)$
2. $\operatorname{arctg}(y/x) - \ln\sqrt{x^2+y^2} =$
3. $x^2 + xy - 3y - y^3 = 0$
4. $x = ce^y + ye^y$
5. $x^2y + xy^2 + x = c$
6. $y = x^{-1}(1 - e^{1-x})$
7. $(x^2 + y^2 + 1)e^{-y^2} = c$
8. $y = (4 + \cos 2 - \cos x)/x^2$
9. $x^2y + x + y^2 = c$
10. $(y^2/x^3) + (y/x^2) = c$
11. $x^3/3 + xy + e^y = c$
12. $y = ce^{-x} + e^{-x}\ln(1 + e^x)$
13. $2(y/x)^{1/2} - \ln|x| = c$; também $y = 0$
14. $x^2 + 2xy + 2y^2 = 34$
15. $y = c/\cosh^2(x/2)$
16. $(2/\sqrt{3})\operatorname{arctg}[(2y - x)/\sqrt{3}x] - \ln|x| = c$
17. $y = ce^{3x} - e^{2x}$
18. $y = cx^{-2} - x$
19. $3y - 2xy^3 - 10x = 0$
20. $e^x + e^{-y} = c$
21. $e^{-y/x} + \ln|x| = c$
22. $y^3 + 3y - x^3 + 3x = 2$
23. $\dfrac{1}{y} = -x\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{x^2}\,dx + cx$; também $y = 0$
24. $\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} y = c$
25. $x^2/y + \operatorname{arctg}(y/x) = c$
26. $x^2 + 2x^2y - y^2 = c$
27. $\operatorname{sen} x \cos 2y - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x = c$
28. $2xy + xy^3 - x^3 = c$
29. $\operatorname{arcsen}(y/x) - \ln|x| = c$; também $y = x$ e $y = -x$
30. $xy^2 - \ln|y| = 0$
31. $x + \ln|x| + x^{-1} + y - 2\ln|y| = c$; também $y = 0$
32. $x^3y^2 + xy^3 = -4$
34. (a) $y = t + (c - t)^{-1}$
    (b) $y = t^{-1} + 2t(c - t^2)^{-1}$
    (c) $y = \operatorname{sen} t + (c\cos t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t)^{-1}$
35. (a) $v' = [x(t) + b]v = b$
    (b) $v = [b\int u(t)\,dt + c]/\mu(t)$, $\mu(t) = \exp[-(at^2/2) - bt]$
36. $y = c_1t^{-1} + c_2 + \ln t$
37. $y = c_1\ln t + c_2 + t$
38. $y = (1/k)\ln|(k - t)/(k + t)| + c_2$ se $c_1 = k^2 > 0$;
    $y = (2/k)\operatorname{arctg}(t/k) + c_2$ se $c_1 = -k^2 < 0$;
    $y = -2t^{-1} + c_2$ se $c_1 = 0$; também $y = c$
39. $y = \pm\frac{2}{3}(t - c_1)\sqrt{t + c_1} + c_2$;
    também $y = c$
    Sugestão: $\mu(v) = v^{-3}$ é um fator integrante

40. $y = c_1e^{-t} + c_2 - te^{-t}$
41. $c_1^2y = c_1t - \ln|1 + c_1t| + c_2$ se $c_1 \neq 0$;
$y = \frac{1}{2}t^2 + c_2$ se $c_1 = 0$; também $y = c$
42. $y^2 = c_1t + c_2$
43. $y = c_1 \operatorname{sen}(t + c_2) = k_1 \operatorname{sen} t + k_2 \cos t$
44. $\frac{1}{3}y^3 - 2c_1y + c_2 = 2t$; também $y = c$
45. $t + c_2 = \pm\frac{2}{3}(y - 2c_1)(y + c_1)^{1/2}$
46. $y \ln|y| - y + c_1y + t = c_2$; também $y = c$
47. $e^y = (t + c_2)^2 + c_1$
48. $y = \frac{4}{3}(t + 1)^{3/2} - \frac{1}{3}$
49. $y = 2(1 - t)^{-2}$
50. $y = 3 \ln t - \frac{3}{2}\ln(t^2 + 1) - 5 \operatorname{arctg} t + 2 + \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{5}{4}\pi$
51. $y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}$

CAPÍTULO 3 Seção 3.1

1. $y = c_1e^t + c_2e^{-3t}$
2. $y = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}$
3. $y = c_1e^{t/2} + c_2e^{-t/3}$
4. $y = c_1e^{t/2} + c_2e^t$
5. $y = c_1 + c_2e^{-5t}$
6. $y = c_1e^{3t/2} + c_2e^{-3t/2}$
7. $y = c_1 \exp[(9 + 3\sqrt{5})t/2] + c_2 \exp[(9 - 3\sqrt{5})t/2]$
8. $y = c_1 \exp[(1 + \sqrt{3})t] + c_2 \exp[(1 - \sqrt{3})t]$
9. $y = e^t$; $y \to \infty$ quando $t \to \infty$
10. $y = \frac{5}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$; $y \to 0$ quando $t \to \infty$
11. $y = 12e^{t/3} - 8e^{t/2}$; $y \to -\infty$ quando $t \to \infty$
12. $y = -1 - e^{-3t}$; $y \to -1$ quando $t \to \infty$
13. $y = \frac{1}{26}(13 + 5\sqrt{13}) \exp[(-5 + \sqrt{13})t/2] + \frac{1}{26}(13 - 5\sqrt{13}) \exp[(-5 - \sqrt{13})t/2]$;
$y \to 0$ quando $t \to \infty$
14. $y = (2/\sqrt{33}) \exp[(-1 + \sqrt{33})t/4] - (2/\sqrt{33}) \exp[(-1 - \sqrt{33})t/4]$;
$y \to \infty$ quando $t \to \infty$
15. $y = \frac{1}{10}e^{-9(t-1)} + \frac{9}{10}e^{t-1}$; $y \to \infty$ quando $t \to \infty$
16. $y = -\frac{1}{2}e^{(t+2)/2} + \frac{3}{2}e^{-(t+2)/2}$; $y \to -\infty$ quando $t \to \infty$
17. $y'' + y' - 6y = 0$
18. $2y'' + 5y' + 2y = 0$
19. $y = \frac{1}{4}e^t + e^{-t}$; mínimo é $y = 1$ em $t = \ln 2$
20. $y = -e^t + 3e^{t/2}$; máximo é $y = \frac{9}{4}$ em $t = \ln(9/4)$, $y = 0$ em $t = \ln 9$
21. $\alpha = -2$
22. $\beta = -1$
23. $y \to 0$ para $\alpha < 0$; y torna-se ilimitado para $\alpha > 1$.
24. $y \to 0$ para $\alpha < 1$; não existe α tal que todas as soluções não-nulas se tornam ilimitadas.
25. (a) $y = \frac{1}{5}(1 + 2\beta)e^{-2t} + \frac{1}{5}(4 - 2\beta)e^{t/2}$
(b) $y \cong 0{,}71548$ quando $t = \frac{2}{5}\ln 6 \cong 0{,}71670$ (c) $\beta = 2$
26. (a) $y = (6 + \beta)e^{-2t} - (4 + \beta)e^{-3t}$
(b) $t_m = \ln[(12 + 3\beta)/(12 + 2\beta)]$, $y_m = \frac{4}{27}(6 + \beta)^3/(4 + \beta)^2$
(c) $\beta = 6(1 + \sqrt{3}) \cong 16{,}3923$ (d) $t_m \to \ln(3/2)$, $y_m \to \infty$
27. (a) $y = d/c$
(b) $aY'' + bY' + cY = 0$
28. (a) $b > 0$ e $0 < c < b^2/4a$
(b) $c < 0$
(c) $b < 0$ e $0 < c < b^2/4a$

Seção 3.2

1. $-\frac{7}{2}e^{t/2}$
2. 1
3. e^{-4t}
4. x^2e^x
5. $-e^{2t}$
6. 0
7. $0 < t < \infty$
8. $-\infty < t < 1$
9. $0 < t < 4$
10. $0 < t < \infty$
11. $0 < x < 3$
12. $2 < x < 3\pi/2$
14. A equação é não-linear.
15. A equação é não-homogênea.
16. Não
17. $3te^{2t} + ce^{2t}$
18. $te^t + ct$
19. $5W(f, g)$

20. $-4(t\cos t - \operatorname{sen} t)$
21. $y_1(t) = \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^t, \quad y_2(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t$
22. $y_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-3(t-1)} + \frac{3}{2}e^{-(t-1)}, \quad y_2(t) = -\frac{1}{2}e^{-3(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-(t-1)}$
23. Sim
24. Sim
25. Sim
26. Sim
27. (b) Sim.
(c) $[y_1(t), y_3(t)]$ e $[y_1(t), y_4(t)]$ são conjuntos fundamentais de soluções; $[y_2(t), y_3(t)]$ e $[y_4(t), y_5(t)]$ não são.
29. Sim, $y = c_1 e^{-x^2/2}\int_{x_0}^{x} e^{t^2/2}\,dt + c_2 e^{-x^2/2}$
30. Não
31. Sim, $y = \dfrac{1}{\mu(x)}\left[c_1\int_{x_0}^{x}\dfrac{\mu(t)}{t}\,dt + c_2\right], \quad \mu(x) = \exp\left[-\int\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\cos x}{x}\right)dx\right]$
32. Sim, $y = c_1 x^{-1} + c_2 x$
34. $x^2\mu'' + 3x\mu' + (1 + x^2 - \nu^2)\mu = 0$
35. $(1 - x^2)\mu'' - 2x\mu' + \alpha(\alpha + 1)\mu = 0$
36. $\mu'' - x\mu = 0$
38. As equações de Legendre e de Airy são auto-adjuntas.

Seção 3.3

1. Independente.
2. Dependente.
3. Independente.
4. Dependente.
5. Dependente.
6. Independente.
7. Independente se a origem está no interior do intervalo; dependente, caso contrário.
8. Independente se a origem está no interior do intervalo; dependente, caso contrário.
9. Independente; W não é sempre nulo.
10. Independente; W não é sempre nulo.
11. $W(c_1y_1, c_2y_2) = c_1c_2W(y_1, y_2) \neq 0$
12. $W(y_3, y_4) = -2W(y_1, y_2)$
13. $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$
15. ct^2e^t
16. $c\cos t$
17. c/x
18. $c/(1 - x^2)$
20. $2/25$
21. $3\sqrt{e} \cong 4{,}946$
22. $p(t) = 0$ para todo t
26. Se t_0 é um ponto de inflexão e $y = \phi(t)$ é uma solução, então, da equação diferencial, temos $p(t_0)\phi'(t_0) + q(t_0)\phi(t_0) = 0$.

Seção 3.4

1. $e\cos 2 + ie\operatorname{sen} 2 \cong -1{,}1312 + 2{,}4717i$
2. $e^2\cos 3 - ie^2\operatorname{sen} 3 \cong -7{,}3151 - 1{,}0427i$
3. -1
4. $e^2\cos(\pi/2) - ie^2\operatorname{sen}(\pi/2) = -e^2 i \cong -7{,}3891i$
5. $2\cos(\ln 2) - 2i\operatorname{sen}(\ln 2) \cong 1{,}5385 - 1{,}2779i$
6. $\pi^{-1}\cos(2\ln\pi) + i\pi^{-1}\operatorname{sen}(2\ln\pi) \cong -0{,}20957 + 0{,}23959i$
7. $y = c_1e^t\cos t + c_2e^t\operatorname{sen} t$
8. $y = c_1e^t\cos\sqrt{5}\,t + c_2e^t\operatorname{sen}\sqrt{5}\,t$
9. $y = c_1e^{2t} + c_2e^{-4t}$
10. $y = c_1e^{-t}\cos t + c_2e^{-t}\operatorname{sen} t$
11. $y = c_1e^{-3t}\cos 2t + c_2e^{-3t}\operatorname{sen} 2t$
12. $y = c_1\cos(3t/2) + c_2\operatorname{sen}(3t/2)$
13. $y = c_1e^{-t}\cos(t/2) + c_2e^{-t}\operatorname{sen}(t/2)$
14. $y = c_1e^{t/3} + c_2e^{-4t/3}$
15. $y = c_1e^{-t/2}\cos t + c_2e^{-t/2}\operatorname{sen} t$
16. $y = c_1e^{-2t}\cos(3t/2) + c_2e^{-2t}\operatorname{sen}(3t/2)$
17. $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$; oscilação regular
18. $y = e^{-2t}\cos t + 2e^{-2t}\operatorname{sen} t$; oscilação decaindo
19. $y = -e^{t-\pi/2}\operatorname{sen} 2t$; oscilação crescente
20. $y = (1 + 2\sqrt{3})\cos t - (2 - \sqrt{3})\operatorname{sen} t$; oscilação regular
21. $y = 3e^{-t/2}\cos t + \frac{5}{2}e^{-t/2}\operatorname{sen} t$; oscilação decaindo
22. $y = \sqrt{2}e^{-(t-\pi/4)}\cos t + \sqrt{2}e^{-(t-\pi/4)}\operatorname{sen} t$; oscilação decaindo
23. (a) $u = 2e^{t/6}\cos(\sqrt{23}\,t/6) - (2/\sqrt{23})e^{t/6}\operatorname{sen}(\sqrt{23}\,t/6)$
(b) $t = 10{,}7598$
24. (a) $u = 2e^{-t/5}\cos(\sqrt{34}\,t/5) + (7/\sqrt{34})\,e^{-t/5}\operatorname{sen}(\sqrt{34}\,t/5)$
(b) $T = 14{,}5115$
25. (a) $y = 2e^{-t}\cos\sqrt{5}\,t + [(\alpha + 2)/\sqrt{5}]\,e^{-t}\operatorname{sen}\sqrt{5}\,t$ (b) $\alpha = 1{,}50878$
(c) $t = \{\pi - \operatorname{arctg}[2\sqrt{5}/(2 + \alpha)]\}/\sqrt{5}$ (d) $\pi/\sqrt{5}$
26. (a) $y = e^{-at}\cos t + ae^{-at}\operatorname{sen} t$ (b) $T = 1{,}8763$
(c) $\alpha = \frac{1}{4},\ T = 7{,}4284;\quad \alpha = \frac{1}{2},\ T = 4{,}3003;\quad \alpha = 2,\ T = 1{,}5116$
35. Sim, $y = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x, \quad x = \int e^{-t^2/2}\,dt$

36. Não
37. Sim, $y = c_1 e^{-t^2/4}\cos(\sqrt{3}\,t^2/4) + c_2 e^{-t^2/4}\operatorname{sen}(\sqrt{3}\,t^2/4)$
39. $y = c_1\cos(\ln t) + c_2\operatorname{sen}(\ln t)$
40. $y = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2}$
41. $y = c_1 t^{-1}\cos(\frac{1}{2}\ln t) + c_2 t^{-1}\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\ln t)$
42. $y = c_1 t^6 + c_2 t^{-1}$

Seção 3.5

1. $y = c_1 e^t + c_2 t e^t$
2. $y = c_1 e^{-t/3} + c_2 t e^{-t/3}$
3. $y = c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{3t/2}$
4. $y = c_1 e^{-3t/2} + c_2 t e^{-3t/2}$
5. $y = c_1 e^t\cos 3t + c_2 e^t\operatorname{sen}3t$
6. $y = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$
7. $y = c_1 e^{-t/4} + c_2 e^{-4t}$
8. $y = c_1 e^{-3t/4} + c_2 t e^{-3t/4}$
9. $y = c_1 e^{2t/5} + c_2 t e^{2t/5}$
10. $y = e^{-t/2}\cos(t/2) + c_2 e^{-t/2}\operatorname{sen}(t/2)$
11. $y = 2e^{2t/3} - \frac{7}{3}te^{2t/3}$, $y \to -\infty$ quando $t \to \infty$
12. $y = 2te^{3t}$, $y \to \infty$ quando $t \to \infty$
13. $y = -e^{-t/3}\cos 3t + \frac{5}{9}e^{-t/3}\operatorname{sen}3t$, $y \to 0$ quando $t \to \infty$
14. $y = 7e^{-2(t+1)} + 5te^{-2(t+1)}$, $y \to 0$ quando $t \to \infty$
15. (a) $y = e^{-3t/2} - \frac{5}{2}te^{-3t/2}$ (b) $t = \frac{2}{5}$
    (c) $t_0 = 16/15$, $y_0 = -\frac{5}{3}e^{-8/5} \cong -0{,}33649$
    (d) $y = e^{-3t/2} + (b + \frac{3}{2})te^{-3t/2}$; $b = -\frac{3}{2}$
16. $y = 2e^{t/2} + (b-1)te^{t/2}$; $b = 1$
17. (a) $y = e^{-t/2} + \frac{5}{2}te^{-t/2}$ (b) $t_0 = \frac{8}{5}$, $y_0 = 5e^{-4/5} \cong 2{,}24664$
    (c) $y = e^{-t/2} + (b + \frac{1}{2})te^{-t/2}$
    (d) $t_M = 4b/(1+2b) \to 2$ quando $b \to \infty$; $y_M = (1+2b)\exp[-2b/(1+2b)]$ $\to \infty$ quando $b \to \infty$
18. (a) $y = ae^{-2t/3} + (\frac{2}{3}a - 1)te^{-2t/3}$ (b) $a = \frac{3}{2}$
23. $y_2(t) = t^3$
24. $y_2(t) = t^{-2}$
25. $y_2(t) = t^{-1}\ln t$
26. $y_2(t) = te^t$
27. $y_2(x) = \cos x^2$
28. $y_2(x) = x$
29. $y_2(x) = x^{1/4}e^{-2\sqrt{x}}$
30. $y_2(x) = x^{-1/2}\cos x$
32. $y = c_1 e^{-\delta x^2/2}\int_0^x e^{\delta s^2/2}\,ds + c_2 e^{-\delta x^2/2}$
33. $y_2(t) = y_1(t)\int_{t_0}^t y_1^{-2}(s)\exp\left[-\int_{s_0}^s p(r)\,dr\right] ds$
34. $y_2(t) = t^{-1}\ln t$
35. $y_2(t) = \cos t^2$
36. $y_2(x) = x$
37. $y_2(x) = x^{-1/2}\cos x$
39. (b) $y_0 + (a/b)y_0'$
41. $y = c_1 t^2 + c_2 t^2\ln t$
42. $y = c_1 t^{-1/2} + c_2 t^{-1/2}\ln t$

Seção 3.6

1. $y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - e^{2t}$
2. $y = c_1 e^{-t}\cos 2t + c_2 e^{-t}\operatorname{sen}2t + \frac{3}{17}\operatorname{sen}2t - \frac{12}{17}\cos 2t$
3. $y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} + \frac{3}{16}te^{-t} + \frac{3}{8}t^2 e^{-t}$
4. $y = c_1 + c_2 e^{-2t} + \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2t - \frac{1}{2}\cos 2t$
5. $y = c_1\cos 3t + c_2\operatorname{sen}3t + \frac{1}{162}(9t^2 - 6t + 1)e^{3t} + \frac{2}{3}$
6. $y = c_1 e^{-t} + c_2 te^{-t} + t^2 e^{-t}$
7. $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t/2} + t^2 - 6t + 14 - \frac{3}{10}\operatorname{sen}t - \frac{9}{10}\cos t$
8. $y = c_1\cos t + c_2\operatorname{sen}t - \frac{1}{3}t\cos 2t - \frac{5}{9}\operatorname{sen}2t$
9. $u = c_1\cos\omega_0 t + c_2\operatorname{sen}\omega_0 t + (\omega_0^2 - \omega^2)^{-1}\cos\omega t$
10. $u = c_1\cos\omega_0 t + c_2\operatorname{sen}\omega_0 t + (1/2\omega_0)t\operatorname{sen}\omega_0 t$
11. $y = c_1 e^{-t/2}\cos(\sqrt{15}\,t/2) + c_2 e^{-t/2}\operatorname{sen}(\sqrt{15}\,t/2) + \frac{1}{6}e^t - \frac{1}{4}e^{-t}$
12. $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + \frac{1}{6}te^{2t} + \frac{1}{8}e^{-2t}$
13. $y = e^t - \frac{1}{2}e^{-2t} - t - \frac{1}{2}$
14. $y = \frac{7}{10}\operatorname{sen}2t - \frac{19}{40}\cos 2t + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^t$
15. $y = 4te^t - 3e^t + \frac{1}{6}t^3 e^t + 4$
16. $y = e^{3t} + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{2t} - te^{2t}$
17. $y = 2\cos 2t - \frac{1}{8}\operatorname{sen}2t - \frac{3}{4}t\cos 2t$
18. $y = e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen}2t + te^{-t}\operatorname{sen}2t$
19. (a) $Y(t) = t(A_0 t^4 + A_1 t^3 + A_2 t^2 + A_3 t + A_4) + t(B_0 t^2 + B_1 t + B_2)e^{-3t}$ $+ D\operatorname{sen}3t + E\cos 3t$
    (b) $A_0 = 2/15$, $A_1 = -2/9$, $A_2 = 8/27$, $A_3 = -8/27$, $A_4 = 16/81$, $B_0 = -1/9$, $B_1 = -1/9$, $B_2 = -2/27$, $D = -1/18$, $E = -1/18$

20. (a) $Y(t) = A_0 t + A_1 + t(B_0 t + B_1)\operatorname{sen} t + t(D_0 t + D_1)\cos t$
(b) $A_0 = 1,\ A_1 = 0,\ B_0 = 0,\ B_1 = 1/4,\ D_0 = -1/4,\ D_1 = 0$
21. (a) $Y(t) = e^t(A\cos 2t + B\operatorname{sen} 2t) + (D_0 t + D_1)e^{2t}\operatorname{sen} t + (E_0 t + E_1)e^{2t}\cos t$
(b) $A = -1/20,\ B = -3/20,\ D_0 = -3/2,\ D_1 = -5,\ E_0 = 3/2,\ E_1 = 1/2$
22. (a) $Y(t) = Ae^{-t} + t(B_0 t^2 + B_1 t + B_2)e^{-t}\cos t + t(D_0 t^2 + D_1 t + D_2)e^{-t}\operatorname{sen} t$
(b) $A = 3,\ B_0 = -2/3,\ B_1 = 0,\ B_2 = 1,\ D_0 = 0,\ D_1 = 1,\ D_2 = 1$
23. (a) $Y(t) = A_0 t^2 + A_1 t + A_2 + t^2(B_0 t + B_1)e^{2t} + (D_0 t + D_1)\operatorname{sen} 2t + (E_0 t + E_1)\cos 2t$
(b) $A_0 = 1/2,\ A_1 = 1,\ A_2 = 3/4,\ B_0 = 2/3,\ B_1 = 0,\ D_0 = 0,\ D_1 = -1/16,$
$E_0 = 1/8,\ E_1 = 1/16$
24. (a) $Y(t) = t(A_0 t^2 + A_1 t + A_2)\operatorname{sen} 2t + t(B_0 t^2 + B_1 t + B_2)\cos 2t$
(b) $A_0 = 0,\ A_1 = 13/16,\ A_2 = 7/4,\ B_0 = -1/12,\ B_1 = 0,\ B_2 = 13/32$
25. (a) $Y(t) = (A_0 t^2 + A_1 t + A_2)e^t\operatorname{sen} 2t + (B_0 t^2 + B_1 t + B_2)e^t\cos 2t$
$+ e^{-t}(D\cos t + E\operatorname{sen} t) + Fe^t$
(b) $A_0 = 1/52,\ A_1 = 10/169,\ A_2 = -1233/35152,\ B_0 = -5/52,\ B_1 = 73/676,$
$B_2 = -4105/35152,\ D = -3/2,\ E = 3/2,\ F = 2/3$
26. (a) $Y(t) = t(A_0 t + A_1)e^{-t}\cos 2t + t(B_0 t + B_1)e^{-t}\operatorname{sen} 2t$
$+ (D_0 t + D_1)e^{-2t}\cos t + (E_0 t + E_1)e^{-2t}\operatorname{sen} t$
(b) $A_0 = 0,\ A_1 = 3/16,\ B_0 = 3/8,\ B_1 = 0,\ D_0 = -2/5,\ D_1 = -7/25,\ E_0 = 1/5,$
$E_1 = 1/25$
27. (b) $w = -\frac{2}{5} + c_1 e^{5t}$
28. $y = c_1\cos\lambda t + c_2\operatorname{sen}\lambda t + \sum_{m=1}^{N}[a_m/(\lambda^2 - m^2\pi^2)]\operatorname{sen} m\pi t$
29. $y = \begin{cases} t, & 0 \le t \le \pi \\ -(1 + \pi/2)\operatorname{sen} t - (\pi/2)\cos t + (\pi/2)e^{\pi - t}, & t > \pi \end{cases}$
30. $y = \begin{cases} \frac{1}{5} - \frac{1}{10}e^{-t}\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{5}e^{-t}\cos 2t, & 0 \le t \le \pi/2 \\ -\frac{1}{5}(1 + e^{\pi/2})e^{-t}\cos 2t - \frac{1}{10}(1 + e^{\pi/2})e^{-t}\operatorname{sen} 2t, & t > \pi/2 \end{cases}$
31. Não
34. $y = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2}e^{2t}$

Seção 3.7

1. $Y(t) = e^t$
2. $Y(t) = -\frac{2}{3}te^{-t}$
3. $Y(t) = \frac{3}{2}t^2 e^{-t}$
4. $Y(t) = 2t^2 e^{t/2}$
5. $y = c_1\cos t + c_2\operatorname{sen} t - (\cos t)\ln(\operatorname{tg} t + st)$
6. $y = c_1\cos 3t + c_2\operatorname{sen} 3t + (\operatorname{sen} 3t)\ln(\operatorname{tg} 3t + \sec 3t) - 1$
7. $y = c_1 e^{-2t} + c_2 te^{-2t} - e^{-2t}\ln t$
8. $y = c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t + \frac{3}{4}(\operatorname{sen} 2t)\ln\operatorname{sen} 2t - \frac{3}{2}t\cos 2t$
9. $y = c_1\cos(t/2) + c_2\operatorname{sen}(t/2) + t\operatorname{sen}(t/2) + 2[\ln\cos(t/2)]\cos(t/2)$
10. $y = c_1 e^t + c_2 te^t - \frac{1}{2}e^t\ln(1 + t^2) + te^t\operatorname{arctg} t$
11. $y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + \int[e^{3(t-s)} - e^{2(t-s)}]g(s)\,ds$
12. $y = c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{2}\int[\operatorname{sen} 2(t - s)]g(s)\,ds$
13. $Y(t) = \frac{1}{2} + t^2\ln t$
14. $Y(t) = -2t^2$
15. $Y(t) = \frac{1}{2}(t - 1)e^{2t}$
16. $Y(t) = -\frac{1}{2}(2t - 1)e^{-t}$
17. $Y(x) = \frac{1}{6}x^2(\ln x)^3$
18. $Y(x) = -\frac{3}{2}x^{1/2}\cos x$
19. $Y(x) = \int\frac{xe^t - te^x}{(1 - t)^2 e^t}g(t)\,dt$
20. $Y(x) = x^{-1/2}\int t^{-3/2}\operatorname{sen}(x - t)g(t)\,dt$
23. (b) $y = y_0\cos t + y_0'\operatorname{sen} t + \int_{t_0}^{t}\operatorname{sen}(t - s)g(s)\,ds$
24. $y = (b - a)^{-1}\int_{t_0}^{t}[e^{b(t-s)} - e^{a(t-s)}]g(s)\,ds$
25. $y = \mu^{-1}\int_{t_0}^{t}e^{\lambda(t-s)}\operatorname{sen}\mu(t - s)g(s)\,ds$
26. $y = \int_{t_0}^{t}(t - s)e^{a(t-s)}g(s)\,ds$
29. $y = c_1 t + c_2 t^2 + 4t^2\ln t$
30. $y = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-5} + \frac{1}{12}t$
31. $y = c_1(1 + t) + c_2 e^t + \frac{1}{2}(t - 1)e^{2t}$
32. $y = c_1 e^t + c_2 t - \frac{1}{2}(2t - 1)e^{-t}$

Seção 3.8

1. $u = 5\cos(2t - \delta)$, $\delta = \text{arctg}(4/3) \cong 0{,}9273$
2. $u = 2\cos(t - 2\pi/3)$
3. $u = 2\sqrt{5}\cos(3t - \delta)$, $\delta = -\text{arctg}(1/2) \cong -0{,}4636$
4. $u = \sqrt{13}\cos(\pi t - \delta)$, $\delta = \pi + \text{arctg}(3/2) \cong 4{,}1244$
5. $u = \frac{1}{4}\cos 8t$ ft, t em s; $\omega = 8$ rad/s, $T = \pi/4$ s, $R = 1/4$ ft
6. $u = \frac{5}{7}\,\text{sen}\,14t$ cm, t em s; $t = \pi/14$ s
7. $u = (1/4\sqrt{2})\text{sen}(8\sqrt{2}\,t) - \frac{1}{12}\cos(8\sqrt{2}\,t)$ ft, t em s; $\omega = 8\sqrt{2}$ rad/s,
   $T = \pi/4\sqrt{2}$ s, $R = \sqrt{11/288} \cong 0{,}1954$ ft, $\delta = \pi - \text{arctg}(3/\sqrt{2}) \cong 2{,}0113$
8. $Q = 10^{-6}\cos 2000t$ coulombs, t em s
9. $u = e^{-10t}[2\cos(4\sqrt{6}\,t) + (5/\sqrt{6})\text{sen}(4\sqrt{6}\,t)]$ cm, t em s;
   $\mu = 4\sqrt{6}$ rad/s, $T_d = \pi/2\sqrt{6}$ s, $T_d/T = 7/2\sqrt{6} \cong 1{,}4289$, $\tau \cong 0{,}4045$ s
10. $u = (1/8\sqrt{31})e^{-2t}\text{sen}(2\sqrt{31}\,t)$ ft, t em s; $t = \pi/2\sqrt{31}$ s, $\tau \cong 1{,}5927$ s
11. $u \cong 0{,}057198e^{-0{,}15t}\cos(3{,}87008\,t - 0{,}50709)$ m, t em s; $\mu = 3{,}87008$ rad/s,
   $\mu/\omega_0 = 3{,}87008/\sqrt{15} \cong 0{,}99925$
12. $Q = 10^{-6}(2e^{-500t} - e^{-1000t})$ coulombs; t em s
13. $\gamma = \sqrt{20/9} \cong 1{,}4907$
16. $r = \sqrt{A^2 + B^2}$, $r\cos\theta = B$, $r\,\text{sen}\theta = -A$; $R = r$; $\delta = \theta + (4n+1)\pi/2$,
   $n = 0, 1, 2, \ldots$
17. $\gamma = 8$ lb-s/ft
18. $R = 10^3$ ohms
20. $v_0 < -\gamma u_0/2m$
22. $2\pi/\sqrt{31}$
23. $\gamma = 5$ lb-s/ft
24. $k = 6$, $v = \pm 2\sqrt{5}$
25. (a) $\tau \cong 41{,}715$ (d) $\gamma_0 \cong 1{,}73$, $\min \tau \cong 4{,}87$
   (e) $\tau = (2/\gamma)\ln(400/\sqrt{4 - \gamma^2})$
26. (a) $u(t) = e^{-\gamma t/2m}\left[u_0\sqrt{4km - \gamma^2}\cos\mu t + (2mv_0 + \gamma u_0)\,\text{sen}\,\mu t\right]/\sqrt{4km - \gamma^2}$
   (b) $R^2 = 4m(ku_0^2 + \gamma u_0 v_0 + mv_0^2)/(4km - \gamma^2)$
27. $\rho l u'' + \rho_0 g u = 0$, $T = 2\pi\sqrt{\rho l/\rho_0 g}$
28. (a) $u = \sqrt{2}\,\text{sen}\sqrt{2}\,t$ (c) sentido horário
29. (a) $u = (16/\sqrt{127})e^{-t/8}\text{sen}(\sqrt{127}\,t/8)$ (c) sentido horário
30. (b) $u = a\cos(\sqrt{k/m}\,t) + b\sqrt{m/k}\,\text{sen}(\sqrt{k/m}\,t)$
32. (b) $u = \text{sen}\,t$, $A = 1$, $T = 2\pi$ (c) $A = 0{,}98$, $T = 6{,}07$
   (d) $\epsilon = 0{,}2$, $A = 0{,}96$, $T = 5{,}90$; $\epsilon = 0{,}3$, $A = 0{,}94$, $T = 5{,}74$
   (f) $\epsilon = -0{,}1$, $A = 1{,}03$, $T = 6{,}55$; $\epsilon = -0{,}2$, $A = 1{,}06$, $T = 6{,}90$;
   $\epsilon = -0{,}3$, $A = 1{,}11$, $T = 7{,}41$

Seção 3.9

1. $-2\,\text{sen}\,8t\,\text{sen}\,t$
2. $2\text{sen}(t/2)\cos(13t/2)$
3. $2\cos(3\pi t/2)\cos(\pi t/2)$
4. $2\text{sen}(7t/2)\cos(t/2)$
5. $u'' + 256u = 16\cos 3t$, $u(0) = \frac{1}{6}$, $u'(0) = 0$, u em pés, t em s
6. $u'' + 10u' + 98u = 2\text{sen}(t/2)$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 0{,}03$, u em m, t em s
7. (a) $u = \frac{151}{1482}\cos 16t + \frac{16}{247}\cos 3t$ (c) $\omega = 16$ rad/s
8. (a) $u = \frac{1}{153.281}[160e^{-5t}\cos(\sqrt{73}\,t) + \frac{383.443}{7300}e^{-5t}\text{sen}(\sqrt{73}\,t) - 160\cos(t/2) + 3128\text{sen}(t/2)$
   (b) Os dois primeiros termos são transientes. (d) $\omega = 4\sqrt{3}$ rad/s
9. $u = \frac{64}{45}(\cos 7t - \cos 8t) = \frac{128}{45}\text{sen}(t/2)\text{sen}(15t/2)$ ft, t em s
10. $u = (\cos 8t + \text{sen}\,8t - 8t\cos 8t)/4$ ft, t em s; $1/8$, $\pi/8$, $\pi/4$, $3\pi/8$ s
11. (a) $\frac{8}{901}(30\cos 2t + \text{sen}\,2t)$ ft, t em s (b) $m = 4$ slugs ($\cong 58{,}36$ kg)
12. $u = (\sqrt{2}/6)\cos(3t - 3\pi/4)$ m, t em s
15. $u = \begin{cases} F_0(t - \text{sen}\,t), & 0 \le t \le \pi \\ F_0[(2\pi - t) - 3\,\text{sen}\,t], & \pi < t \le 2\pi \\ -4F_0\,\text{sen}\,t, & 2\pi < t < \infty \end{cases}$
16. $Q(t) = 10^{-6}(e^{-4000t} - 4e^{-1000t} + 3)$ coulombs, t em s, $Q(0{,}001) \cong 1{,}5468 \times 10^{-6}$;
   $Q(0{,}01) \cong 2{,}9998 \times 10^{-6}$; $Q(t) \to 3 \times 10^{-6}$ quando $t \to \infty$
17. (a) $u = [32(2 - \omega^2)\cos\omega t + 8\omega\,\text{sen}\,\omega t]/(64 - 63\omega^2 + 16\omega^4)$
   (b) $A = 8/\sqrt{64 - 63\omega^2 + 16\omega^4}$ (d) $\omega = 3\sqrt{14}/8 \cong 1{,}4031$,
   $A = 64/\sqrt{127} \cong 5{,}6791$

18. (a) $u = 3(\cos t - \cos \omega t)/(\omega^2 - 1)$
19. (a) $u = [(\omega^2 + 2)\cos t - 3\cos \omega t]/(\omega^2 - 1) + \operatorname{sen} t$

CAPÍTULO 4 Seção 4.1

1. $-\infty < t < \infty$
2. $t > 0$ ou $t < 0$
3. $t > 1$, ou $0 < t < 1$, ou $t < 0$
4. $t > 0$
5. $\ldots, -3\pi/2 < x < -\pi/2, \quad -\pi/2 < x < 1, \quad 1 < x < \pi/2, \quad \pi/2 < x < 3\pi/2, \ldots$
6. $-\infty < x < -2, \quad -2 < x < 2, \quad 2 < x < \infty$
7. Linearmente independentes.
8. Linearmente dependentes; $f_1(t) + 3f_2(t) - 2f_3(t) = 0$.
9. Linearmente dependentes; $2f_1(t) + 13f_2(t) - 3f_3(t) - 7f_4(t) = 0$.
10. Linearmente independentes.
11. 1
12. 1
13. $-6e^{-2t}$
14. e^{-2t}
15. $6x$
16. $6/x$
17. $\operatorname{sen}^2 t = \frac{1}{10}(5) - \frac{1}{2}\cos 2t$
19. (a) $a_0[n(n-1)(n-2)\cdots 1] + a_1[n(n-1)\cdots 2]t + \cdots + a_n t^n$
    (b) $(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n)e^{rt}$
    (c) $e^t, e^{-t}, e^{2t}, e^{-2t}$; sim, $W(e^t, e^{-t}, e^{2t}, e^{-2t}) \neq 0, \ -\infty < t < \infty$
21. $W = ce^{-2t}$
22. $W = c$
23. $W = c/t^2$
24. $W = c/t$
27. $y = c_1 e^t + c_2 t + c_3 t e^t$
28. $y = c_1 t^2 + c_2 t^3 + c_3(t+1)$

Seção 4.2

1. $\sqrt{2}\, e^{i[(\pi/4)+2m\pi]}$
2. $2e^{i[(2\pi/3)+2m\pi]}$
3. $3e^{i(\pi+2m\pi)}$
4. $e^{i[(3\pi/2)+2m\pi]}$
5. $2e^{i[(11\pi/6)+2m\pi]}$
6. $\sqrt{2}e^{i[(5\pi/4)+2m\pi]}$
7. $1, \ \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}), \ \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})$
8. $2^{1/4}e^{-\pi i/8}, \ 2^{1/4}e^{7\pi i/8}$
9. $1, \ i, \ -1, \ -i$
10. $(\sqrt{3}+i)/\sqrt{2}, \ -(\sqrt{3}+i)/\sqrt{2}$
11. $y = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t}$
12. $y = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t$
13. $y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t}$
14. $y = c_1 + c_2 t + c_3 e^{2t} + c_4 t e^{2t}$
15. $y = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + e^{\sqrt{3}t/2}(c_3 \cos \frac{1}{2}t + c_4 \operatorname{sen} \frac{1}{2}t) + e^{-\sqrt{3}t/2}(c_5 \cos \frac{1}{2}t + c_6 \operatorname{sen} \frac{1}{2}t)$
16. $y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} + c_4 e^{-2t}$
17. $y = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t + c_4 e^{-t} + c_5 t e^{-t} + c_6 t^2 e^{-t}$
18. $y = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 e^{-t} + c_5 \cos t + c_6 \operatorname{sen} t$
19. $y = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{2t} + c_4 \cos t + c_5 \operatorname{sen} t$
20. $y = c_1 + c_2 e^{2t} + e^{-t}(c_3 \cos \sqrt{3}t + c_4 \operatorname{sen} \sqrt{3}t)$
21. $y = e^t[(c_1 + c_2 t)\cos t + (c_3 + c_4 t)\operatorname{sen} t] + e^{-t}[(c_5 + c_6 t)\cos t + (c_7 + c_8 t)\operatorname{sen} t]$
22. $y = (c_1 + c_2 t)\cos t + (c_3 + c_4 t)\operatorname{sen} t$
23. $y = c_1 e^t + c_2 e^{(2+\sqrt{5})t} + c_3 e^{(2-\sqrt{5})t}$
24. $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{(-2+\sqrt{2})t} + c_3 e^{(-2-\sqrt{2})t}$
25. $y = c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{-t/3}\cos(t/\sqrt{3}) + c_3 e^{-t/3}\operatorname{sen}(t/\sqrt{3})$
26. $y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{(3+\sqrt{3})t} + c_4 e^{(3-\sqrt{3})t}$
27. $y = c_1 e^{-t/3} + c_2 e^{-t/4} + c_3 e^{-t}\cos 2t + c_4 e^{-t}\operatorname{sen} 2t$
28. $y = c_1 e^{-t}\cos t + c_2 e^{-t}\operatorname{sen} t + c_3 e^{-2t}\cos(\sqrt{3}t) + c_4 e^{-2t}\operatorname{sen}(\sqrt{3}t)$
29. $y = 2 - 2\cos t + \operatorname{sen} t$
30. $y = \frac{1}{2}e^{-t/\sqrt{2}}\operatorname{sen}(t/\sqrt{2}) - \frac{1}{2}e^{t/\sqrt{2}}\operatorname{sen}(t/\sqrt{2})$
31. $y = 2t - 3$
32. $y = 2\cos t - \operatorname{sen} t$
33. $y = -\frac{2}{3}e^t - \frac{1}{10}e^{2t} - \frac{1}{6}e^{-2t} - \frac{16}{15}e^{-t/2}$
34. $y = \frac{2}{13}e^{-t} + \frac{24}{13}e^{t/2}\cos t + \frac{3}{13}e^{t/2}\operatorname{sen} t$
35. $y = 8 - 18e^{-t/3} + 8e^{-t/2}$
36. $y = \frac{21}{13}e^{-t}\cos t - \frac{38}{13}e^{-t}\operatorname{sen} t - \frac{8}{13}e^{-2t}\cos(\sqrt{3}t) + \dfrac{17\sqrt{3}}{39}e^{-2t}\operatorname{sen}(\sqrt{3}t)$
37. $y = \frac{1}{2}(\cosh t - \cos t) + \frac{1}{2}(\operatorname{senh} t - \operatorname{sen} t)$
38. (a) $W = c$, uma constante (b) $W = -8$ (c) $W = 4$
39. (b) $u_1 = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + c_3 \cos \sqrt{6}t + c_4 \operatorname{sen} \sqrt{6}t$

Seção 4.3

1. $y = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} + 3$
2. $y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \operatorname{sen} t - 3t - \frac{1}{4}t \operatorname{sen} t$

3. $y = c_1e^{-t} + c_2 \cos t + c_3 \operatorname{sen} t + \frac{1}{2}te^{-t} + 4(t-1)$
4. $y = c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t} + \cos t$
5. $y = c_1 + c_2t + c_3e^{-2t} + c_4e^{2t} - \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{48}t^4 - \frac{1}{16}t^2$
6. $y = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + c_3t \cos t + c_4t \operatorname{sen} t + 3 + \frac{1}{9}\cos 2t$
7. $y = c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4e^{-t} + e^{t/2}[c_5 \cos(\sqrt{3}\,t/2) + c_6 \operatorname{sen}(\sqrt{3}\,t/2)] + \frac{1}{24}t^4$
8. $y = c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4e^{-t} + \frac{1}{20}\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{40}\cos 2t$
9. $y = \frac{3}{16}(1 - \cos 2t) + \frac{1}{8}t^2$
10. $y = (t-4)\cos t - (\frac{3}{2}t + 4)\operatorname{sen} t + 3t + 4$
11. $y = 1 + \frac{1}{4}(t^2 + 3t) - te^t$
12. $y = -\frac{2}{5}\cos t - \frac{4}{5}\operatorname{sen} t + \frac{1}{20}e^{-t} + \frac{81}{40}e^t + \frac{73}{520}e^{-3t} + \frac{77}{65}\cos 2t - \frac{49}{130}\operatorname{sen} 2t$
13. $Y(t) = t(A_0t^3 + A_1t^2 + A_2t + A_3) + Bt^2e^t$
14. $Y(t) = t(A_0t + A_1)e^{-t} + B\cos t + C \operatorname{sen} t$
15. $Y(t) = At^2e^t + B\cos t + C\operatorname{sen} t$
16. $Y(t) = At^2 + (B_0t + B_1)e^t + t(C\cos 2t + D\operatorname{sen} 2t)$
17. $Y(t) = t(A_0t^2 + A_1t + A_2) + (B_0t + B_1)\cos t + (C_0t + C_1)\operatorname{sen} t$
18. $Y(t) = Ae^t + (B_0t + B_1)e^{-t} + te^{-t}(C\cos t + D\operatorname{sen} t)$
19. $k_0 = a_0, \quad k_n = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n$

Seção 4.4

1. $y = c_1 + c_2 \cos t + c_3 \operatorname{sen} t - \ln \cos t - (\operatorname{sen} t)\ln(\operatorname{s} t + \operatorname{tg} t)$
2. $y = c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t} - \frac{1}{2}t^2$
3. $y = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{2t} + \frac{1}{30}e^{4t}$
4. $y = c_1 + c_2 \cos t + c_3 \operatorname{sen} t + \ln(\operatorname{s} t + \operatorname{tg} t) - t\cos t + (\operatorname{sen} t)\ln \cos t$
5. $y = c_1e^t + c_2\cos t + c_3 \operatorname{sen} t - \frac{1}{5}e^{-t}\cos t$
6. $y = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + c_3t\cos t + c_4t\operatorname{sen} t - \frac{1}{8}t^2 \operatorname{sen} t$
7. $y = c_1e^t + c_2\cos t + c_3\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}(\cos t)\ln\cos t + \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t)\ln\cos t - \frac{1}{2}t\cos t - \frac{1}{2}t\operatorname{sen} t$
   $+ \frac{1}{2}e^t \int_{t_0}^{t} \left(e^{-s}/\cos s\right) ds$
8. $y = c_1 + c_2e^t + c_3e^{-t} - \ln \operatorname{sen} t + \ln(\cos t + 1) + \frac{1}{2}e^t \int_{t_0}^{t} \left(e^{-s}/\operatorname{sen} s\right) ds$
   $+ \frac{1}{2}e^{-t} \int_{t_0}^{t} \left(e^{s}/\operatorname{sen} s\right) ds$
9. $c_1 = 0,\ c_2 = 2,\ c_3 = 1$ na resposta do Problema 4
10. $c_1 = 2,\ c_2 = \frac{7}{8},\ c_3 = -\frac{7}{8},\ c_4 = \frac{1}{2}$ na resposta do Problema 6
11. $c_1 = \frac{3}{2},\ c_2 = \frac{1}{2},\ c_3 = -\frac{5}{2},\ t_0 = 0$ na resposta do Problema 7
12. $c_1 = 3,\ c_2 = 0,\ c_3 = -e^{\pi/2},\ t_0 = \pi/2$ na resposta do Problema 8
13. $Y(x) = x^4/15$
14. $Y(t) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} [e^{t-s} - \operatorname{sen}(t-s) - \cos(t-s)]g(s)\, ds$
15. $Y(t) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} [\operatorname{senh}(t-s) - \operatorname{sen}(t-s)]g(s)\, ds$
16. $Y(t) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)}(t-s)^2 g(s)\, ds; \quad Y(t) = -te^t \ln|t|$
17. $Y(x) = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} [(x/t^2) - 2(x^2/t^3) + (x^3/t^4)]g(t)\, dt$

CAPÍTULO 5 Seção 5.1

1. $\rho = 1$
2. $\rho = 2$
3. $\rho = \infty$
4. $\rho = \frac{1}{2}$
5. $\rho = \frac{1}{2}$
6. $\rho = 1$
7. $\rho = 3$
8. $\rho = e$
9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \rho = \infty$
10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \rho = \infty$
11. $1 + (x-1), \quad \rho = \infty$
12. $1 - 2(x+1) + (x+1)^2, \quad \rho = \infty$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}, \quad \rho = 1$

14. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad \rho = 1$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \rho = 1$

16. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-2)^n, \quad \rho = 1$

17. $y' = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \cdots + (n+1)^2x^n + \cdots$
$y'' = 2^2 + 3^2 \cdot 2x + 4^2 \cdot 3x^2 + 5^2 \cdot 4x^3 + \cdots + (n+2)^2(n+1)x^n + \cdots$

18. $y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + \cdots$
$= \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$
$y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \cdots + (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \cdots$
$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$

21. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$

22. $\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$

23. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^n$

24. $\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n]x^n$

25. $\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n]x^n$

26. $a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_{n+1} + a_{n-1}]x^n$

27. $\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)na_{n+1} + a_n]x^n$

28. $a_n = (-2)^n a_0/n!, \quad n = 1, 2, \ldots; \quad a_0 e^{-2x}$

Seção 5.2

1. $a_{n+2} = a_n/(n+2)(n+1)$
$y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh x$
$y_2(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{senh} x$

2. $a_{n+2} = a_n/(n+2)$
$y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}$
$y_2(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3\cdot 5} + \frac{x^7}{3\cdot 5\cdot 7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n n! x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

3. $(n+2)a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$
$y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-1)^4 + \cdots$
$y_2(x) = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots$

4. $a_{n+4} = -k^2a_n/(n+4)(n+3); \quad a_2 = a_3 = 0$
$y_1(x) = 1 - \frac{k^2x^4}{3\cdot 4} + \frac{k^4x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} - \frac{k^6x^{12}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12} + \cdots$
$= 1 + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}(k^2x^4)^{m+1}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdots(4m+3)(4m+4)}$
$y_2(x) = x - \frac{k^2x^5}{4\cdot 5} + \frac{k^4x^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} - \frac{k^6x^{13}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13} + \cdots$
$= x\left[1 + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}(k^2x^4)^{m+1}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdots(4m+4)(4m+5)}\right]$

Sugestão: Faça $n = 4m$ na relação de recorrência, $m = 1, 2, 3, \ldots$.

5. $(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n+1)a_{n+1} + a_n = 0, \quad n \geq 1; \quad a_2 = -\frac{1}{2}a_0$
$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \cdots, \quad y_2(x) = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{24}x^5 + \cdots$

6. $a_{n+2} = -(n^2 - 2n + 4)a_n/[2(n+1)(n+2)], \quad n \geq 2; \quad a_2 = -a_0, \quad a_3 = -\frac{1}{4}a_1$
$y_1(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^6 + \cdots, \quad y_2(x) = x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{7}{160}x^5 - \frac{19}{1920}x^7 + \cdots$

7. $a_{n+2} = -a_n/(n+1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

$$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1\cdot 3} - \frac{x^6}{1\cdot 3\cdot 5} + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$$
$$y_2(x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2\cdot 4} - \frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$$

8. $a_{n+2} = -[(n+1)^2 a_{n+1} + a_n + a_{n-1}]/(n+1)(n+2), \quad n = 1, 2, \ldots$
$a_2 = -(a_0 + a_1)/2$
$y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{12}(x-1)^4 + \cdots$
$y_2(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{6}(x-1)^4 + \cdots$
9. $(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-2)(n-3)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
$y_1(x) = 1 - 3x^2, \quad y_2(x) = x - x^3/3$
10. $4(n+2)a_{n+2} - (n-2)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
$$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{4}, \quad y_2(x) = x - \frac{x^3}{12} - \frac{x^5}{240} - \frac{x^7}{2240} - \cdots - \frac{x^{2n+1}}{4^n(2n-1)(2n+1)} - \cdots$$
11. $3(n+2)a_{n+2} - (n+1)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
$$y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{5}{432}x^6 + \cdots + \frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)}{3^n\cdot 2\cdot 4\cdots(2n)}x^{2n} + \cdots$$
$$y_2(x) = x + \frac{2}{9}x^3 + \frac{8}{135}x^5 + \frac{16}{945}x^7 + \cdots + \frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{3^n\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}x^{2n+1} + \cdots$$
12. $(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)na_{n+1} + (n-1)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
$$y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad y_2(x) = x$$
13. $2(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+3)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
$$y_1(x) = 1 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{32}x^4 - \frac{7}{384}x^6 + \cdots + (-1)^n\frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2^n(2n)!}x^{2n} + \cdots$$
$$y_2(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{20} - \frac{x^7}{210} + \cdots + (-1)^n\frac{4\cdot 6\cdots(2n+2)}{2^n(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$
14. $2(n+2)(n+1)a_{n+2} + 3(n+1)a_{n+1} + (n+3)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$
$y_1(x) = 1 - \frac{3}{4}(x-2)^2 + \frac{3}{8}(x-2)^3 + \frac{1}{64}(x-2)^4 + \cdots$
$y_2(x) = (x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 + \frac{9}{64}(x-2)^4 + \cdots$
15. (a) $y = 2 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots$ (c) aproximadamente $|x| < 0{,}7$
16. (a) $y = -1 + 3x + x^2 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \cdots$ (c) aproximadamente $|x| < 0{,}7$
17. (a) $y = 4 - x - 4x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{4}{3}x^4 + \cdots$ (c) aproximadamente $|x| < 0{,}5$
18. (a) $y = -3 + 2x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^4 + \cdots$ (c) aproximadamente $|x| < 0{,}9$
19. $y_1(x) = 1 - \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{12}(x-1)^4 + \frac{1}{18}(x-1)^6 + \cdots$
$y_2(x) = (x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^4 - \frac{1}{20}(x-1)^5 + \frac{1}{28}(x-1)^7 + \cdots$
21. (a) $y_1(x) = 1 - \frac{\lambda}{2!}x^2 + \frac{\lambda(\lambda-4)}{4!}x^4 - \frac{\lambda(\lambda-4)(\lambda-8)}{6!}x^6 + \cdots$
$y_2(x) = x - \frac{\lambda-2}{3!}x^3 + \frac{(\lambda-2)(\lambda-6)}{5!}x^5 - \frac{(\lambda-2)(\lambda-6)(\lambda-10)}{7!}x^7 + \cdots$
(b) $1,\ x,\ 1-2x^2,\ x-\frac{2}{3}x^3,\ 1-4x^2+\frac{4}{3}x^4,\ x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5$
(c) $1,\ 2x,\ 4x^2-2,\ 8x^3-12x,\ 16x^4-48x^2+12,\ 32x^5-160x^3+120x$
22. (b) $y = x - x^3/6 + \cdots$

Seção 5.3

1. $\phi''(0) = -1, \quad \phi'''(0) = 0, \quad \phi^{(4)}(0) = 3$
2. $\phi''(0) = 0, \quad \phi'''(0) = -2, \quad \phi^{(4)}(0) = 0$
3. $\phi''(1) = 0, \quad \phi'''(1) = -6, \quad \phi^{(4)}(1) = 42$
4. $\phi''(0) = 0, \quad \phi'''(0) = -a_0, \quad \phi^{(4)}(0) = -4a_1$
5. $\rho = \infty, \quad \rho = \infty$
6. $\rho = 1, \quad \rho = 3, \quad \rho = 1$
7. $\rho = 1, \quad \rho = \sqrt{3}$
8. $\rho = 1$

9. (a) $\rho = \infty$ (b) $\rho = \infty$ (c) $\rho = \infty$ (d) $\rho = \infty$ (e) $\rho = 1$
(f) $\rho = \sqrt{2}$ (g) $\rho = \infty$ (h) $\rho = 1$ (i) $\rho = 1$ (j) $\rho = 2$
(k) $\rho = \sqrt{3}$ (l) $\rho = 1$ (m) $\rho = \infty$ (n) $\rho = \infty$

10. (a) $$y_1(x) = 1 - \frac{\alpha^2}{2!}x^2 - \frac{(2^2-\alpha^2)\alpha^2}{4!}x^4 - \frac{(4^2-\alpha^2)(2^2-\alpha^2)\alpha^2}{6!}x^6 - \cdots - \frac{[(2m-2)^2-\alpha^2]\cdots(2^2-\alpha^2)\alpha^2}{(2m)!}x^{2m} - \cdots$$

$$y_2(x) = x + \frac{1-\alpha^2}{3!}x^3 + \frac{(3^2-\alpha^2)(1-\alpha^2)}{5!}x^5 + \cdots + \frac{[(2m-1)^2-\alpha^2]\cdots(1-\alpha^2)}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

(b) $y_1(x)$ ou $y_2(x)$ termina com x^n quando $\alpha = n$ é par ou ímpar.

(c) $n = 0,\ y = 1;\quad n = 1,\ y = x;\quad n = 2,\ y = 1 - 2x^2;\quad n = 3,\ y = x - \frac{4}{3}x^3$

11. $y_1(x) = 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{180}x^6 + \cdots,\quad y_2(x) = x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{180}x^6 + \frac{1}{504}x^7 + \cdots,$
$\rho = \infty$

12. $y_1(x) = 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{40}x^5 + \cdots,\quad y_2(x) = x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{60}x^6 + \cdots,$
$\rho = \infty$

13. $y_1(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^6 + \cdots,\quad y_2(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{560}x^7 + \cdots,$
$\rho = \pi/2$

14. $y_1(x) = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{120}x^6 + \cdots,\quad y_2(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{7}{120}x^5 + \cdots,$
$\rho = 1$

15. Não é possível especificar condições iniciais arbitrárias em $x = 0$; logo, $x = 0$ é um ponto singular.

16. $y = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots = e^x$

17. $y = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{2\cdot 4} + \dfrac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{2^n\cdot n!} + \cdots$

18. $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \cdots$

19. $y = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$

20. $$y = a_0\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) + 2\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right)$$
$$= a_0e^x + 2\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right) = ce^x - 2 - 2x - x^2$$

21. $$y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 2!} - \frac{x^6}{2^3 3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!} + \cdots\right) + \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^5}{3\cdot 5} + \cdots\right)$$
$$= a_0 e^{-x^2/2} + \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2\cdot 4} + \frac{x^5}{3\cdot 5} + \cdots\right)$$

23. $1,\ 1 - 3x^2,\ 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4;\quad x,\ x - \frac{5}{3}x^3,\ x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{21}{5}x^5$

24. (a) $1,\ x,\ (3x^2-1)/2,\ (5x^3-3x)/2,\ (35x^4-30x^2+3)/8,\ (63x^5-70x^3+15x)/8$
(c) P_1; 0; P_2; $\pm 0{,}57735$; P_3; 0; $\pm 0{,}77460$; P_4; $\pm 0{,}33998$; $\pm 0{,}86114$;
P_5; 0; $\pm 0{,}53847$; $\pm 0{,}90618$

Seção 5.4

1. $x = 0$, regular
2. $x = 0$, regular; $x = 1$, irregular
3. $x = 0$, irregular; $x = 1$, regular
4. $x = 0$, irregular; $x = \pm 1$, regular
5. $x = 1$, regular; $x = -1$, irregular
6. $x = 0$, regular
7. $x = -3$, regular
8. $x = 0,\ -1$, regular; $x = 1$, irregular
9. $x = 1$, regular; $x = -2$, irregular
10. $x = 0,\ 3$, regular
11. $x = 1,\ -2$, regular
12. $x = 0$, regular

13. $x = 0$, irregular
14. $x = 0$, regular
15. $x = 0$, regular
16. $x = 0$, $\pm n\pi$, regular
17. $x = 0$, $\pm n\pi$, regular
18. $x = 0$, irregular; $x = \pm n\pi$, regular
19. $y = a_0\left(1 - \dfrac{x^2}{2 \cdot 5} + \dfrac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9} - \cdots\right)$

22. Ponto singular irregular.
23. Ponto singular regular.
24. Ponto singular regular.
25. Ponto singular irregular.
26. Ponto singular irregular.
27. Ponto singular irregular.

Seção 5.5

1. $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-2}$
2. $y = c_1|x+1|^{-1/2} + c_2|x+1|^{-3/2}$
3. $y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln|x|$
4. $y = c_1x^{-1}\cos(2\ln|x|) + c_2x^{-1}\operatorname{sen}(2\ln|x|)$
5. $y = c_1x + c_2x\ln|x|$
6. $y = c_1(x-1)^{-3} + c_2(x-1)^{-4}$
7. $y = c_1|x|^{(-5+\sqrt{29})/2} + c_2|x|^{(-5-\sqrt{29})/2}$
8. $y = c_1|x|^{3/2}\cos(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln|x|) + c_2|x|^{3/2}\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\sqrt{3}\ln|x|)$
9. $y = c_1x^3 + c_2x^3\ln|x|$
10. $y = c_1(x-2)^{-2}\cos(2\ln|x-2|) + c_2(x-2)^{-2}\operatorname{sen}(2\ln|x-2|)$
11. $y = c_1|x|^{-1/2}\cos(\frac{1}{2}\sqrt{15}\ln|x|) + c_2|x|^{-1/2}\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\sqrt{15}\ln|x|)$
12. $y = c_1x + c_2x^4$
13. $y = 2x^{3/2} - x^{-1}$
14. $y = 2x^{-1/2}\cos(2\ln x) - x^{-1/2}\operatorname{sen}(2\ln x)$
15. $y = 2x^2 - 7x^2\ln|x|$
16. $y = x^{-1}\cos(2\ln x)$
17. $\alpha < 1$
18. $\beta > 0$
19. $\gamma = 2$
20. $\alpha > 1$
21. (a) $\alpha < 1$ e $\beta > 0$
    (b) $\alpha < 1$ e $\beta \geq 0$, ou $\alpha = 1$ e $\beta > 0$
    (c) $\alpha > 1$ e $\beta > 0$
    (d) $\alpha > 1$ e $\beta \geq 0$, ou $\alpha = 1$ e $\beta > 0$
    (e) $\alpha = 1$ e $\beta > 0$
24. $y = c_1x^{-1} + c_2x^2$
25. $y = c_1x^2 + c_2x^2\ln x + \frac{1}{4}\ln x + \frac{1}{4}$
26. $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-5} + \frac{1}{12}x$
27. $y = c_1x + c_2x^2 + 3x^2\ln x + \ln x + \frac{3}{2}$
28. $y = c_1\cos(2\ln x) + c_2\operatorname{sen}(2\ln x) + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(\ln x)$
29. $y = c_1x^{-3/2}\cos(\frac{3}{2}\ln x) + c_2x^{-3/2}\operatorname{sen}(\frac{3}{2}\ln x)$
31. $x > 0:\quad c_1 = k_1,\ c_2 = k_2;\quad x < 0:\quad c_1(-1)^{r_1} = k_1,\ c_2 = k_2$

Seção 5.6

1. $r(2r-1) = 0;\quad a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{(n+r)[2(n+r)-1]};\quad r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = 0$

$$y_1(x) = x^{1/2}\left[1 - \frac{x^2}{2\cdot 5} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 9} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 5\cdot 9\cdot 13} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!5\cdot 9\cdot 13\cdots(4n+1)} + \cdots\right]$$

$$y_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 7} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 7\cdot 11} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!3\cdot 7\cdot 11\cdots(4n-1)} + \cdots$$

2. $r^2 - \frac{1}{9} = 0;\quad a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{(n+r)^2 - \frac{1}{9}};\quad r_1 = \frac{1}{3}, r_2 = -\frac{1}{3}$

$$y_1(x) = x^{1/3}\left[1 - \frac{1}{1!(1+\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(1+\frac{1}{3})(2+\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \cdots + \frac{(-1)^m}{m!(1+\frac{1}{3})(2+\frac{1}{3})\cdots(m+\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m} + \cdots\right]$$

$$y_2(x) = x^{-1/3}\left[1 - \frac{1}{1!(1-\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(1-\frac{1}{3})(2-\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \cdots + \frac{(-1)^m}{m!(1-\frac{1}{3})(2-\frac{1}{3})\cdots(m-\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m} + \cdots\right]$$

Sugestão: Faça $n = 2m$ na relação de recorrência, $m = 1, 2, 3, \ldots$.

3. $r(r-1) = 0$; $\quad a_n = -\dfrac{a_{n-1}}{(n+r)(n+r-1)}$; $\quad r_1 = 1,\ r_2 = 0$

$$y_1(x) = x\left[1 - \frac{x}{1!2!} + \frac{x^2}{2!3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}x^n + \cdots\right]$$

4. $r^2 = 0$; $\quad a_n = \dfrac{a_{n-1}}{(n+r)^2}$; $\quad r_1 = r_2 = 0$

$$y_1(x) = 1 + \frac{x}{(1!)^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} + \cdots + \frac{x^n}{(n!)^2} + \cdots$$

5. $r(3r-1) = 0$; $\quad a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{(n+r)[3(n+r)-1]}$; $\quad r_1 = \frac{1}{3},\ r_2 = 0$

$$y_1(x) = x^{1/3}\left[1 - \frac{1}{1!7}\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2!7\cdot 13}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{(-1)^m}{m!7\cdot 13\cdots(6m+1)}\left(\frac{x^2}{2}\right)^m + \cdots\right]$$

$$y_2(x) = 1 - \frac{1}{1!5}\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2!5\cdot 11}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{(-1)^m}{m!5\cdot 11\cdots(6m-1)}\left(\frac{x^2}{2}\right)^m + \cdots$$

Sugestão: Faça $n = 2m$ na relação de recorrência, $m = 1, 2, 3, \ldots$.

6. $r^2 - 2 = 0$; $\quad a_n = -\dfrac{a_{n-1}}{(n+r)^2 - 2}$; $\quad r_1 = \sqrt{2},\ r_2 = -\sqrt{2}$

$$y_1(x) = x^{\sqrt{2}}\left[1 - \frac{x}{1(1+2\sqrt{2})} + \frac{x^2}{2!(1+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!(1+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})\cdots(n+2\sqrt{2})}x^n + \cdots\right]$$

$$y_2(x) = x^{-\sqrt{2}}\left[1 - \frac{x}{1(1-2\sqrt{2})} + \frac{x^2}{2!(1-2\sqrt{2})(2-2\sqrt{2})} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!(1-2\sqrt{2})(2-2\sqrt{2})\cdots(n-2\sqrt{2})}x^n + \cdots\right]$$

7. $r^2 = 0$; $\quad (n+r)a_n = a_{n-1}$; $\quad r_1 = r_2 = 0$

$$y_1(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^x$$

8. $2r^2 + r - 1 = 0$; $\quad (2n + 2r - 1)(n + r + 1)a_n + 2a_{n-2} = 0$; $\quad r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = -1$

$$y_1(x) = x^{1/2}\left(1 - \frac{x^2}{7} + \frac{x^4}{2!7\cdot 11} - \cdots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{m!7\cdot 11\cdots(4m+3)} + \cdots\right)$$

$$y_2(x) = x^{-1}\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!5} - \cdots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{m!5\cdot 9\cdots(4m-3)} + \cdots\right)$$

9. $r^2 - 4r + 3 = 0$; $\quad (n+r-3)(n+r-1)a_n - (n+r-2)a_{n-1} = 0$; $\quad r_1 = 3,\ r_2 = 1$

$$y_1(x) = x^3\left(1 + \frac{2}{3}x + \frac{x^2}{4} + \cdots + \frac{2x^n}{n!(n+2)} + \cdots\right)$$

10. $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$; $\quad (n + r - \frac{1}{2})^2 a_n + a_{n-2} = 0$; $\quad r_1 = r_2 = 1/2$

$$y_1(x) = x^{1/2}\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \cdots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} + \cdots\right)$$

11. $r^2 = 0; \quad r_1 = 0,\ r_2 = 0$

$$y_1(x) = 1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2\cdot 1^2}(x-1) - \frac{\alpha(\alpha+1)[1\cdot 2 - \alpha(\alpha+1)]}{(2\cdot 1^2)(2\cdot 2^2)}(x-1)^2 + \cdots$$
$$+ (-1)^{n+1}\frac{\alpha(\alpha+1)[1\cdot 2 - \alpha(\alpha+1)]\cdots[n(n-1) - \alpha(\alpha+1)]}{2^n(n!)^2}(x-1)^n + \cdots$$

12. (a) $r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = 0$ em ambos $x = \pm 1$

(b) $y_1(x) = |x-1|^{1/2}$
$$\times\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+2\alpha)\cdots(2n-1+2\alpha)(1-2\alpha)\cdots(2n-1-2\alpha)}{2^n(2n+1)!}(x-1)^n\right]$$
$$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha(1+\alpha)\cdots(n-1+\alpha)(-\alpha)(1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{n!1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}(x-1)^n$$

13. $r^2 = 0; \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 0; \quad a_n = \dfrac{(n-1-\lambda)a_{n-1}}{n^2}$

$$y_1(x) = 1 + \frac{-\lambda}{(1!)^2}x + \frac{(-\lambda)(1-\lambda)}{(2!)^2}x^2 + \cdots + \frac{(-\lambda)(1-\lambda)\cdots(n-1-\lambda)}{(n!)^2}x^n + \cdots$$

Para $\lambda = n$, os coeficientes de todos os termos depois de x^n são nulos.

16. (b) $[(n-1)^2 - 1]b_n = -b_{n-2}$ e é impossível determinar b_2.

Seção 5.7

1. $x = 0; \quad r(r-1) = 0; \quad r_1 = 1,\ r_2 = 0$
2. $x = 0; \quad r^2 - 3r + 2 = 0; \quad r_1 = 2,\ r_2 = 1$
3. $x = 0; \quad r(r-1) = 0; \quad r_1 = 1,\ r_2 = 0$
   $x = 1; \quad r(r+5) = 0; \quad r_1 = 0,\ r_2 = -5$
4. Nenhum
5. $x = 0; \quad r^2 + 2r - 2 = 0; \quad r_1 = -1 + \sqrt{3} \cong 0{,}732,\ r_2 = -1 - \sqrt{3} \cong -2{,}73$
6. $x = 0; \quad r(r - \frac{3}{4}) = 0; \quad r_1 = \frac{3}{4},\ r_2 = 0$
   $x = -2; \quad r(r - \frac{5}{4}) = 0; \quad r_1 = \frac{5}{4},\ r_2 = 0$
7. $x = 0; \quad r^2 + 1 = 0; \quad r_1 = i,\ r_2 = -i$
8. $x = -1; \quad r^2 - 7r + 3 = 0; \quad r_1 = (7 + \sqrt{37})/2 \cong 6{,}54,\ r_2 = (7 - \sqrt{37})/2 \cong 0{,}459$
9. $x = 1; \quad r^2 + r = 0; \quad r_1 = 0,\ r_2 = -1$
10. $x = -2; \quad r^2 - (5/4)r = 0; \quad r_1 = 5/4,\ r_2 = 0$
11. $x = 2; \quad r^2 - 2r = 0; \quad r_1 = 2,\ r_2 = 0$
    $x = -2; \quad r^2 - 2r = 0; \quad r_1 = 2,\ r_2 = 0$
12. $x = 0; \quad r^2 - (5/3)r = 0; \quad r_1 = 5/3,\ r_2 = 0$
    $x = -3; \quad r^2 - (r/3) - 1 = 0; \quad r_1 = (1 + \sqrt{37})/6 \cong 1{,}18,$
    $r_2 = (1 - \sqrt{37})/6 \cong -0{,}847$
13. (b) $r_1 = 0,\ r_2 = 0$
    (c) $y_1(x) = 1 + x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{36}x^3 + \cdots$
    $y_2(x) = y_1(x)\ln x - 2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{11}{108}x^3 + \cdots$
14. (b) $r_1 = 1,\ r_2 = 0$
    (c) $y_1(x) = x - 4x^2 + \frac{17}{3}x^3 - \frac{47}{12}x^4 + \cdots$
    $y_2(x) = -6y_1(x)\ln x + 1 - 33x^2 + \frac{449}{6}x^3 + \cdots$
15. (b) $r_1 = 1,\ r_2 = 0$
    (c) $y_1(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x^3 + \frac{51}{16}x^4 + \cdots$
    $y_2(x) = 3y_1(x)\ln x + 1 - \frac{21}{4}x^2 - \frac{19}{4}x^3 + \cdots$
16. (b) $r_1 = 1,\ r_2 = 0$
    (c) $y_1(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 + \cdots$
    $y_2(x) = -y_1(x)\ln x + 1 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{36}x^3 - \frac{35}{1728}x^4 + \cdots$
17. (b) $r_1 = 1,\ r_2 = -1$
    (c) $y_1(x) = x - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{720}x^5 + \cdots$
    $y_2(x) = -\frac{1}{3}y_1(x)\ln x + x^{-1} - \frac{1}{90}x^3 + \cdots$
18. $r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = 0$
    $y_1(x) = (x-1)^{1/2}[1 - \frac{3}{4}(x-1) + \frac{53}{480}(x-1)^2 + \cdots], \quad \rho = 1$
19. (c) *Sugestão:* $(n-1)(n-2) + (1+\alpha+\beta)(n-1) + \alpha\beta = (n-1+\alpha)(n-1+\beta)$
    (d) *Sugestão:* $(n-\gamma)(n-1-\gamma) + (1+\alpha+\beta)(n-\gamma) + \alpha\beta = (n-\gamma+\alpha)(n-\gamma+\beta)$

Seção 5.8

1. $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n+1)!}$

$y_2(x) = -y_1(x)\ln x + \frac{1}{x}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n + H_{n-1}}{n!(n-1)!}(-1)^n x^n\right]$

2. $y_1(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}, \quad y_2(x) = y_1(x)\ln x - \frac{2}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{(n!)^2}x^n$

3. $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(n!)^2}x^n, \quad y_2(x) = y_1(x)\ln x - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n H_n}{(n!)^2}x^n$

4. $y_1(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}x^n$

$y_2(x) = -y_1(x)\ln x + \frac{1}{x^2}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n + H_{n-1}}{n!(n-1)!}(-1)^n x^n\right]$

5. $y_1(x) = x^{3/2}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(1+\frac{3}{2})(2+\frac{3}{2})\cdots(m+\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right]$

$y_2(x) = x^{-3/2}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(1-\frac{3}{2})(2-\frac{3}{2})\cdots(m-\frac{3}{2})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right]$

Sugestão: Faça $n = 2m$ na relação de recorrência, $m = 1, 2, 3, \ldots$. Para $r = -3/2$, $a_1 = 0$ e a_3 é arbitrário.

CAPÍTULO 6

Seção 6.1

1. Seccionalmente contínua.
2. Nenhuma das duas.
3. Contínua.
4. Seccionalmente contínua.
5. (a) $1/s^2, \quad s > 0$
   (b) $2/s^3, \quad s > 0$
   (c) $n!/s^{n+1}, \quad s > 0$
6. $s/(s^2 + a^2), \quad s > 0$
7. $\frac{s}{s^2 - b^2}, \quad s > |b|$
8. $\frac{b}{s^2 - b^2}, \quad s > |b|$
9. $\frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}, \quad s - a > |b|$
10. $\frac{b}{(s-a)^2 - b^2}, \quad s - a > |b|$
11. $\frac{b}{s^2 + b^2}, \quad s > 0$
12. $\frac{s}{s^2 + b^2}, \quad s > 0$
13. $\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
14. $\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$
15. $\frac{1}{(s-a)^2}, \quad s > a$
16. $\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}, \quad s > 0$
17. $\frac{s^2 + a^2}{(s-a)^2(s+a)^2}, \quad s > |a|$
18. $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
19. $\frac{2a(3s^2 - a^2)}{(s^2 + a^2)^3}, \quad s > 0$
20. $\frac{2a(3s^2 + a^2)}{(s^2 - a^2)^3}, \quad s > |a|$
21. Converge
22. Converge
23. Diverge
24. Converge
26. (d) $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2; \quad \Gamma(11/2) = 945\sqrt{\pi}/32$

Seção 6.2

1. $\frac{3}{2}\,\text{sen}\,2t$
2. $2t^2 e^t$
3. $\frac{2}{5}e^t - \frac{2}{5}e^{-4t}$
4. $\frac{9}{5}e^{3t} + \frac{6}{5}e^{-2t}$
5. $2e^{-t}\cos 2t$
6. $2\cosh 2t - \frac{3}{2}\,\text{senh}\,2t$
7. $2e^t\cos t + 3e^t\,\text{sen}\,t$
8. $3 - 2\,\text{sen}\,2t + 5\cos 2t$
9. $-2e^{-2t}\cos t + 5e^{-2t}\,\text{sen}\,t$
10. $2e^{-t}\cos 3t - \frac{5}{3}e^{-t}\,\text{sen}\,3t$
11. $y = \frac{1}{5}(e^{3t} + 4e^{-2t})$
12. $y = 2e^{-t} - e^{-2t}$

13. $y = e^t \operatorname{sen} t$
14. $y = e^{2t} - te^{2t}$
15. $y = 2e^t \cosh\sqrt{3}\,t - (2/\sqrt{3})e^t \operatorname{senh}\sqrt{3}\,t$
16. $y = 2e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t$
17. $y = te^t - t^2e^t + \frac{2}{3}t^3e^t$
18. $y = \cosh t$
19. $y = \cos\sqrt{2}\,t$
20. $y = (\omega^2 - 4)^{-1}[(\omega^2 - 5)\cos\omega t + \cos 2t]$
21. $y = \frac{1}{5}(\cos t - 2\operatorname{sen} t + 4e^t\cos t - 2e^t\operatorname{sen} t)$
22. $y = \frac{1}{5}(e^{-t} - e^t\cos t + 7e^t\operatorname{sen} t)$
23. $y = 2e^{-t} + te^{-t} + 2t^2e^{-t}$
24. $Y(s) = \dfrac{s}{s^2+4} + \dfrac{1 - e^{-\pi s}}{s(s^2+4)}$
25. $Y(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)} - \dfrac{e^{-s}(s+1}{s^2(s^2+1}$
26. $Y(s) = (1 - e^{-s})/s^2(s^2+4)$
29. $1/(s-a)^2$
30. $2b(3s^2 - b^2)/(s^2+b^2)^3$
31. $n!/s^{n+1}$
32. $n!/(s-a)^{n+1}$
33. $2b(s-a)/[(s-a)^2+b^2]^2$
34. $[(s-a)^2 - b^2]/[(s-a)^2+b^2]^2$
36. (a) $Y' + s^2Y = s$ (b) $s^2Y'' + 2sY' - [s^2 + \alpha(\alpha+1)]Y = -1$

Seção 6.3

7. $F(s) = 2e^{-s}/s^3$
8. $F(s) = e^{-s}(s^2+2)/s^3$
9. $F(s) = \dfrac{e^{-\pi s}}{s^2} - \dfrac{e^{-2\pi s}}{s^2}(1+\pi s)$
10. $F(s) = \dfrac{1}{s}(e^{-s} + 2e^{-3s} - 6e^{-4s})$
11. $F(s) = s^{-2}[(1-s)e^{-2s} - (1+s)e^{-3s}]$
12. $F(s) = (1 - e^{-s})/s^2$
13. $f(t) = t^3e^{2t}$
14. $f(t) = \frac{1}{3}u_2(t)[e^{t-2} - e^{-2(t-2)}]$
15. $f(t) = 2u_2(t)e^{t-2}\cos(t-2)$
16. $f(t) = u_2(t)\operatorname{senh} 2(t-2)$
17. $f(t) = u_1(t)e^{2(t-1)}\cosh(t-1)$
18. $f(t) = u_1(t) + u_2(t) - u_3(t) - u_4(t)$
20. $f(t) = 2(2t)^n$
21. $f(t) = \frac{1}{2}e^{-t/2}\cos t$
22. $f(t) = \frac{1}{6}e^{t/3}(e^{2t/3} - 1)$
23. $f(t) = \frac{1}{2}e^{t/2}u_2(t/2)$
24. $F(s) = s^{-1}(1 - e^{-s}),\quad s > 0$
25. $F(s) = s^{-1}(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s}),\quad s > 0$
26. $F(s) = \dfrac{1}{s}[1 - e^{-s} + \cdots + e^{-2ns} - e^{-(2n+1)s}] = \dfrac{1 - e^{-(2n+2)s}}{s(1+e^{-s})},\quad s > 0$
27. $F(s) = \dfrac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{-ns} = \dfrac{1/s}{1+e^{-s}},\quad s > 0$
29. $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1/s}{1+e^{-s}},\quad s > 0$
30. $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1 - e^{-s}}{s(1+e^{-s})},\quad s > 0$
31. $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1 - (1+s)e^{-s}}{s^2(1 - e^{-s})},\quad s > 0$
32. $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1 + e^{-\pi s}}{(1+s^2)(1 - e^{-\pi s})},\quad s > 0$
33. (a) $\mathcal{L}\{f(t)\} = s^{-1}(1 - e^{-s}),\quad s > 0$
(b) $\mathcal{L}\{g(t)\} = s^{-2}(1 - e^{-s}),\quad s > 0$
(c) $\mathcal{L}\{h(t)\} = s^{-2}(1 - e^{-s})^2,\quad s > 0$
34. (b) $\mathcal{L}\{p(t)\} = \dfrac{1 - e^{-s}}{s^2(1+e^{-s})},\quad s > 0$

Seção 6.4

1. $y = 1 - \cos t + \operatorname{sen} t - u_{\pi/2}(t)(1 - \operatorname{sen} t)$
2. $y = e^{-t}\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}u_\pi(t)[1 + e^{-(t-\pi)}\cos t + e^{-(t-\pi)}\operatorname{sen} t]$
$-\frac{1}{2}u_{2\pi}(t)[1 - e^{-(t-2\pi)}\cos t - e^{-(t-2\pi)}\operatorname{sen} t]$
3. $y = \frac{1}{6}[1 - u_{2\pi}(t)](2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)$
4. $y = \frac{1}{6}(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t) - \frac{1}{6}u_\pi(t)(2\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t)$
5. $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t} - u_{10}(t)[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2(t-10)} - e^{-(t-10)}]$
6. $y = e^{-t} - e^{-2t} + u_2(t)[\frac{1}{2} - e^{-(t-2)} + \frac{1}{2}e^{-2(t-2)}]$
7. $y = \cos t + u_{3\pi}(t)[1 - \cos(t - 3\pi)]$
8. $y = h(t) - u_{\pi/2}(t)h(t - \pi/2),\quad h(t) = \frac{4}{25}(-4 + 5t + 4e^{-t/2}\cos t - 3e^{-t/2}\operatorname{sen} t)$
9. $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}u_6(t)[t - 6 - \operatorname{sen}(t-6)]$

10. $y = h(t) + u_\pi(t)h(t-\pi), \quad h(t) = \frac{4}{17}[-4\cos t + \operatorname{sen} t + 4e^{-t/2}\cos t + e^{-t/2}\operatorname{sen} t]$
11. $y = u_\pi(t)[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2t-2\pi)] - u_{3\pi}(t)[\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2t-6\pi)]$
12. $y = u_1(t)h(t-1) - u_2(t)h(t-2), \quad h(t) = -1 + (\cos t + \cosh t)/2$
13. $y = h(t) - u_\pi(t)h(t-\pi), \quad h(t) = (3 - 4\cos t + \cos 2t)/12$
14. $f(t) = [u_{t_0}(t)(t-t_0) - u_{t_0+k}(t)(t-t_0-k)](h/k)$
15. $g(t) = [u_{t_0}(t)(t-t_0) - 2u_{t_0+k}(t)(t-t_0-k) + u_{t_0+2k}(t)(t-t_0-2k)](h/k)$
16. (b) $u(t) = ku_{3/2}(t)\, h(t-\frac{3}{2}) - ku_{5/2}(t)\, h(t-\frac{5}{2})$,
    $h(t) = 1 - (\sqrt{7}/21)e^{-t/8}\operatorname{sen}(3\sqrt{7}\,t/8) - e^{-t/8}\cos(3\sqrt{7}\,t/8)$
    (d) $k = 2{,}51$ (e) $\tau = 25{,}6773$
17. (a) $k = 5$
    (b) $y = [u_5(t)h(t-5) - u_{5+k}(t)h(t-5-k)]/k, \quad h(t) = \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 2t$
18. (b) $f_k(t) = [u_{4-k}(t) - u_{4+k}(t)]/2k$;
    $y = [u_{4-k}(t)h(t-4+k) - u_{4+k}(t)h(t-4-k)]/2k$,
    $h(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-t/6}\cos(\sqrt{143}\,t/6) - (\sqrt{143}/572)\, e^{-t/6}\operatorname{sen}(\sqrt{143}\,t/6)$
19. (b) $y = 1 - \cos t + 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_{k\pi}(t)[1 - \cos(t-k\pi)]$
21. (b) $y = 1 - \cos t + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_{k\pi}(t)[1 - \cos(t-k\pi)]$
23. (a) $y = 1 - \cos t + 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k u_{11k/4}(t)[1 - \cos(t-11k/4)]$

Seção 6.5

1. $y = e^{-t}\cos t + e^{-t}\operatorname{sen} t + u_\pi(t)e^{-(t-\pi)}\operatorname{sen}(t-\pi)$
2. $y = \frac{1}{2}u_\pi(t)\operatorname{sen} 2(t-\pi) - \frac{1}{2}u_{2\pi}(t)\operatorname{sen} 2(t-2\pi)$
3. $y = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t} + u_5(t)[-e^{-2(t-5)} + e^{-(t-5)}] + u_{10}(t)[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2(t-10)} - e^{-(t-10)}]$
4. $y = \cosh(t) - 20u_3(t)\operatorname{senh}(t-3)$
5. $y = \frac{1}{4}\operatorname{sen} t - \frac{1}{4}\cos t + \frac{1}{4}e^{-t}\cos\sqrt{2}\,t + (1/\sqrt{2})\, u_{3\pi}(t)e^{-(t-3\pi)}\operatorname{sen}\sqrt{2}(t-3\pi)$
6. $y = \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}u_{4\pi}(t)\operatorname{sen} 2(t-4\pi)$
7. $y = \operatorname{sen} t + u_{2\pi}(t)\operatorname{sen}(t-2\pi)$
8. $y = u_{\pi/4}(t)\operatorname{sen} 2(t-\pi/4)$
9. $y = u_{\pi/2}(t)[1 - \cos(t-\pi/2)] + 3u_{3\pi/2}(t)\operatorname{sen}(t-3\pi/2) - u_{2\pi}(t)[1 - \cos(t-2\pi)]$
10. $y = (1/\sqrt{31})\, u_{\pi/6}(t)\exp[-\frac{1}{4}(t-\pi/6)]\operatorname{sen}(\sqrt{31}/4)(t-\pi/6)$
11. $y = \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\operatorname{sen} t - \frac{1}{5}e^{-t}\cos t - \frac{3}{5}e^{-t}\operatorname{sen} t + u_{\pi/2}(t)e^{-(t-\pi/2)}\operatorname{sen}(t-\pi/2)$
12. $y = u_1(t)[\operatorname{senh}(t-1) - \operatorname{sen}(t-1)]/2$
13. (a) $-e^{-T/4}\delta(t-5-T), \quad T = 8\pi/\sqrt{15}$
14. (a) $y = (4/\sqrt{15})\, u_1(t)e^{-(t-1)/4}\operatorname{sen}(\sqrt{15}/4)(t-1)$
    (b) $t_1 \cong 2{,}3613, \quad y_1 \cong 0{,}71153$
    (c) $y = (8\sqrt{7}/21)\, u_1(t)e^{-(t-1)/8}\operatorname{sen}(3\sqrt{7}/8)\,(t-1); \quad t_1 \cong 2{,}4569, \quad y_1 \cong 0{,}83351$
    (d) $t_1 = 1 + \pi/2 \cong 2{,}5708, \quad y_1 = 1$
15. (a) $k_1 \cong 2{,}8108$ (b) $k_1 \cong 2{,}3995$ (c) $k_1 = 2$
16. (a) $\phi(t,k) = [u_{4-k}(t)h(t-4+k) - u_{4+k}(t)h(t-4-k)]/2k, \quad h(t) = 1 - \cos t$
    (b) $u_4(t)\operatorname{sen}(t-4)$ (c) Sim
17. (b) $y = \sum_{k=1}^{20} u_{k\pi}(t)\operatorname{sen}(t-k\pi)$
18. (b) $y = \sum_{k=1}^{20}(-1)^{k+1}u_{k\pi}(t)\operatorname{sen}(t-k\pi)$
19. (b) $y = \sum_{k=1}^{20} u_{k\pi/2}(t)\operatorname{sen}(t-k\pi/2)$
20. (b) $y = \sum_{k=1}^{20}(-1)^{k+1}u_{k\pi/2}(t)\operatorname{sen}(t-k\pi/2)$
21. (b) $y = \sum_{k=1}^{15} u_{(2k-1)\pi}(t)\operatorname{sen}[t-(2k-1)\pi]$
22. (b) $y = \sum_{k=1}^{40}(-1)^{k+1}u_{11k/4}(t)\operatorname{sen}(t-11k/4)$

23. (b) $y = \frac{20}{\sqrt{399}} \sum_{k=1}^{20} (-1)^{k+1} u_{k\pi}(t) e^{-(t-k\pi)/20} \operatorname{sen}[\sqrt{399}(t-k\pi)/20]$

24. (b) $y = \frac{20}{\sqrt{399}} \sum_{k=1}^{15} u_{(2k-1)\pi}(t) e^{-[t-(2k-1)\pi]/20} \operatorname{sen} \sqrt{399}[t-(2k-1)\pi]/20\}$

Seção 6.6

3. $\operatorname{sen} t * \operatorname{sen} t = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t)$ é negativo quando $t = 2\pi$, por exemplo.
4. $F(s) = 2/s^2(s^2+4)$
5. $F(s) = 1/(s+1)(s^2+1)$
6. $F(s) = 1/s^2(s-1)$
7. $F(s) = s/(s^2+1)^2$
8. $f(t) = \frac{1}{6}\int_0^t (t-\tau)^3 \operatorname{sen}\tau\, d\tau$
9. $f(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \cos 2\tau\, d\tau$
10. $f(t) = \frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)e^{-(t-\tau)} \operatorname{sen} 2\tau\, d\tau$
11. $f(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(t-\tau) g(\tau)\, d\tau$
12. (c) $\int_0^t u^m (1-u)^n du = \dfrac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}$
13. $y = \dfrac{1}{\omega}\operatorname{sen}\omega t + \dfrac{1}{\omega}\int_0^t \operatorname{sen}\omega(t-\tau) g(\tau)\, d\tau$
14. $y = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \operatorname{sen}(t-\tau) \operatorname{sen}\alpha\tau\, d\tau$
15. $y = \frac{1}{8}\int_0^t e^{-(t-\tau)/2} \operatorname{sen} 2(t-\tau) g(\tau)\, d\tau$
16. $y = e^{-t/2}\cos t - \frac{1}{2}e^{-t/2}\operatorname{sen} t + \int_0^t e^{-(t-\tau)/2} \operatorname{sen}(t-\tau)[1-u_\pi(\tau)]\, d\tau$
17. $y = 2e^{-2t} + te^{-2t} + \int_0^t (t-\tau)e^{-2(t-\tau)} g(\tau)\, d\tau$
18. $y = 2e^{-t} - e^{-2t} + \int_0^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}] \cos\alpha\tau\, d\tau$
19. $y = \frac{1}{2}\int_0^t [\operatorname{senh}(t-\tau) - \operatorname{sen}(t-\tau)] g(\tau)\, d\tau$
20. $y = \frac{4}{3}\cos t - \frac{1}{3}\cos 2t + \frac{1}{6}\int_0^t [2\operatorname{sen}(t-\tau) - \operatorname{sen} 2(t-\tau)] g(\tau)\, d\tau$
21. $\Phi(s) = \dfrac{F(s)}{1+K(s)}$
22. (a) $\phi(t) = \frac{1}{3}(4\operatorname{sen} 2t - 2\operatorname{sen} t)$
23. (a) $\phi(t) = \cos t$
    (b) $\phi''(t) + \phi(t) = 0, \phi(0) = 1, \phi'(0) = 0$
24. (a) $\phi(t) = \cosh t$
    (b) $\phi''(t) - \phi(t) = 0, \phi(0) = 1, \phi'(0) = 0$
25. (a) $\phi(t) = (1 - 2t + t^2)e^{-t}$
    (b) $\phi(t) + 2\phi'(t) + \phi(t) = 2e^{-t}, \phi(0) = 1, \phi'(0) = -3$
26. (a) $\phi(t) = \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{t/2}\cos(\sqrt{3}\,t/2) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{t/2}\operatorname{sen}(\sqrt{3}\,t/2)$
    (b) $\phi'''(t) + \phi(t) = 0, \phi(0) = 0, \phi'(0) = 0, \phi''(0) = 1$
27. (a) $\phi(t) = \cos t$
    (b) $\phi^{(4)}(t) - \phi(t) = 0, \phi(0) = 1, \phi'(0) = 0, \phi''(0) = -1, \phi'''(0) = 0$
28. (a) $\phi(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\operatorname{sen}(\sqrt{3}t/2)$
    (b) $\phi'''(t) + \phi''(t) + \phi'(t) = 0, \phi(0) = 1, \phi'(0) = -1, \phi''(0) = 1$

CAPÍTULO 7

Seção 7.1

1. $x_1' = x_2, \quad x_2' = -2x_1 - 0{,}5x_2$
2. $x_1' = x_2, \quad x_2' = -2x_1 - 0{,}5x_2 + 3\operatorname{sen} t$
3. $x_1' = x_2, \quad x_2' = -(1 - 0{,}25t^{-2})x_1 - t^{-1}x_2$
4. $x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = x_4, \quad x_4' = x_1$
5. $x_1' = x_2, \quad x_2' = -4x_1 - 0{,}25x_2 + 2\cos 3t, x_1(0) = 1, x_2(0) = -2$
6. $x_1' = x_2, \quad x_2' = -q(t)x_1 - p(t)x_2 + g(t); \quad x_1(0) = u_0, \quad x_2(0) = u_0'$

7. (a) $x_1 = c_1e^{-t} + c_2e^{-3t}, \quad x_2 = c_1e^{-t} - c_2e^{-3t}$
   (b) $c_1 = 5/2, \quad c_2 = -1/2$ na solução em (a)
   (c) O gráfico se aproxima da origem no primeiro quadrante tangente à reta $x_1 = x_2$.
8. $x_1 = \frac{11}{3}e^{2t} - \frac{2}{3}e^{-t}, \quad x_2 = \frac{11}{6}e^{2t} - \frac{4}{3}e^{-t}$
   O gráfico é assintótico à reta $x_1 = 2x_2$ no primeiro quadrante.
9. $x_1 = -\frac{3}{2}e^{t/2} - \frac{1}{2}e^{2t}, \quad x_2 = \frac{3}{2}e^{t/2} - \frac{1}{2}e^{2t}$
   O gráfico é assintótico à reta $x_1 = x_2$ no terceiro quadrante.
10. $x_1 = -7e^{-t} + 6e^{-2t}, \quad x_2 = -7e^{-t} + 9e^{-2t}$
    O gráfico se aproxima da origem no terceiro quadrante tangente à reta $x_1 = x_2$.
11. $x_1 = 3\cos 2t + 4\operatorname{sen} 2t, \quad x_2 = -3\operatorname{sen} 2t + 4\cos 2t$
    O gráfico é um círculo centrado na origem com raio 5 e é percorrido no sentido horário.
12. $x_1 = -2e^{-t/2}\cos 2t + 2e^{-t/2}\operatorname{sen} 2t, \quad x_2 = 2e^{-t/2}\cos 2t + 2e^{-t/2}\operatorname{sen} 2t$
    O gráfico é uma espiral se aproximando da origem no sentido horário.
13. $LRCI'' + LI' + RI = 0$
18. $y_1' = y_3, y_2' = y_4, m_1y_3' = -(k_1 + k_2)y_1 + k_2y_2 + F_1(t),$
    $m_2y_4' = k_2y_1 - (k_2 + k_3)y_2 + F_2(t)$
22. (a) $Q_1' = \frac{3}{2} - \frac{1}{10}Q_1 + \frac{3}{40}Q_2, \quad Q_1(0) = 25$
    $Q_2' = 3 + \frac{1}{10}Q_1 - \frac{1}{5}Q_2, \quad Q_2(0) = 15$
    (b) $Q_1^E = 42, \quad Q_2^E = 36$
    (c) $x_1' = -\frac{1}{10}x_1 + \frac{3}{40}x_2, \quad x_1(0) = -17$
    $x_2' = \frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{5}x_2, \quad x_2(0) = -21$
23. (a) $Q_1' = 3q_1 - \frac{1}{15}Q_1 + \frac{1}{100}Q_2, \quad Q_1(0) = Q_1^0$
    $Q_2' = q_2 + \frac{1}{30}Q_1 - \frac{3}{100}Q_2, \quad Q_2(0) = Q_2^0$
    (b) $Q_1^E = 6(9q_1 + q_2), \quad Q_2^E = 20(3q_1 + 2q_2)$
    (c) Não
    (d) $\frac{10}{9} \le Q_2^E/Q_1^E \le \frac{20}{3}$

Seção 7.2

1. (a) $\begin{pmatrix} 6 & -6 & 3 \\ 5 & 9 & -2 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -15 & 6 & -12 \\ 7 & -18 & -1 \\ -26 & -3 & -5 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 6 & -12 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 9 & 12 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -8 & -9 & 11 \\ 14 & 12 & -5 \\ 5 & -8 & 5 \end{pmatrix}$

2. (a) $\begin{pmatrix} 1 - i & -7 + 2i \\ -1 + 2i & 2 + 3i \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 + 4i & 6i \\ 11 + 6i & 6 - 5i \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} -3 + 5i & 7 + 5i \\ 2 + i & 7 + 2i \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 8 + 7i & 4 - 4i \\ 6 - 4i & -4 \end{pmatrix}$

3. (a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (c), (d) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

4. (a) $\begin{pmatrix} 3 - 2i & 2 - i \\ 1 + i & -2 + 3i \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 3 + 2i & 1 - i \\ 2 + i & -2 - 3i \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 + 2i & 2 + i \\ 1 - i & -2 - 3i \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 10 & 6 & -4 \\ 0 & 4 & 10 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

6. (a) $\begin{pmatrix} 7 & -11 & -3 \\ 11 & 20 & 17 \\ -4 & 3 & -12 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 6 & -8 & -11 \\ 9 & 15 & 6 \\ -5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

8. (a) $4i$ (b) $12 - 8i$ (c) $2 + 2i$ (d) 16

10. $\begin{pmatrix} \frac{3}{11} & -\frac{4}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$ 11. $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

14. Singular

15. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$

17. Singular

18. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 6 & \frac{13}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{2}{5} \\ 5 & \frac{11}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -2 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$

21. (a) $\begin{pmatrix} 7e^t & 5e^{-t} & 10e^{2t} \\ -e^t & 7e^{-t} & 2e^{2t} \\ 8e^t & 0 & -e^{2t} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2e^{2t} - 2 + 3e^{3t} & 1 + 4e^{-2t} - e^t & 3e^{3t} + 2e^t - e^{4t} \\ 4e^{2t} - 1 - 3e^{3t} & 2 + 2e^{-2t} + e^t & 6e^{3t} + e^t + e^{4t} \\ -2e^{2t} - 3 + 6e^{3t} & -1 + 6e^{-2t} - 2e^t & -3e^{3t} + 3e^t - 2e^{4t} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} e^t & -2e^{-t} & 2e^{2t} \\ 2e^t & -e^{-t} & -2e^{2t} \\ -e^t & -3e^{-t} & 4e^{2t} \end{pmatrix}$ (d) $(e-1)\begin{pmatrix} 1 & 2e^{-1} & \frac{1}{2}(e+1) \\ 2 & e^{-1} & -\frac{1}{2}(e+1) \\ -1 & 3e^{-1} & e+1 \end{pmatrix}$

Seção 7.3

1. $x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{7}{3}, \quad x_3 = -\frac{1}{3}$
2. Não tem solução
3. $x_1 = -c, \quad x_2 = c + 1, \quad x_3 = c$, onde c é arbitrário
4. $x_1 = c, \quad x_2 = -c, \quad x_3 = -c$, onde c é arbitrário
5. $x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$
6. Linearmente independentes
7. $\mathbf{x}^{(1)} - 5\mathbf{x}^{(2)} + 2\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0}$
8. $2\mathbf{x}^{(1)} - 3\mathbf{x}^{(2)} + 4\mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(4)} = \mathbf{0}$
9. Linearmente independentes
10. $\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(4)} = \mathbf{0}$
12. $3\mathbf{x}^{(1)}(t) - 6\mathbf{x}^{(2)}(t) + \mathbf{x}^{(3)}(t) = \mathbf{0}$
13. Linearmente independentes
15. $\lambda_1 = 2, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 4, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
16. $\lambda_1 = 1 + 2i, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 1 - 2i, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix}$
17. $\lambda_1 = -3, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -1, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
18. $\lambda_1 = 0, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 2, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$
19. $\lambda_1 = 2, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -2, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$
20. $\lambda_1 = -1/2, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -3/2, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
21. $\lambda_1 = 1, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 1 + 2i, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = 1 - 2i, \ \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$
22. $\lambda_1 = 1, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 2, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = 3, \ \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

23. $\lambda_1 = 1,\ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix};\quad \lambda_2 = 2,\ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};\quad \lambda_3 = -1,\ \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

24. $\lambda_1 = -1,\ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix};\quad \lambda_2 = -1,\ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\quad \lambda_3 = 8,\ \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Seção 7.4

2. (c) $W(t) = c\exp\int [p_{11}(t) + p_{22}(t)]\,dt$
6. (a) $W(t) = t^2$
   (b) $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são linearmente independentes em todos os pontos, exceto em $t = 0$; eles são linearmente independentes em todos os intervalos.
   (c) Pelo menos um coeficiente tem que ser descontínuo em $t = 0$.
   (d) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2t^{-2} & 2t^{-1} \end{pmatrix}\mathbf{x}$
7. (a) $W(t) = t(t-2)e^t$
   (b) $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são linearmente independentes em todos os pontos, exceto em $t = 0$ e $t = 2$; eles são linearmente independentes em todos os intervalos.
   (c) Pelo menos um coeficiente tem que ser descontínuo em $t = 0$ e em $t = 2$.
   (d) $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{2-2t}{t^2-2t} & \dfrac{t^2-2}{t^2-2t} \end{pmatrix}\mathbf{x}$

Seção 7.5

1. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}$

2. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-2t}$

3. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{-t}$

4. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}$

5. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}$

6. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t/2} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}$

7. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-2t}$

8. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t}$

9. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}e^{2t}$

10. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 2+i \\ -1 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-it}$

11. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t}$

12. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{8t}$

13. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}e^{-t} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{2t}$

14. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2t} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3t}$

15. $\mathbf{x} = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{2t} + \frac{7}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{4t}$

16. $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}e^{3t}$

17. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t}$

18. $\mathbf{x} = 6\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}e^{4t}$

20. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}t + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}t^{-1}$

21. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}t^2 + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}t^4$

22. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-2}$

23. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-1} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^2$

29. (a) $x_1' = x_2, \quad x_2' = -(c/a)x_1 - (b/a)x_2$

30. (a) $\mathbf{x} = -\frac{55}{8} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t/20} + \frac{29}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t/4}$

(c) $T \cong 74{,}39$

31. (a) $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-2+\sqrt{2})t/2} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-2-\sqrt{2})t/2}$;

$r_{1,2} = (-2 \pm \sqrt{2})/2$; nó

(b) $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{(-1+\sqrt{2})t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{(-1-\sqrt{2})t}$; $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$; ponto de sela

(c) $r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\alpha}$; $\alpha = 1$

32. (a) $\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$

33. (a) $\left(\frac{1}{CR_2} - \frac{R_1}{L}\right)^2 - \frac{4}{CL} > 0$

Seção 7.6

1. $\mathbf{x} = c_1 e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \\ -\cos 2t + \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}$

2. $\mathbf{x} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -2\operatorname{sen} 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$

3. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5\operatorname{sen} t \\ -\cos t + 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

4. $\mathbf{x} = c_1 e^{t/2} \begin{pmatrix} 5\cos \frac{3}{2}t \\ 3(\cos \frac{3}{2}t + \operatorname{sen} \frac{3}{2}t) \end{pmatrix} + c_2 e^{t/2} \begin{pmatrix} 5\operatorname{sen} \frac{3}{2}t \\ 3(-\cos \frac{3}{2}t + \operatorname{sen} \frac{3}{2}t) \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{x} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ 2\cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\cos t + 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

6. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -2\cos 3t \\ \cos 3t + 3\operatorname{sen} 3t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2\operatorname{sen} 3t \\ \operatorname{sen} 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen} 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}$

8. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t \\ \cos\sqrt{2}\,t \\ -\cos\sqrt{2}\,t - \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}\,t \end{pmatrix}$

$+ c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos\sqrt{2}\,t \\ \operatorname{sen}\sqrt{2}\,t \\ \sqrt{2}\cos\sqrt{2}\,t - \operatorname{sen}\sqrt{2}\,t \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{x} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t - 3\operatorname{sen} t \\ \cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{x} = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t - 5\operatorname{sen} t \\ -2\cos t - 3\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

11. (a) $r = -\frac{1}{4} \pm i$

12. (a) $r = \frac{1}{5} \pm i$

13. (a) $r = \alpha \pm i$ (b) $\alpha = 0$

14. (a) $r = (\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 20})/2$ (b) $\alpha = -\sqrt{20},\ 0,\ \sqrt{20}$

15. (a) $r = \pm\sqrt{4 - 5\alpha}$ (b) $\alpha = 4/5$

16. (a) $r = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3\alpha}$ (b) $\alpha = 0,\ 25/12$

17. (a) $r = -1 \pm \sqrt{-\alpha}$ (b) $\alpha = -1,\ 0$

18. (a) $r = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{49 - 24\alpha}$ (b) $\alpha = 2,\ 49/24$

19. (a) $r = \frac{1}{2}\alpha - 2 \pm \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha - 24}$ (b) $\alpha = -4 - 2\sqrt{10},\ -4 + 2\sqrt{10},\ 5/2$

20. (a) $r = -1 \pm \sqrt{25 + 8\alpha}$ (b) $\alpha = -25/8,\ -3$

21. $\mathbf{x} = c_1 t^{-1} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}\ln t) \\ \sqrt{2}\operatorname{sen}(\sqrt{2}\ln t) \end{pmatrix} + c_2 t^{-1} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\ln t) \\ -\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}\ln t) \end{pmatrix}$

22. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 5\cos(\ln t) \\ 2\cos(\ln t) + \operatorname{sen}(\ln t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5\operatorname{sen}(\ln t) \\ -\cos(\ln t) + 2\operatorname{sen}(\ln t) \end{pmatrix}$

23. (a) $r = -\frac{1}{4} \pm i,\ -\frac{1}{4}$

24. (a) $r = -\frac{1}{4} \pm i,\ \frac{1}{10}$

25. (b) $\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = c_1 e^{-t/2} \begin{pmatrix} \cos(t/2) \\ 4\operatorname{sen}(t/2) \end{pmatrix} + c_2 e^{-t/2} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t/2) \\ -4\cos(t/2) \end{pmatrix}$

(c) Use $c_1 = 2$, $c_2 = -\frac{3}{4}$ na resposta do item (b).

(d) $\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} V(t) = 0$; não

26. (b) $\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t + \cos t \end{pmatrix}$

(c) Use $c_1 = 2$ e $c_2 = 3$ na resposta do item (b).

(d) $\lim_{t\to\infty} I(t) = \lim_{t\to\infty} V(t) = 0$; não

28. (b) $r = \pm i\sqrt{k/m}$ (d) $|r|$ é a freqüência natural.

29. (c) $r_1^2 = -1$, $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $r_2^2 = -4$, $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

(d) $x_1 = 3c_1 \cos t + 3c_2 \operatorname{sen} t + 3c_3 \cos 2t + 3c_4 \operatorname{sen} 2t$,
$x_2 = 2c_1 \cos t + 2c_2 \operatorname{sen} t - 4c_3 \cos 2t - 4c_4 \operatorname{sen} 2t$

(e) $x_1' = -3c_1 \operatorname{sen} t + 3c_2 \cos t - 6c_3 \operatorname{sen} 2t + 6c_4 \cos 2t$,
$x_2' = -2c_1 \operatorname{sen} t + 2c_2 \cos t + 8c_3 \operatorname{sen} 2t - 8c_4 \cos 2t$

30. (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 9/4 & -13/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $r_1 = i$, $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}$; $r_2 = -i$, $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \\ -i \end{pmatrix}$;

$r_3 = \frac{5}{2}i$, $\boldsymbol{\xi}^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 10i \\ -\frac{15}{2}i \end{pmatrix}$; $r_4 = -\frac{5}{2}i$, $\boldsymbol{\xi}^{(4)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -10i \\ \frac{15}{2}i \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t \\ -\operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 4\cos \frac{5}{2}t \\ -3\cos \frac{5}{2}t \\ -10\operatorname{sen} \frac{5}{2}t \\ \frac{15}{2}\operatorname{sen} \frac{5}{2}t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 4\operatorname{sen} \frac{5}{2}t \\ -3\operatorname{sen} \frac{5}{2}t \\ 10\cos \frac{5}{2}t \\ -\frac{15}{2}\cos \frac{5}{2}t \end{pmatrix}$

(e) $c_1 = \frac{10}{7}$, $c_2 = 0$, $c_3 = \frac{1}{7}$, $c_4 = 0$. período $= 4\pi$.

31. (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $r_1 = i$, $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}$; $r_2 = -i$, $\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \\ -i \end{pmatrix}$;

$r_3 = \sqrt{3}i$, $\boldsymbol{\xi}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{3}i \\ -\sqrt{3}i \end{pmatrix}$; $r_4 = -\sqrt{3}i$, $\boldsymbol{\xi}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{3}i \\ \sqrt{3}i \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t \\ -\operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos \sqrt{3}t \\ -\cos \sqrt{3}t \\ -\sqrt{3}\operatorname{sen} \sqrt{3}t \\ \sqrt{3}\operatorname{sen} \sqrt{3}t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \sqrt{3}t \\ -\operatorname{sen} \sqrt{3}t \\ \sqrt{3}\cos \sqrt{3}t \\ -\sqrt{3}\cos \sqrt{3}t \end{pmatrix}$

(e) $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = -2$, $c_4 = 0$.

Seção 7.7

1. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t} & \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{2t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{2t} \end{pmatrix}$

2. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t/2} + \frac{1}{2}e^{-t} & e^{-t/2} - e^{-t} \\ \frac{1}{4}e^{-t/2} - \frac{1}{4}e^{-t} & \frac{1}{2}e^{-t/2} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$

3. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{t} - \frac{1}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{3}{2}e^{t} - \frac{3}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^{t} + \frac{3}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$

4. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^{-3t} + \frac{4}{5}e^{2t} & -\frac{1}{5}e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t} \\ -\frac{4}{5}e^{-3t} + \frac{4}{5}e^{2t} & \frac{4}{5}e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t} \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + 2\,\text{sen}\, t & -5\,\text{sen}\, t \\ \text{sen}\, t & \cos t - 2\,\text{sen}\, t \end{pmatrix}$

6. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos 2t & -2e^{-t}\,\text{sen}\, 2t \\ \frac{1}{2}e^{-t}\,\text{sen}\, 2t & e^{-t}\cos 2t \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{4t} & \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{4t} \\ -\frac{3}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{4t} & \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{4t} \end{pmatrix}$

8. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t + 2e^{-t}\,\text{sen}\, t & e^{-t}\,\text{sen}\, t \\ 5e^{-t}\,\text{sen}\, t & e^{-t}\cos t - 2e^{-t}\,\text{sen}\, t \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} + 3e^{-t} & -e^{-2t} + e^{-t} & -e^{-2t} + e^{-t} \\ \frac{5}{2}e^{-2t} - 4e^{-t} + \frac{3}{2}e^{2t} & \frac{5}{4}e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{13}{12}e^{2t} & \frac{5}{4}e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{12}e^{2t} \\ \frac{7}{2}e^{-2t} - 2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{2t} & \frac{7}{4}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{13}{12}e^{2t} & \frac{7}{4}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{12}e^{2t} \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}e^{t} + \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{3}e^{t} + \frac{1}{3}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^{t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} \\ -\frac{2}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} + e^{3t} & \frac{4}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} & -2e^{t} + e^{-2t} + e^{3t} \\ -\frac{1}{6}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} & \frac{1}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} & -\frac{1}{2}e^{t} + e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} \end{pmatrix}$

11. $\mathbf{x} = \frac{7}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}$

12. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}\cos 2t + \begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \end{pmatrix} e^{-t}\,\text{sen}\, 2t$

17. (c) $x = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \cos wt + \begin{pmatrix} v_0 \\ -w^2 u_0 \end{pmatrix} \frac{\text{sen}\, wt}{w}$

Seção 7.8

1. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} te^{t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}\right]$

2. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right]$

3. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}\right]$

4. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t/2} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t/2} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} e^{-t/2}\right]$

5. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}\right]$

6. $\mathbf{x} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$

7. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 + 4t \\ 2 + 4t \end{pmatrix} e^{-3t}$

8. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} - 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t}$

9. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{t/2} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{t/2}$

10. $\mathbf{x} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 14\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} t$

11. $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -33 \end{pmatrix} e^t + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} te^t + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$

12. $\mathbf{x} = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t/2} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} e^{-7t/2}$

13. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + c_2 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t \ln t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t \right]$

14. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^{-3} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^{-3} \ln t - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} t^{-3} \right]$

16. (b) $\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t/2} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} te^{-t/2} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t/2} \right]$

17. (b) $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$

(c) $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$

(d) $\mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (t^2/2)e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t}$

(e) $\mathbf{\Psi}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 & 1 & t+2 \\ 1 & t+1 & (t^2/2)+t \\ -1 & -t & -(t^2/2)+3 \end{pmatrix}$

(f) $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

18. (a) $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^t, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^t$

(d) $\mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$

(e) $\mathbf{\Psi}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 2 & 4t \\ 2 & -3 & -2t-1 \end{pmatrix}$ ou $e^t \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2t \\ 0 & 4 & 4t \\ 2 & -2 & -2t-1 \end{pmatrix}$

(f) $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 2 & -3/2 & -1 \end{pmatrix},$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

19. (a) $\mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^4 = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & \lambda^4 \end{pmatrix}$

(c) $\exp(\mathbf{J}t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\mathbf{x} = \exp(\mathbf{J}t)\mathbf{x}^0$

20. (c) $\exp(\mathbf{J}t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

21. (c) $\exp(\mathbf{J}t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Seção 7.9

1. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^t - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{-2t} - \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -1 \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{-t}$

3. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5\operatorname{sen} t \\ -\cos t + 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t\cos t - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t\operatorname{sen} t - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t$

4. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$

5. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ln t + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} t^{-1} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} t^{-2}$

6. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ln t + \frac{8}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \frac{4}{25} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix} e^t$

8. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^t$

9. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t/2} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} \frac{17}{4} \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^t$

10. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} te^{-t} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{2} \\ -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t}$

11. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5\operatorname{sen} t \\ -\cos t + 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} t\cos t - \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \end{pmatrix} t\operatorname{sen} t$
$- \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t$

12. $\mathbf{x} = [\frac{1}{5}\ln(\operatorname{sen} t) - \ln(-\cos t) - \frac{2}{5}t + c_1] \begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$
$+ [\frac{2}{5}\ln(\operatorname{sen} t) - \frac{4}{5}t + c_2] \begin{pmatrix} 5\operatorname{sen} t \\ -\cos t + 2\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

13. (a) $\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t/2}\cos\frac{1}{2}t & e^{-t/2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}t \\ 4e^{-t/2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}t & -4e^{-t/2}\cos\frac{1}{2}t \end{pmatrix}$ (b) $\mathbf{x} = e^{-t/2} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\frac{1}{2}t \\ 4 - 4\cos\frac{1}{2}t \end{pmatrix}$

14. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{-1} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t\ln t - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} t^2$

15. $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-1} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} t + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t^4 - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

CAPÍTULO 8 Seção 8.1

1. (a) 1,1975; 1,38549; 1,56491; 1,73658
   (b) 1,19631; 1,38335; 1,56200; 1,73308
   (c) 1,19297; 1,37730; 1,55378; 1,72316
   (d) 1,19405; 1,37925; 1,55644; 1,72638
2. (a) 1,59980; 1,29288; 1,07242; 0,930175
   (b) 1,61124; 1,31361; 1,10012; 0,962552
   (c) 1,64337; 1,37164; 1,17763; 1,05334
   (d) 1,63301; 1,35295; 1,15267; 1,02407
3. (a) 1,2025; 1,41603; 1,64289; 1,88590
   (b) 1,20388; 1,41936; 1,64896; 1,89572
   (c) 1,20864; 1,43104; 1,67042; 1,93076
   (d) 1,20693; 1,42683; 1,66265; 1,91802
4. (a) 1,10244; 1,21426; 1,33484; 1,46399
   (b) 1,10365; 1,21656; 1,33817; 1,46832
   (c) 1,10720; 1,22333; 1,34797; 1,48110
   (d) 1,10603; 1,22110; 1,34473; 1,47688
5. (a) 0,509239; 0,522187; 0,539023; 0,559936
   (b) 0,509701; 0,523155; 0,540550; 0,562089
   (c) 0,511127; 0,526155; 0,545306; 0,568822
   (d) 0,510645; 0,525138; 0,543690; 0,566529
6. (a) −0,920498; −0,857538; −0,808030; −0,770038
   (b) −0,922575; −0,860923; −0,812300; −0,774965
   (c) −0,928059; −0,870054; −0,824021; −0,788686
   (d) −0,926341; −0,867163; −0,820279; −0,784275
7. (a) 2,90330; 7,53999; 19,4292; 50,5614
   (b) 2,93506; 7,70957; 20,1081; 52,9779
   (c) 3,03951; 8,28137; 22,4562; 61,5496
   (d) 3,00306; 8,07933; 21,6163; 58,4462
8. (a) 0,891830; 1.25225; 2,37818; 4,07257
   (b) 0,908902; 1,26872; 2,39336; 4,08799
   (c) 0,958565; 1,31786; 2,43924; 4,13474
   (d) 0,942261; 1,30153; 2,42389; 4,11908
9. (a) 3,95713; 5,09853; 6,41548; 7,90174
   (b) 3,95965; 5,10371; 6,42343; 7,91255
   (c) 3,96727; 5,11932; 6,44737; 7,94512
   (d) 3,96473; 5,11411; 6,43937; 7,93424
10. (a) 1,60729; 2,46830; 3,72167; 5,45963
    (b) 1,60996; 2,47460; 3,73356; 5,47774
    (c) 1,61792; 2,49356; 3,76940; 5,53223
    (d) 1,61528; 2,48723; 3,75742; 5,51404
11. (a) −1,45865; −0,217545; 1,05715; 1,41487
    (b) −1,45322; −0,180813; 1,05903; 1,41244
    (c) −1,43600; −0,0681657; 1,06489; 1,40575
    (d) −1,44190; −0,105737; 1,06290; 1,40789
12. (a) 0,587987; 0,791589; 1,14743; 1,70973
    (b) 0,589440; 0,795758; 1,15693; 1,72955
    (c) 0,593901; 0,808716; 1,18687; 1,79291
    (d) 0,592396; 0,804319; 1,17664; 1,77111
15. 1,595; 2,4636
16. $e_{n+1} = [2\phi(\bar{t}_n) - 1]h^2, \quad |e_{n+1}| \leq \left[1 + 2\max_{0\leq t\leq 1}|\phi(t)|\right]h^2,$
    $e_{n+1} = e^{2\bar{t}_n}h^2, \quad |e_1| \leq 0{,}012, \quad |e_4| \leq 0{,}022$
17. $e_{n+1} = [2\phi(\bar{t}_n) - \bar{t}_n]h^2, \quad |e_{n+1}| \leq \left[1 + 2\max_{0\leq t\leq 1}|\phi(t)|\right]h^2,$
    $e_{n+1} = 2e^{2\bar{t}_n}h^2, \quad |e_1| \leq 0{,}024, \quad |e_4| \leq 0{,}045$
18. $e_{n+1} = [\bar{t}_n + \bar{t}_n^2\phi(\bar{t}_n) + \phi^3(\bar{t}_n)]h^2$
19. $e_{n+1} = [19 - 15\bar{t}_n\phi^{-1/2}(\bar{t}_n)]h^2/4$
20. $e_{n+1} = \{1 + [\bar{t}_n + \phi(\bar{t}_n)]^{-1/2}\}h^2/4$
21. $e_{n+1} = \{2 - [\phi(\bar{t}_n) + 2\bar{t}_n^2]\exp[-\bar{t}_n\phi(\bar{t}_n)] - \bar{t}_n\exp[-2\bar{t}_n\phi(\bar{t}_n)]\}h^2/2$

22. (a) $\phi(t) = 1 + (1/5\pi)\,\text{sen}\,5\pi t$ (b) 1,2; 1,0; 1,2
(c) 1,1; 1,1; 1,0; 1,0 (d) $h < 1/\sqrt{50\pi} \cong 0{,}08$
24. $e_{n+1} = -\frac{1}{2}\phi''(\bar{t}_n)h^2$
25. (a) 1,55; 2,34; 3,46; 5,07
(b) 1,20; 1,39; 1,57; 1,74
(c) 1,20; 1,42; 1,65; 1,90
26. (a) 0 (b) 60 (c) −92,16
27. $0{,}224 \neq 0{,}225$

Seção 8.2

1. (a) 1,19512; 1,38120; 1,55909; 1,72956
(b) 1,19515; 1,38125; 1,55916; 1,72965
(c) 1,19516; 1,38126; 1,55918; 1,72967
2. (a) 1,62283; 1,33460; 1,12820; 0,995445
(b) 1,62243; 1,33386; 1,12718; 0,994215
(c) 1,62234; 1,33368; 1,12693; 0,993921
3. (a) 1,20526; 1,42273; 1,65511; 1,90570
(b) 1,20533; 1,42290; 1,65542; 1,90621
(c) 1,20534; 1,42294; 1,65550; 1,90634
4. (a) 1,10483; 1,21882; 1,34146; 1,47263
(b) 1,10484; 1,21884; 1,34147; 1,47262
(c) 1,10484; 1,21884; 1,34147; 1,47262
5. (a) 0,510164; 0,524126; 0,542083; 0,564251
(b) 0,510168; 0,524135; 0,542100; 0,564277
(c) 0,510169; 0,524137; 0,542104; 0,564284
6. (a) −0,924650; −0,864338; −0,816642; −0,780008
(b) −0,924550; −0,864177; −0,816442; −0,779781
(c) −0,924525; −0,864138; −0,816393; −0,779725
7. (a) 2,96719; 7,88313; 20,8114; 55,5106
(b) 2,96800; 7,88755; 20,8294; 55,5758
8. (a) 0,926139; 1,28558; 2,40898; 4,10386
(b) 0,925815; 1,28525; 2,40869; 4,10359
9. (a) 3,96217; 5,10887; 6,43134; 7,92332
(b) 3,96218; 5,10889; 6,43138; 7,92337
10. (a) 1,61263; 2,48097; 3,74556; 5,49595
(b) 1,61263; 2,48092; 3,74550; 5,49589
11. (a) −1,44768; −0,144478; 1,06004; 1,40960
(b) −1,44765; −0,143690; 1,06072; 1,40999
12. (a) 0,590897; 0,799950; 1,16653; 1,74969
(b) 0,590906; 0,799988; 1,16663; 1,74992
15. $e_{n+1} = (38h^3/3)\exp(4\bar{t}_n)$, $|e_{n+1}| \leq 37.758{,}8h^3$ em $0 \leq t \leq 2$, $|e_1| \leq 0{,}00193389$
16. $e_{n+1} = (2h^3/3)\exp(2\bar{t}_n)$, $|e_{n+1}| \leq 4{,}92604h^3$ em $0 \leq t \leq 1$, $|e_1| \leq 0{,}000814269$
17. $e_{n+1} = (4h^3/3)\exp(2\bar{t}_n)$, $|e_{n+1}| \leq 9{,}85207h^3$ em $0 \leq t \leq 1$, $|e_1| \leq 0{,}00162854$
18. $h \cong 0{,}071$
19. $h \cong 0{,}023$
20. $h \cong 0{,}081$
21. $h \cong 0{,}117$
23. 1,19512; 1,38120; 1,55909; 1,72956
24. 1,62268; 1,33435; 1,12789; 0,995130
25. 1,20526; 1,42273; 1,65511; 1,90570
26. 1,10485; 1,21886; 1,34149; 1,47264

Seção 8.3

1. (a) 1,19516; 1,38127; 1,55918; 1,72968
(b) 1,19516; 1,38127; 1,55918; 1,72968
2. (a) 1,62231; 1,33362; 1,12686; 0,993839
(b) 1,62230; 1,33362; 1,12685; 0,993826
3. (a) 1,20535; 1,42295; 1,65553; 1,90638
(b) 1,20535; 1,42296; 1,65553; 1,90638
4. (a) 1,10484; 1,21884; 1,34147; 1,47262
(b) 1,10484; 1,21884; 1,34147; 1,47262
5. (a) 0,510170; 0,524138; 0,542105; 0,564286
(b) 0,520169; 0,524138; 0,542105; 0,564286
6. (a) −0,924517; −0,864125; −0,816377; −0,779706
(b) −0,924517; −0,864125; −0,816377; −0,779706

7. (a) 2,96825; 7,88889; 20,8349; 55,5957
   (b) 2,96828; 7,88904; 20,8355; 55,5980
8. (a) 0,925725; 1,28516; 2,40860; 4,10350
   (b) 0,925711; 1,28515; 2,40860; 4,10350
9. (a) 3,96219; 5,10890; 6,43139; 7,92338
   (b) 3,96219; 5,10890; 6,43139; 7,92338
10. (a) 1,61262; 2,48091; 3,74548; 5,49587
    (b) 1,61262; 2,48091; 3,74548; 5,49587
11. (a) −1,44764; −0,143543; 1,06089; 1,41008
    (b) −1,44764; −0,143427; 1,06095; 1,41011
12. (a) 0,590909; 0,800000; 1,166667; 1,75000
    (b) 0,590909; 0,800000; 1,166667; 1,75000

Seção 8.4

1. (a) 1,7296801; 1,8934697
   (b) 1,7296802; 1,8934698
   (c) 1,7296805; 1,8934711
2. (a) 0,993852; 0,925764
   (b) 0,993846; 0,925746
   (c) 0,993869; 0,925837
3. (a) 1,906382; 2,179567
   (b) 1,906391; 2,179582
   (c) 1,906395; 2,179611
4. (a) 1,4726173; 1,6126215
   (b) 1,4726189; 1,6126231
   (c) 1,4726199; 1,6126256
5. (a) 0,56428577; 0,59090918
   (b) 0,56428581, 0,59090923
   (c) 0,56428588; 0,59090952
6. (a) −0,779693; −0,753135
   (b) −0,779692; −0,753137
   (c) −0,779680; −0,753089
7. (a) 2,96828; 7,88907; 20,8356; 55,5984
   (b) 2,96829; 7,88909; 20,8357; 55,5986
   (c) 2,96831; 7,88926; 20,8364; 55,6015
8. (a) 0,9257133; 1,285148; 2,408595; 4,103495
   (b) 0,9257124; 1,285148; 2,408595; 4,103495
   (c) 0,9257248; 1,285158; 2,408594; 4,103493
9. (a) 3,962186; 5,108903; 6,431390; 7,923385
   (b) 3,962186; 5,108903; 6,431390; 7,923385
   (c) 3,962186; 5,108903; 6,431390; 7,923385
10. (a) 1,612622; 2,480909; 3,745479; 5,495872
    (b) 1,612622; 2,480909; 3,745479; 5,495873
    (c) 1,612623; 2,480905; 3,745473; 5,495869
11. (a) −1,447639; −0,1436281; 1,060946; 1,410122
    (b) −1,447638; −0,1436762; 1,060913, 1,410103
    (c) −1,447621; −0,1447219; 1,060717; 1,410027
12. (a) 0,5909091; 0,8000000; 1,166667; 1,750000
    (b) 0,5909091; 0,8000000; 1,166667; 1,750000
    (c) 0,5909092; 0,8000002; 1,166667; 1,750001

Seção 8.5

1. (b) $\phi_2(t) - \phi_1(t) = 0{,}001e^t \to \infty$ quando $t \to \infty$
2. (b) $\phi_1(t) = \ln[e^t/(2 - e^t)]$; $\phi_2(t) = \ln[1/(1 - t)]$
3. (a, b) $h = 0{,}00025$ é suficiente.
   (c) $h = 0{,}005$ é suficiente.
4. (a) $y = 4e^{-10t} + (t^2/4)$.
   (c) O método de Runge-Kutta é estável para $h = 0{,}25$, mas é instável para $h = 0{,}3$.
   (d) $h = 5/13 \approx 0{,}384615$ é suficientemente pequeno.
5. (a) $y = t$
6. (a) $y = t^2$

Seção 8.6

1. (a) 1,26; 0,76; 1,7714; 1,4824; 2,58991; 2,3703; 3,82374; 3,60413; 5,64246; 5,38885
   (b) 1,32493; 0,758933; 1,93679; 1,57919; 2,93414; 2,66099; 4,48318; 4,22639; 6,84236, 6,56452
   (c) 1,32489; 0,759516; 1,9369; 1,57999; 2,93459; 2,66201; 4,48422; 4,22784; 6,8444; 6,56684

2. (a) 1,451; 1,232; 2,16133; 1,65988; 3,29292; 2,55559; 5,16361; 4,7916; 8,54951; 12,0464
(b) 1,51844; 1,28089; 2,37684; 1,87711; 3,85039; 3,44859; 6,6956; 9,50309; 15,0987; 64,074
(c) 1,51855; 1,2809; 2,3773; 1,87729; 3,85247; 3,45126; 6,71282; 9,56846; 15,6384; 70,3792
3. (a) 0,582; 1,18; 0,117969; 1,27344; −0,336912; 1,27382; −0,730007; 1,18572; −1,02134; 1,02371
(b) 0,568451; 1,15775; 0,109776; 1,22556; −0,32208; 1,20347; −0,681296; 1,10162; −0,937852; 0,937852
(c) 0,56845; 1,15775; 0,109773; 1,22557; −0,322081; 1,20347; −0,681291; 1,10161; −0,937841; 0,93784
4. (a) −0,198; 0,618; −0,378796; 0,28329; −0,51932; −0,0321025; −0,594324; −0,326801; −0,588278; −0,57545
(b) −0,196904; 0,630936; −0,372643; 0,298888; −0,501302; −0,0111429; −0,561270; −0,288943; −0,547053; −0,508303
(c) −0,196935; 0,630939; −0,372687; 0,298866; −0,501345; −0,0112184; −0,561292; −0,28907; −0,547031; −0,508427
5. (a) 2,96225; 1,34538; 2,34119; 1,67121; 1,90236; 1,97158; 1,56602; 2,23895; 1,29768; 2,46732
(b) 3,06339; 1,34858; 2,44497; 1,68638; 1,9911; 2,00036; 1,63818; 2,27981; 1,3555; 2,5175
(c) 3,06314; 1,34899; 2,44465; 1,68699; 1,99075; 2,00107; 1,63781; 2,28057; 1,35514; 2,51827
6. (a) 1,42386; 2,18957; 1,82234; 2,36791; 2,21728; 2,53329; 2,61118; 2,68763; 2,9955; 2,83354
(b) 1,41513; 2,18699; 1,81208; 2,36233; 2,20635; 2,5258; 2,59826; 2,6794; 2,97806; 2,82487
(c) 1,41513; 2,18699; 1,81209; 2,36233; 2,20635; 2,52581; 2,59826; 2,67941; 2,97806; 2,82488
7. Para $h = 0{,}05$ e $0{,}025$: $x = 10{,}227$ e $y = -4{,}9294$; esses resultados estão de acordo com a solução exata até cinco dígitos.
8. 1,543; 0,0707503; 1,14743; −1,3885
9. 1,99521; −0,662442

CAPÍTULO 9 Seção 9.1

1. (a) $r_1 = -1$, $\xi^{(1)} = (1, 2)^T$; $r_2 = 2$, $\xi^{(2)} = (2, 1)^T$.
(b) Ponto de sela, instável.
2. (a) $r_1 = 2$, $\xi^{(1)} = (1, 3)^T$; $r_2 = 4$, $\xi^{(2)} = (1, 1)^T$.
(b) Nó, instável.
3. (a) $r_1 = -1$, $\xi^{(1)} = (1, 3)^T$; $r_2 = 1$, $\xi^{(2)} = (1, 1)^T$.
(b) Ponto de sela, instável.
4. (a) $r_1 = r_2 = -3$; $\xi^{(1)} = (1, 1)^T$.
(b) Nó impróprio, assintoticamente instável.
5. (a) $r_1, r_2 = -1 \pm i$; $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} = (2 \pm i, 1)^T$.
(b) Ponto espiral, assintoticamente estável.
6. (a) $r_1, r_2 = \pm i$; $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} = (2 \pm i, 1)^T$.
(b) Centro, estável.
7. (a) $r_1, r_2 = -1 \pm 2i$; $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} = (1, 1 \mp i)^T$.
(b) Ponto espiral, instável.
8. (a) $r_1 = -1$, $\xi^{(1)} = (1, 0)^T$; $r_2 = -1/4$, $\xi^{(2)} = (4, -3)^T$.
(b) Nó, assintoticamente estável.
9. (a) $r_1 = r_2 = 1$; $\xi^{(1)} = (2, 1)^T$.
(b) Nó impróprio, instável.
10. (a) $r_1, r_2 = \pm 3i$; $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} = (2, -1 \pm 3i)^T$.
(b) Centro, estável.
11. (a) $r_1 = r_2 = -1$; $\xi^{(1)} = (1, 0)^T$, $\xi^{(2)} = (0, 1)^T$.
(b) Nó próprio, assintoticamente estável.
12. (a) $r_1, r_2 = (1 \pm 3i)/2$; $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} = (5, 3 \mp 3i)^T$.
(b) Ponto espiral, instável.
13. $x_0 = 1$, $y_0 = 1$; $r_1 = \sqrt{2}$, $r_2 = -\sqrt{2}$; ponto de sela, instável.
14. $x_0 = -1$, $y_0 = 0$; $r_1 = -1$, $r_2 = -3$; nó, assintoticamente estável.
15. $x_0 = -2$, $y_0 = 1$; $r_1, r_2 = -1 \pm \sqrt{2}\, i$; ponto espiral, assintoticamente estável.
16. $x_0 = \gamma/\delta$, $y_0 = \alpha/\beta$; $r_1, r_2 = \pm\sqrt{\beta\delta}\, i$; centro, estável.

17. $c^2 > 4km$, nó, assintoticamente estável; $c^2 = 4km$, nó impróprio, assintoticamente estável; $c^2 < 4km$, ponto espiral, assintoticamente estável.

Seção 9.2

1. $x = 4e^{-t}$, $y = 2e^{-2t}$, $y = x^2/8$
2. $x = 4e^{-t}$, $y = 2e^{2t}$, $y = 32x^{-2}$; $x = 4e^{-t}$, $y = 0$
3. $x = 4\cos t$, $y = 4\operatorname{sen} t$, $x^2 + y^2 = 16$; $x = -4\operatorname{sen} t$, $y = 4\cos t$, $x^2 + y^2 = 16$
4. $x = \sqrt{a}\cos\sqrt{ab}\,t$, $y = -\sqrt{b}\operatorname{sen}\sqrt{ab}\,t$; $(x^2/a) + (y^2/b) = 1$
5. (a, c) $(-1/2, 1)$, ponto de sela, instável; $(0, 0)$, nó (próprio), instável.
6. (a, c) $(-\sqrt{3}/3, -1/2)$, ponto de sela, instável; $(\sqrt{3}/3, -1/2)$, centro, estável.
7. (a, c) $(0, 0)$, nó, instável; $(0, 2)$, nó, assintoticamente estável; $(1/2, 1/2)$, ponto de sela, instável; $(1, 0)$, nó, assintoticamente estável.
8. (a, c) $(0, 0)$, ponto de sela, instável; $(0, 1)$, ponto espiral, assintoticamente estável; $(-2, -2)$, nó, assintoticamente estável; $(3, -2)$, nó, instável.
9. (a, c) $(0, 0)$, ponto espiral, assintoticamente estável; $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$, ponto de sela, instável; $(1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$, ponto de sela, instável.
10. (a, c) $(0, 0)$, ponto de sela, instável; $(2, 2)$, ponto espiral, assintoticamente estável; $(-1, -1)$, ponto espiral, assintoticamente estável; $(-2, 0)$, ponto de sela, instável.
11. (a, c) $(0, 0)$, ponto de sela, instável; $(0, 1)$, ponto de sela, instável; $(1/2, 1/2)$, centro, estável; $(-1/2, 1/2)$, centro, estável.
12. (a, c) $(0, 0)$, ponto de sela, instável; $(\sqrt{6}, 0)$, ponto espiral, assintoticamente estável; $(-\sqrt{6}, 0)$, ponto espiral, assintoticamente estável.
13. (a, c) $(0, 0)$, ponto de sela, instável; $(-2, 2)$, nó, instável; $(4, 4)$, ponto espiral, assintoticamente estável.
14. (a, c) $(0, 0)$, ponto espiral, instável.
15. (a) $4x^2 - y^2 = c$
16. (a) $4x^2 + y^2 = c$
17. (a) $(y - 2x)^2(x + y) = c$
18. (a) $\operatorname{arctg}(y/x) - \ln\sqrt{x^2 + y^2} = c$
19. (a) $2x^2y - 2xy + y^2 = c$
20. (a) $x^2y^2 - 3x^2y - 2y^2 = c$
21. (a) $(y^2/2) - \cos x = c$
22. (a) $x^2 + y^2 - (x^4/12) = c$

Seção 9.3

1. Linear e não-linear: ponto de sela, instável.
2. Linear e não-linear: ponto espiral, assintoticamente estável.
3. Linear: centro, estável; não-linear: ponto espiral ou centro, indeterminado.
4. Linear: nó impróprio, instável; não-linear: nó ou ponto espiral, instável.
5. (a, b, c) $(0, 0)$; $u' = -2u + 2v$, $v' = 4u + 4v$, $r = 1 \pm \sqrt{17}$; ponto de sela, instável.
   $(-2, 2)$; $u' = 4u$, $v' = 6u + 6v$, $r = 4, 6$; nó, instável.
   $(4, 4)$; $u' = -6u + 6v$, $v' = -8u$; $r = -3 \pm \sqrt{39}\,i$; ponto espiral, assintoticamente estável.
6. (a, b, c) $(0, 0)$; $u' = u$, $v' = 3v$, $r = 1, 3$; nó, instável.
   $(1, 0)$; $u' = -u - v$, $v' = 2v$, $r = -1, 2$; ponto de sela, instável.
   $(0, 3/2)$; $u' = (-1/2)u$, $v' = (-3/2)u - 3v$, $r = -1/2, -3$; nó, assintoticamente estável.
   $(-1, 2)$; $u' = u + v$, $v' = -2u - 4v$, $r = (-3 \pm \sqrt{17})/2$; ponto de sela, instável.
7. (a, b, c) $(1, 1)$; $u' = -v$, $v' = 2u - 2v$, $r = -1 \pm i$; ponto espiral, assintoticamente estável.
   $(-1, 1)$; $u' = -v$, $v' = -2u - 2v$, $r = -1 \pm \sqrt{3}$; ponto de sela, instável.
8. (a, b, c) $(0, 0)$; $u' = u$, $v' = (1/2)v$, $r = 1, 1/2$; nó, instável.
   $(0, 2)$; $u' = -u$, $v' = (-3/2)u - (1/2)v$, $r = -1, -1/2$; nó, assintoticamente estável.
   $(1, 0)$; $u' = -u - v$, $v' = (-1/4)v$, $r = -1, -1/4$; nó, assintoticamente estável.
   $(1/2, 1/2)$; $u' = (-1/2)u - (1/2)v$, $v' = (-3/8)u - (1/8)v$, $r = (-5 \pm \sqrt{57})/16$; ponto de sela, instável.
9. (a, b, c) $(0, 0)$; $u' = -u + v$, $v' = 2u$; $r = -2, 1$; ponto de sela, instável.
   $(0, 1)$; $u' = -u - v$, $v' = 3u$; $r = (-1 \pm \sqrt{11}\,i)/2$; ponto espiral, assintoticamente estável.
   $(-2, -2)$; $u' = -5u + 5v$, $v' = -2v$, $r = -5, -2$; nó, assintoticamente estável.
   $(3, -2)$; $u' = 5u + 5v$, $v' = 3v$, $r = 5, 3$; nó, instável.
10. (a, b, c) $(0, 0)$; $u' = u$, $v' = v$, $r = 1, 1$; nó ou ponto espiral, instável. $(-1, 0)$; $u' = -u$, $v' = 2v$, $r = -1, 2$; ponto de sela, instável.
11. (a, b, c) $(0, 0)$; $u' = 2u + v$, $v' = u - 2v$, $r = \pm\sqrt{5}$; ponto de sela, instável. $(-1{,}1935; -1{,}4797)$; $u' = -1{,}2399u - 6{,}8393v$, $v' = 2{,}4797u - 0{,}80655v$, $r = -1{,}0232 \pm 4{,}1125i$; ponto espiral, assintoticamente estável.
12. (a, b, c) $(0, \pm 2n\pi)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $u' = v$, $v' = -u$; $r = \pm i$; centro ou ponto espiral, indeterminado. $(2, \pm(2n - 1)\pi)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; $u' = -3v$, $v' = -u$; $r = \pm\sqrt{3}$; ponto de sela, instável.
13. (a, b, c) $(0, 0)$; $u' = u$, $v' = v$, $r = 1, 1$; nó ou ponto espiral, instável. $(1, 1)$; $u' = u - 2v$, $v' = -2u + v$, $r = 3, -1$; ponto de sela, instável.
14. (a, b, c) $(1, 1)$; $u' = -u - v$, $v' = u - 3v$, $r = -2, -2$; nó ou ponto espiral, assintoticamente estável. $(-1, -1)$; $u' = u + v$, $v' = u - 3v$, $r = -1 \pm\sqrt{5}$; ponto de sela, instável.

15. (a, b, c) (0, 0); $u' = -2u - v$, $v' = u - v$, $r = (-3 \pm \sqrt{3}i)/2$; ponto espiral, assintoticamente estável. (−0,33076; 1,0924) e (0,33076; −1,0924); $u' = -3{,}5216u - 0{,}27735v$, $v' = 0{,}27735u + 2{,}6895v$, $r = -3{,}5092$; 2,6771; ponto de sela, instável.
16. (a, b, c) (0, 0); $u' = u + v$, $v' = -u + v$, $r = 1 \pm i$; ponto espiral, instável.
19. (b, c) Veja a Tabela 9.3.1.
21. (a) $R = A$, $T \cong 3{,}17$ (b) $R = A$, $T \cong 3{,}20$; 3,35; 3,63; 4,17
    (c) $T \to \pi$ quando $A \to 0$ (d) $A = \pi$
22. (b) $v_c \cong 4{,}00$
23. (b) $v_c \cong 4{,}51$
28. (a) $dx/dt = y$, $dy/dt = -g(x) - c(x)y$
    (b) O sistema linear é $dx/dt = y$, $dy/dt = -g'(0)x - c(0)y$.
    (c) Os autovalores satisfazem $r^2 + c(0)r + g'(0) = 0$.

Seção 9.4

1. (b, c) (0, 0); $u' = (3/2)u$, $v' = 2v$, $r = 3/2, 2$; nó, instável. (0, 2); $u' = (1/2)u$, $v' = (-3/2)u - 2v$, $r = 1/2, -2$; ponto de sela, instável. (3/2, 0); $u' = (-3/2)u - (3/4)v$, $v' = (7/8)v$, $r = -3/2, 7/8$; ponto de sela, instável. (4/5, 7/5); $u' = (-4/5)u - (2/5)v$, $v' = (-21/20)u - (7/5)v$, $r = (-22 \pm \sqrt{204})/20$; nó, assintoticamente estável.
2. (b, c) (0, 0); $u' = (3/2)u$, $v' = 2v$, $r = 3/2, 2$; nó, instável. (0, 4); $u' = (-1/2)u$, $v' = -6u - 2v$, $r = -1/2, -2$; nó, assintoticamente estável. (3/2, 0); $u' = (-3/2)u - (3/4)v$, $v' = (-1/4)v$, $r = -1/4, -3/2$; nó, assintoticamente estável. (1, 1); $u' = -u - (1/2)v$, $v' = (-3/2)u - (1/2)v$, $r = (-3 \pm \sqrt{13})/4$; ponto de sela, instável.
3. (b, c) (0, 0); $u' = (3/2)u$, $v' = 2v$, $r = 3/2, 2$; nó, instável. (0, 2); $u' = (-1/2)u$, $v' = (-9/4)u - 2v$, $r = -1/2, -2$; nó, assintoticamente estável. (3, 0); $u' = (-3/2)u - 3v$, $v' = (-11/8)v$, $r = -3/2, -11/8$; nó, assintoticamente estável. (4/5, 11/10); $u' = (-2/5)u - (4/5)v$, $v' = (-99/80)u - (11/10)v$, $r = -1{,}80475$; 0,30475; ponto de sela, instável.
4. (b, c) (0, 0); $u' = (3/2)u$, $v' = (3/4)v$, $r = 3/2, 3/4$; nó, instável. (0, 3/4); $u' = (3/4)u$, $v' = (-3/4)v$, $r = \pm 3/4$; ponto de sela, instável. (3, 0); $u' = (-3/2)u - 3v$, $v' = (3/8)v$, $r = -3/2, 3/8$; ponto de sela, instável. (2, 1/2); $u' = -u - 2v$, $v' = (-1/16)u - (1/2)v$, $r = -1{,}18301$; $-0{,}31699$; nó, assintoticamente estável.
5. (b, c) (0, 0); $u' = u$, $v' = (3/2)v$, $r = 1, 3/2$; nó, instável. (0, 3/2); $u' = (-1/2)u$, $v' = (-3/2)u - (3/2)v$, $r = -1/2, -3/2$; nó, assintoticamente estável. (1, 0); $u' = -u - v$, $v' = (1/2)v$, $r = -1, 1/2$; ponto de sela, instável.
6. (b, c) (0, 0); $u' = u$, $v' = (5/2)v$, $r = 1, 5/2$; nó, instável. (0, 5/3); $u' = (11/6)u$, $v' = (5/12)u - (5/2)v$, $r = 11/6, -5/2$; ponto de sela, instável. (1, 0); $u' = -u + (1/2)v$, $v' = (11/4)v$, $r = -1, 11/4$; ponto de sela, instável. (2, 2); $u' = -2u + v$, $v' = (1/2)u - 3v$, $r = (-5 \pm \sqrt{3})/2$; nó, assintoticamente estável.
8. (a) Os pontos críticos são $x = 0, y = 0$; $x = \epsilon_1/\sigma_1, y = 0$; $x = 0, y = \epsilon_2/\sigma_2$. $x \to 0$, $y \to \epsilon_2/\sigma_2$ quando $t \to \infty$; os *lepomis microlofus* sobrevivem.
   (b) Os mesmos pontos críticos que em (a), mas $x \to \epsilon_1/\sigma_1$, $y \to 0$ quando $t \to \infty$; os *lepomis macrochirus* sobrevivem.
9. (a) $X = (B - \gamma_1 R)/(1 - \gamma_1\gamma_2)$, $Y = (R - \gamma_2 B)/(1 - \gamma_1\gamma_2)$.
   (b) X diminui, Y aumenta; sim, se B se tornar menor do que $\gamma_1 R$, então $x \to 0$ e $y \to R$ quando $t \to \infty$.
10. (a) $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1 \neq 0$: (0, 0), $(0, \epsilon_2/\sigma_2)$, $(\epsilon_1/\sigma_1, 0)$
    $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1 = 0$: (0, 0) e todos os pontos na reta $\sigma_1 x + \alpha_1 y = \epsilon_1$.
    (b) $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1 > 0$: (0, 0) é um nó instável; $(\epsilon_1/\sigma_1, 0)$ é um ponto de sela; $(0, \epsilon_2/\sigma_2)$ é um nó assintoticamente estável. $\sigma_1\epsilon_2 - \alpha_2\epsilon_1 < 0$: (0, 0) é um nó instável; $(0, \epsilon_2/\sigma_2)$ é um ponto de sela; $(\epsilon_1/\sigma_1, 0)$ é um nó assintoticamente estável.
    (c) (0, 0) é um nó instável; os pontos na reta $\sigma_1 x + \alpha_1 y = \epsilon_1$ são pontos críticos estáveis, não isolados.
12. (a) (0, 0), ponto de sela; (0,15; 0), ponto espiral se $\gamma^2 < 1{,}11$; nó se $\gamma^2 \geq 1{,}11$; (2, 0), ponto de sela.
    (c) $\gamma \approx 1{,}20$.
13. (b) $(2 - \sqrt{4 - \frac{3}{2}\alpha}, \frac{3}{2}\alpha)$, $(2 + \sqrt{4 - \frac{3}{2}\alpha}, \frac{3}{2}\alpha)$
    (c) (1, 3) é um nó assintoticamente estável; (3, 3) é um ponto de sela.
    (d) $\alpha_0 = 8/3$; o ponto crítico é (2, 4); $\lambda = 0, -1$.
14. (b) $(2 - \sqrt{4 - \frac{3}{2}\alpha}, \frac{3}{2}\alpha)$, $(2 + \sqrt{4 - \frac{3}{2}\alpha}, \frac{3}{2}\alpha)$
    (c) (1, 3) é um ponto de sela; (3,3) é um ponto espiral instável.
    (d) $\alpha_0 = 8/3$; o ponto crítico é (2, 4); $\lambda = 0{,}1$.
15. (b) $([3 - \sqrt{9 - 4\alpha}]/2, [3 + 2\alpha - \sqrt{9 - 4\alpha}]/2)$,
    $([3 + \sqrt{9 - 4\alpha}]/2, [3 + 2\alpha + \sqrt{9 - 4\alpha}]/2)$,
    (c) (1, 3) é um ponto de sela; (2, 4) é um ponto espiral instável.
    (d) $\alpha_0 = 9/4$; o ponto crítico é (3/2, 15/4); $\lambda = 0, 0$.
16. (b) $([3 - \sqrt{9 - 4\alpha}]/2, [3 + 2\alpha - \sqrt{9 - 4\alpha}]/2)$,
    $([3 + \sqrt{9 - 4\alpha}]/2, [3 + 2\alpha + \sqrt{9 - 4\alpha}]/2)$,
    (c) (1, 3) é um centro da aproximação linear e também do sistema não-linear; (2, 4) é um ponto de sela.
    (d) $\alpha_0 = 9/4$; o ponto crítico é (3/2, 15/4); $\lambda = 0, 0$.
17. (a) (0, 0), $(0, 2 + 2\alpha)$, (4, 0), (2, 2).
    (b) $\alpha = 0{,}75$, nó assintoticamente estável; $\alpha = 1{,}25$, ponto de sela (instável).

(c) $u' = -2u - 2v$, $v' = -2\alpha u - 2v$.
(d) $r = -2 \pm 2\sqrt{\alpha_0}$; $\alpha_0 = 1$.

Seção 9.5

1. (b, c) $(0, 0)$; $u' = (3/2)u$, $v' = (-1/2)v$, $r = 3/2, -1/2$; ponto de sela, instável. $(1/2, 3)$; $u' = (-1/4)v$, $v' = 3u$; $r = \pm\sqrt{3}\, i/2$; centro ou ponto espiral, indeterminado.
2. (b, c) $(0, 0)$; $u' = u$, $v' = (-1/4)v$, $r = 1, -1/4$; ponto de sela, instável. $(1/2, 2)$; $u' = (-1/4)v$, $v' = u$; $r = \pm(1/2)i$; centro ou ponto espiral, indeterminado.
3. (b, c) $(0, 0)$; $u' = u$, $v' = (-1/4)v$, $r = 1, -1/4$; ponto de sela, instável. $(2, 0)$; $u' = -u - v$, $v' = (3/4)v$, $r = -1, 3/4$; ponto de sela, instável. $(1/2, 3/2)$; $u' = (-1/4)u - (1/4)v$, $v' = (3/4)u$; $r = (-1 \pm \sqrt{11}\, i)/8$; ponto espiral, assintoticamente estável.
4. (b, c) $(0, 0)$; $u' = (9/8)u$, $v' = -v$, $r = 9/8, -1$; ponto de sela, instável. $(9/8, 0)$; $u' = (-9/8)u - (9/16)v$, $v' = (1/8)v$, $r = -9/8, 1/8$; ponto de sela, instável. $(1, 1/4)$; $u' = -u - (1/2)v$, $v' = (1/4)u$; $r = (-1 \pm \sqrt{0{,}5})/2$; nó, assintoticamente estável.
5. (b, c) $(0, 0)$; $u' = -u$, $v' = (-3/2)v$, $r = -1, -3/2$; nó, assintoticamente estável. $(1/2, 0)$; $u' = (3/4)u - (3/20)v$, $v' = -v$, $r = -1, 3/4$; ponto de sela, instável. $(2, 0)$; $u' = -3u - (3/5)v$, $v' = (1/2)v$, $r = -3, 1/2$; ponto de sela, instável. $(3/2, 5/3)$; $u' = (-3/4)u - (9/20)v$, $v' = (5/3)u$; $r = (-3 \pm \sqrt{39}\, i)/8$; ponto espiral, assintoticamente estável.
6. $t = 0, T, 2T, \ldots$: H é um máximo, dP/dt é um máximo. $t = T/4, 5T/4, \ldots$: dH/dt é um mínimo, P é um máximo. $t = T/2, 3T/2, \ldots$: H é um mínimo, dP/dt é um mínimo. $t = 3T/4, 7T/4, \ldots$: dH/dt é um máximo, P é um mínimo.
7. (a) $\sqrt{c}\,\alpha/\sqrt{a}\,\gamma$ (b) $\sqrt{3}$
(d) A razão das amplitudes da presa e do predador aumenta bem devagar quando o ponto inicial se afasta do ponto de equilíbrio.
8. (a) $4\pi/\sqrt{3} \cong 7{,}2552$
(c) O período aumenta devagar quando o ponto inicial se afasta do ponto de equilíbrio.
9. (a) $T \cong 6{,}5$ (b) $T \cong 3{,}7$, $T \cong 11{,}5$ (c) $T \cong 3{,}8$, $T \cong 11{,}1$
11. Pegue raposas durante o meio ciclo quando $dP/dt > 0$, coelhos durante o meio ciclo quando $dH/dt > 0$, raposas e coelhos, durante o quarto de ciclo quando $dP/dt > 0$ e $dH/dt > 0$, e nenhum deles durante o quarto de ciclo quando $dP/dt < 0$ e $dH/dt < 0$.
12. $dH/dt = aH - \alpha HP - \beta H$, $dP/dt = -cP + \gamma HP - \delta P$, onde β e δ são constantes de proporcionalidade. O novo centro é $H = (c + \delta)/\gamma > c/\gamma$ e $P = (a - \beta)/\alpha < a/\alpha$, de modo que o valor de equilíbrio da presa aumenta, enquanto o do predador diminui!
13. Seja $A = a/\sigma - c/\gamma > 0$. Os pontos críticos são $(0, 0)$, $(a/\sigma, 0)$ e $(c/\gamma, \sigma A/\alpha)$, onde $(0, 0)$ é um ponto de sela, $(a/\sigma, 0)$ é um ponto de sela e $(c/\gamma, \sigma A/\alpha)$ é um nó assintoticamente estável se $(c\sigma/\gamma)^2 - 4c\sigma A \geq 0$ ou um ponto espiral assintoticamente estável se $(c\sigma/\gamma)^2 - 4c\sigma A < 0$. $(H, P) \to (c/\gamma, \sigma A/\alpha)$ quando $t \to \infty$.

Seção 9.7

1. $r = 1$, $\theta = t + t_0$, ciclo limite assintoticamente estável.
2. $r = 1$, $\theta = -t + t_0$, ciclo limite semi-estável.
3. $r = 1$, $\theta = t + t_0$, ciclo limite assintoticamente estável; $r = 3$, $\theta = t + t_0$, solução periódica instável.
4. $r = 1$, $\theta = -t + t_0$, solução periódica instável; $r = 2$, $\theta = -t + t_0$, ciclo limite assintoticamente estável.
5. $r = 2n - 1$, $\theta = t + t_0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, ciclo limite assintoticamente estável; $r = 2n$, $\theta = t + t_0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, solução periódica instável.
6. $r = 2$, $\theta = -t + t_0$, ciclo limite semi-estável; $r = 3$, $\theta = -t + t_0$, solução periódica instável.
8. (a) Sentido trigonométrico.
(b) $r = 1$, $\theta = t + t_0$, ciclo limite assintoticamente estável; $r = 2$, $\theta = t + t_0$, ciclo limite semi-estável; $r = 3$, $\theta = t + t_0$, solução periódica instável.
9. $r = \sqrt{2}$, $\theta = -t + t_0$, solução periódica instável.
14. (a) $\mu = 0{,}2$, $T \cong 6{,}29$; $\mu = 1$, $T \cong 6{,}66$; $\mu = 5$, $T \cong 11{,}60$
15. (a) $x' = y$, $y' = -x + \mu y - \mu y^3/3$
(b) $0 < \mu < 2$, ponto espiral instável; $\mu \geq 2$, nó instável.
(c) $A \cong 2{,}16$, $T \cong 6{,}65$
(d) $\mu = 0{,}2$, $A \cong 1{,}99$, $T \cong 6{,}31$; $\mu = 0{,}5$, $A \cong 2{,}03$, $T \cong 6{,}39$;
$\mu = 2$, $A \cong 2{,}60$, $T \cong 7{,}65$; $\mu = 5$, $A \cong 4{,}36$, $T \cong 11{,}60$
16. (b) $x' = \mu x + y$, $y' = -x + \mu y$; $\lambda = \mu \pm i$; a origem é um ponto espiral assintoticamente estável para $\mu < 0$, um centro para $\mu = 0$ e um ponto espiral instável para $\mu > 0$.
(c) $r' = r(\mu - r^2)$, $\theta' = -1$.
17. (b) $\lambda = [-(5/4 - b) \pm \sqrt{(5/4 - b)^2 - 1}]/2$.
(c) $0 < b < 1/4$: nó assintoticamente estável; $1/4 < b < 5/4$: ponto espiral assintoticamente estável; $5/4 < b < 9/4$: ponto espiral instável; $9/4 < b$: nó instável.
(d) $b_0 = 5/4$.

18. (b) $k = 0$, $(1{,}1994; -0{,}62426)$; $k = 0{,}5$, $(0{,}80485; -0{,}13106)$.
(c) $k_0 \cong 0{,}3465$, $(0{,}95450; -0{,}31813)$.
(d) $k = 0{,}4$, $T \cong 11{,}23$; $k = 0{,}5$, $T \cong 10{,}37$; $k = 0{,}6$, $T \cong 9{,}93$.
(e) $k_1 \cong 1{,}4035$

Seção 9.8

1. (b) $\lambda = \lambda_1$, $\xi^{(1)} = (0, 0, 1)^T$; $\lambda = \lambda_2$, $\xi^{(2)} = (20, 9 - \sqrt{81 + 40r}, 0)^T$;
$\lambda = \lambda_3$, $\xi^{(3)} = (20, 9 + \sqrt{81 + 40r}, 0)^T$
(c) $\lambda_1 \cong -2{,}6667$, $\xi^{(1)} = (0; 0; 1)^T$; $\lambda_2 \cong -22{,}8277$, $\xi^{(2)} \cong (20; -25{,}6554; 0)^T$;
$\lambda_3 \cong 11{,}8277$, $\xi^{(3)} \cong (20; 43{,}6554; 0)^T$
2. (c) $\lambda_1 \cong -13{,}8546$; $\lambda_2, \lambda_3 \cong 0{,}0939556 \pm 10{,}1945i$
5. (a) $dV/dt = -2\sigma[rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 - br^2]$

CAPÍTULO 10

Seção 10.1

1. $y = -\operatorname{sen} x$
2. $y = (\operatorname{cotg}\sqrt{2}\pi \cos\sqrt{2}x + \operatorname{sen}\sqrt{2}x)/\sqrt{2}$
3. $y = 0$ para todo L; $y = c_2 \operatorname{sen} x$ se $\operatorname{sen} L = 0$.
4. $y = -\operatorname{tg} L \cos x + \operatorname{sen} x$ se $\cos L \neq 0$; não existe solução se $\cos L = 0$.
5. Não existe solução.
6. $y = (-\pi \operatorname{sen}\sqrt{2}x + x \operatorname{sen}\sqrt{2}\pi)/2 \operatorname{sen}\sqrt{2}\pi$
7. Não existe solução.
8. $y = c_2 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} x$
9. $y = c_1 \cos 2x + \frac{1}{3}\cos x$
10. $y = \frac{1}{2}\cos x$
11. $y = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}x^2$
12. $y = -\frac{1}{9}x^{-1} + \frac{1}{9}(1 - e^3)x^{-1}\ln x + \frac{1}{9}x^2$
13. Não existe solução.
14. $\lambda_n = [(2n - 1)/2]^2$, $y_n(x) = \operatorname{sen}[(2n - 1)x/2]$; $n = 1, 2, 3, \ldots$
15. $\lambda_n = [(2n - 1)/2]^2$, $y_n(x) = \cos[(2n - 1)x/2]$; $n = 1, 2, 3, \ldots$
16. $\lambda_0 = 0$, $y_0(x) = 1$; $\lambda_n = n^2$, $y_n(x) = \cos nx$; $n = 1, 2, 3, \ldots$
17. $\lambda_n = [(2n - 1)\pi/2L]^2$, $y_n(x) = \cos[(2n - 1)\pi x/2L]$; $n = 1, 2, 3, \ldots$
18. $\lambda_0 = 0$, $y_0(x) = 1$; $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $y_n(x) = \cos(n\pi x/L)$; $n = 1, 2, 3, \ldots$
19. $\lambda_n = -[(2n - 1)\pi/2L]^2$, $y_n(x) = \operatorname{sen}[(2n - 1)\pi x/2L]$; $n = 1, 2, 3, \ldots$
20. $\lambda_n = 1 + (n\pi/\ln L)^2$, $y_n = x \operatorname{sen}(n\pi \ln x/\ln L)$; $n = 1, 2, 3, \ldots$.
21. (a) $w(r) = G(R^2 - r^2)/4\mu$.
(c) Q fica reduzido a 0,3164 de seu valor original.
22. (a) $y = k(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)/24$.
(b) $y = k(x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2)/24$.
(c) $y = k(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)/24$.

Seção 10.2

1. $T = 2\pi/5$
2. $T = 1$
3. Não é periódica
4. $T = 2L$
5. $T = 1$
6. Não é periódica
7. $T = 2$
8. $T = 4$
9. $f(x) = 2L - x$ em $L < x < 2L$; $f(x) = -2L - x$ em $-3L < x < -2L$
10. $f(x) = x - 1$ em $1 < x < 2$; $f(x) = x - 8$ em $8 < x < 9$
11. $f(x) = -L - x$ em $-L < x < 0$
13. (b) $f(x) = \dfrac{2L}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$
14. (b) $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}[(2n - 1)\pi x/L]}{2n - 1}$
15. (b) $f(x) = -\dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\cos(2n - 1)x}{\pi(2n - 1)^2} + \frac{(-1)^{n+1}\operatorname{sen} nx}{n}\right]$
16. (b) $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n - 1)\pi x}{(2n - 1)^2}$

17. (b) $f(x) = \frac{3L}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2L\cos[(2n-1)\pi x/L]}{(2n-1)^2\pi^2} + \frac{(-1)^{n+1}L\,\text{sen}(n\pi x/L)}{n\pi}\right]$

18. (b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \text{sen}\,\frac{n\pi}{2}\right]\text{sen}\,\frac{n\pi x}{2}$

19. (b) $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}[(2n-1)\pi x/2]}{2n-1}$

20. (b) $f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\text{sen}\,n\pi x$

21. (b) $f(x) = \frac{2}{3} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$

22. (b) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{12}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[(2n-1)\pi x/2]}{(2n-1)^2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{2}$

23. (b) $f(x) = \frac{11}{12} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 5}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4[1-(-1)^n]}{n^3\pi^3} - \frac{(-1)^n}{n\pi}\right]\text{sen}\,\frac{n\pi x}{2}$

24. (b) $f(x) = \frac{9}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{162[(-1)^n - 1]}{n^4\pi^4} - \frac{27(-1)^n}{n^2\pi^2}\right]\cos\frac{n\pi x}{3} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{108(-1)^n + 54}{n^3\pi^3}\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{3}$

25. $m = 81$

26. $m = 27$

28. $\int_0^x f(t)\,dt$ pode não ser periódica; faça, por exemplo, $f(t) = 1 + \cos t$.

Seção 10.3

1. (a) $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{sen}(2n-1)\pi x}{2n-1}$

2. (a) $f(x) = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(2n-1)^2\pi}\cos(2n-1)x + \frac{(-1)^n}{n}\,\text{sen}\,nx\right]$

3. (a) $f(x) = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[(2n-1)\pi x/L]}{(2n-1)^2}$

4. (a) $f(x) = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos n\pi x$

5. (a) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos(2n-1)x$

6. (a) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x + b_n\,\text{sen}\,n\pi x)$;

$a_0 = \frac{1}{3}, \quad a_n = \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2}, \quad b_n = \begin{cases} -1/n\pi, & n \text{ par} \\ 1/n\pi - 4/n^3\pi^3, & n \text{ ímpar} \end{cases}$

7. (a) $f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-\cos n\pi}{\pi n^2}\cos nx - \frac{(-1)^n}{n}\,\text{sen}\,nx\right]$

(b) $n = 10$; $\max|e| = 1{,}6025$ em $x = \pm\pi$
$n = 20$; $\max|e| = 1{,}5867$ em $x = \pm\pi$
$n = 40$; $\max|e| = 1{,}5788$ em $x = \pm\pi$

(c) Não é possível

8. (a) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n^2}\cos n\pi x$

(b) $n = 10$; $\max|e| = 0{,}02020$ em $x = 0, \pm 1$
$n = 20$; $\max|e| = 0{,}01012$ em $x = 0, \pm 1$
$n = 40$; $\max|e| = 0{,}005065$ em $x = 0, \pm 1$

(c) $n = 21$

9. (a) $f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\,\text{sen}\,n\pi x$

(b) $n = 10, 20, 40$; $\max|e| = 1$ em $x \pm 1$

(c) Não é possível

10. (a) $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{6(1 - \cos n\pi)}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{2\cos n\pi}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2} \right]$

(b) $n = 10$; $\sup|e| = 1{,}0606$ quando $x \to 2$
$n = 20$; $\sup|e| = 1{,}0304$ quando $x \to 2$
$n = 40$; $\sup|e| = 1{,}0152$ quando $x \to 2$

(c) Não é possível

11. (a) $f(x) = \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\cos n\pi}{n^2\pi^2} \cos n\pi x - \frac{2 - 2\cos n\pi + n^2\pi^2 \cos n\pi}{n^3\pi^3} \operatorname{sen} n\pi x \right]$

(b) $n = 10$; $\sup|e| = 0{,}5193$ quando $x \to 1$
$n = 20$; $\sup|e| = 0{,}5099$ quando $x \to 1$
$n = 40$; $\sup|e| = 0{,}5050$ quando $x \to 1$

(c) Não é possível

12. (a) $f(x) = -\frac{12}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \operatorname{sen} n\pi x$

(b) $n = 10$; $\max|e| = 0{,}001345$ em $x = \pm 0{,}9735$
$n = 20$; $\max|e| = 0{,}0003534$ em $x = \pm 0{,}9864$
$n = 40$; $\max|e| = 0{,}00009058$ em $x = \pm 0{,}9931$

(c) $n = 4$

13. $y = (\omega \operatorname{sen} nt - n \operatorname{sen} \omega t)/\omega(\omega^2 - n^2)$, $\quad \omega^2 \neq n^2$
$y = (\operatorname{sen} nt - nt \cos nt)/2n^2$, $\quad \omega^2 = n^2$

14. $y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (\omega \operatorname{sen} nt - n \operatorname{sen} \omega t)/\omega(\omega^2 - n^2)$, $\quad \omega \neq 1, 2, 3, \ldots$

$y = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} b_n (m \operatorname{sen} nt - n \operatorname{sen} mt)/m(m^2 - n^2) + b_m(\operatorname{sen} mt - mt \cos mt)/2m^2$, $\quad \omega = m$

15. $y = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 - (2n-1)^2} \left[\frac{1}{2n-1} \operatorname{sen}(2n-1)t - \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \right]$

16. $y = \cos \omega t + \frac{1}{2\omega^2}(1 - \cos \omega t) + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi t - \cos \omega t}{(2n-1)^2[\omega^2 - (2n-1)^2]}$

Seção 10.4

1. Ímpar.
2. Nenhuma das duas.
3. Ímpar.
4. Par.
5. Par.
6. Nenhuma das duas.

14. $f(x) = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(n\pi/2)}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2}$

$f(x) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\pi/2) - \operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}$

15. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}$

16. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(-\cos n\pi + \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2}$

17. $f(x) = 1$

18. $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{2n-1}$

19. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{3} + \cos \frac{2n\pi}{3} - 2\cos n\pi \right) \operatorname{sen} \frac{nx}{3}$

20. $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2n\pi x}{n}$

21. $f(x) = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)\pi x/L]}{(2n-1)^2}$

22. $f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi x/L)}{n}$

23. (a) $f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)\right]\cos\frac{nx}{2}$

24. (a) $f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen} nx$

25. (a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4n^2\pi^2(1+\cos n\pi)}{n^3\pi^3} + \frac{16(1-\cos n\pi)}{n^3\pi^3}\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}$

26. (a) $f(x) = \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+3\cos n\pi}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{4}$

27. (b) $g(x) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{3}$

$h(x) = \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}$

28. (b) $g(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos(n\pi/2) + 2n\pi\operatorname{sen}(n\pi/2) - 4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$

$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\operatorname{sen}(n\pi/2) - 2n\pi\cos(n\pi/2)}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}$

29. (b) $g(x) = -\frac{5}{12} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12\cos n\pi + 4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$

$h(x) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2(3+5\cos n\pi) + 32(1-\cos n\pi)}{n^3\pi^3}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2}$

30. (b) $g(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n^2\pi^2(2\cos n\pi - 5) + 324(1-\cos n\pi)}{n^4\pi^4}\cos\frac{n\pi x}{3}$

$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4\cos n\pi + 2}{n\pi} + \frac{144\cos n\pi + 180}{n^3\pi^3}\right]\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{3}$

40. Estenda $f(x)$ anti-simetricamente a $(L, 2L]$, isto é, de modo que $f(2L - x) = -f(x)$ para $0 \le x < L$. Depois, estenda essa função como uma função para $(-2L, 0)$.

Seção 10.5

1. $xX'' - \lambda X = 0, \quad T' + \lambda T = 0$
2. $X'' - \lambda x X = 0, \quad T' + \lambda t T = 0$
3. $X'' - \lambda(X' + X) = 0, \quad T' + \lambda T = 0$
4. $[p(x)X']' + \lambda r(x)X = 0, \quad T'' + \lambda T = 0$
5. Não é separável
6. $X'' + (x + \lambda)X = 0, \quad Y'' - \lambda Y = 0$
7. $u(x,t) = e^{-400\pi^2 t}\operatorname{sen} 2\pi x - 2e^{-2500\pi^2 t}\operatorname{sen} 5\pi x$
8. $u(x,t) = 2e^{-\pi^2 t/16}\operatorname{sen}(\pi x/2) - e^{-\pi^2 t/4}\operatorname{sen}\pi x + 4e^{-\pi^2 t}\operatorname{sen} 2\pi x$
9. $u(x,t) = \frac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n}e^{-n^2\pi^2 t/1600}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}$
10. $u(x,t) = \frac{160}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^2}e^{-n^2\pi^2 t/1600}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}$
11. $u(x,t) = \frac{100}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi/4) - \cos(3n\pi/4)}{n}e^{-n^2\pi^2 t/1600}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}$
12. $u(x,t) = \frac{80}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-n^2\pi^2 t/1600}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{40}$
13. $t = 5, n = 16; \quad t = 20, n = 8; \quad t = 80, n = 4$
14. (d) $t = 673{,}35$
15. (d) $t = 451{,}60$
16. (d) $t = 617{,}17$
17. (b) $t = 5,\ x = 33{,}20; \quad t = 10,\ x = 31{,}13; \quad t = 20,\ x = 28{,}62; \quad t = 40,\ x = 25{,}73;$ $t = 100,\ x = 21{,}95; \quad t = 200,\ x = 20{,}31$
    (e) $t = 524{,}81$
18. $u(x,t) = \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n}e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/400}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{20}$
    (a) 35,91°C (b) 67,23°C (c) 99,96°C
19. (a) 76,73 s (b) 152,56 s (c) 1093,36 s
21. (a) $aw_{xx} - bw_t + (c - b\delta)w = 0$ (b) $\delta = c/b$ se $b \neq 0$

22. $X'' + \mu^2 X = 0, \quad Y'' + (\lambda^2 - \mu^2)Y = 0, \quad T' + \alpha^2\lambda^2 T = 0$
23. $r^2 R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - \mu^2)R = 0, \quad \Theta'' + \mu^2\Theta = 0, \quad T' + \alpha^2\lambda^2 T = 0$

Seção 10.6

1. $u = 10 + \frac{3}{5}x$
2. $u = 30 - \frac{5}{4}x$
3. $u = 0$
4. $u = T$
5. $u = 0$
6. $u = T$
7. $u = T(1+x)/(1+L)$
8. $u = T(1+L-x)/(1+L)$
9. (a) $u(x,t) = 3x + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{70\cos n\pi + 50}{n\pi} e^{-0,86n^2\pi^2 t/400} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{20}$ (d) 160,29 s
10. (a) $f(x) = 2x,\ 0 \le x \le 50;\quad f(x) = 200 - 2x,\ 50 < x \le 100$

 (b) $u(x,t) = 20 - \dfrac{x}{5} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-1,14n^2\pi^2 t/(100)^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{100}$,

 $c_n = \dfrac{800}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2} - \dfrac{40}{n\pi}$ (d) $u(50,t) \to 10$ quando $t \to \infty$; 3754 s
11. (a) $u(x,t) = 30 - x + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 t/900} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{30}$,

 $c_n = \dfrac{60}{n^3\pi^3}[2(1-\cos n\pi) - n^2\pi^2(1+\cos n\pi)]$
12. (a) $u(x,t) = \dfrac{2}{\pi} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \cos\frac{n\pi x}{L}$,

 $c_n = \begin{cases} 0, & n \text{ ímpar;} \\ -4/(n^2-1)\pi, & n \text{ par} \end{cases}$

 (b) $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 2/\pi$
13. (a) $u(x,t) = \dfrac{200}{9} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 t/6400} \cos\frac{n\pi x}{40}$,

 $c_n = -\dfrac{160}{3n^2\pi^2}(3 + \cos n\pi)$

 (c) 200/9 (d) 1543 s
14. (a) $u(x,t) = \dfrac{25}{6} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 t/900} \cos\frac{n\pi x}{30}$,

 $c_n = \dfrac{50}{n\pi}\left(\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{3} - \operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{6}\right)$
15. (b) $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2\pi^2\alpha^2 t/4L^2} \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2L}$,

 $c_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\,dx$
16. (a) $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/3600} \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{60}$,

 $c_n = \dfrac{120}{(2n-1)^2\pi^2}[2\cos n\pi + (2n-1)\pi]$

 (c) x_m aumenta a partir de $x = 0$ e atinge $x = 30$ quando $t = 104{,}4$.
17. (a) $u(x,t) = 40 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/3600} \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{60}$,

 $c_n = \dfrac{40}{(2n-1)^2\pi^2}[6\cos n\pi - (2n-1)\pi]$
19. $u(x) = \begin{cases} T\dfrac{x}{a}\left[\dfrac{\xi}{\xi + (L/a) - 1}\right], & 0 \le x \le a, \\ T\left[1 - \dfrac{L-x}{a}\dfrac{1}{\xi + (L/a) - 1}\right], & a \le x \le L, \end{cases}$ onde $\xi = \kappa_2 A_2/\kappa_1 A_1$
20. (e) $u_n(x,t) = e^{-\lambda_n^2\alpha^2 t}\operatorname{sen}\lambda_n x$
21. $\alpha^2 v'' + s(x) = 0; \quad v(0) = T_1, \quad v(L) = T_2$

 $w_t = \alpha^2 w_{xx}; \quad w(0,t) = 0, \quad w(L,t) = 0, \quad w(x,0) = f(x) - v(x)$
22. (a) $v(x) = T_1 + (T_2 - T_1)(x/L) + kLx/2 - kx^2/2$

(b) $w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 t/400} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{20}, \qquad c_n = \frac{160(-1)^n}{n^3\pi^3}$

23. (a) $v(x) = T_1 + (T_2 - T_1)x/L + kLx/6 - kx^3/6L$

(b) $w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 t/400} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{20},$

$c_n = \frac{20}{3}\left[\frac{3m^3\pi^3(3\cos m\pi - 1) + 60\cos m\pi}{m^4\pi^4}\right]$

Seção 10.7

1. (a) $u(x,t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{n\pi a t}{L}$

2. (a) $u(x,t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{4}\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{n\pi a t}{L}$

3. (a) $u(x,t) = \frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n\pi}{n^3} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{n\pi a t}{L}$

4. (a) $u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)\operatorname{sen}(n\pi/L)}{n} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{n\pi a t}{L}$

5. (a) $u(x,t) = \frac{8L}{a\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi a t}{L}$

6. (a) $u(x,t) = \frac{8L}{a\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/4) + \operatorname{sen}(3n\pi/4)}{n^3} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi a t}{L}$

7. (a) $u(x,t) = \frac{32L}{a\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi + 2}{n^4} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi a t}{L}$

8. (a) $u(x,t) = \frac{4L}{a\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)\operatorname{sen}(n\pi/L)}{n^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi a t}{L}$

9. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \cos\frac{(2n-1)\pi a t}{2L},$

$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\, dx$

10. (a) $u(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi}{4} \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi}{2L} \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \cos\frac{(2n-1)\pi a t}{2L}$

11. (a) $u(x,t) = \frac{512}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)\pi + 3\cos n\pi}{(2n-1)^4} \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \cos\frac{(2n-1)\pi a t}{2L}$

14. $\phi(x + at)$ representa uma onda movendo-se no sentido x negativo com velocidade $a > 0$.

15. (a) 248 pés/s. (b) $49{,}6\pi m$ rad/s. (c) A freqüência aumenta; o modo permanece inalterado.

21. $r^2R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - \mu^2)R = 0, \quad \Theta'' + \mu^2\Theta = 0, \quad T'' + \lambda^2 a^2 T = 0$

23. (b) $a_n = a\sqrt{1 + (\gamma^2L^2/n^2\pi^2)}$

(c) $\gamma = 0$.

24. (a) $c_n = \frac{20}{n^2\pi}\left(2\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{2n\pi}{5} - \operatorname{sen}\frac{3n\pi}{5}\right)$

Seção 10.8

1. (a) $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh}\frac{n\pi y}{a}, \quad c_n = \frac{2/a}{\operatorname{senh}(n\pi b/a)}\int_0^a g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\, dx$

(b) $u(x,y) = \frac{4a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)}{\operatorname{senh}(n\pi b/a)} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh}\frac{n\pi y}{a}$

2. $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh}\frac{n\pi(b-y)}{a}, \quad c_n = \frac{2/a}{\operatorname{senh}(n\pi b/a)}\int_0^a h(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\, dx$

3. (a) $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(1)} \operatorname{senh} \frac{n\pi x}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(2)} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi(b-y)}{a}$,

$c_n^{(1)} = \frac{2/b}{\operatorname{senh}(n\pi a/b)} \int_0^b f(y) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}\, dy, \quad c_n^{(2)} = \frac{2/a}{\operatorname{senh}(n\pi b/a)} \int_0^a h(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}\, dx$

(b) $c_n^{(1)} = \frac{2}{n\pi \operatorname{senh}(n\pi a/b)}, \quad c_n^{(2)} = -\frac{2}{n^3\pi^3} \frac{(n^2\pi^2 - 2)\cos n\pi + 2}{\operatorname{senh}(n\pi b/a)}$

5. $u(r,\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n}(c_n \cos n\theta + k_n \operatorname{sen} n\theta)$;

$c_n = \frac{a^n}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta\, d\theta, \quad k_n = \frac{a^n}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta\, d\theta$

6. (a) $u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n \operatorname{sen} n\theta, \quad c_n = \frac{2}{\pi a^n} \int_0^{\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta\, d\theta$

(b) $c_n = \frac{4}{\pi a^n} \frac{\cos n\pi + 1}{n^3}$

7. $u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{n\pi/\alpha} \operatorname{sen} \frac{n\pi\theta}{\alpha}, \quad c_n = (2/\alpha) a^{-n\pi/\alpha} \int_0^{\alpha} f(\theta) \operatorname{sen} \frac{n\pi\theta}{\alpha}\, d\theta$

8. (a) $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n\pi y/a} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}, \quad c_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}\, dx$

(b) $c_n = \frac{4a^2}{n^3\pi^3}(1 - \cos n\pi)$ (c) $y_0 \cong 6{,}6315$

10. (b) $u(x,y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cosh \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad c_n = \frac{2/n\pi}{\operatorname{senh}(n\pi a/b)} \int_0^b f(y) \cos \frac{n\pi y}{b}\, dy$

11. $u(r,\theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (c_n \cos n\theta + k_n \operatorname{sen} n\theta)$,

$c_n = \frac{1}{n\pi a^{n-1}} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos n\theta\, d\theta, \quad k_n = \frac{1}{n\pi a^{n-1}} \int_0^{2\pi} g(\theta) \operatorname{sen} n\theta\, d\theta$;

uma condição necessária é $\int_0^{2\pi} g(\theta)\, d\theta = 0$.

12. (a) $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a} \cosh \frac{n\pi y}{a}, \quad c_n = \frac{2/a}{\cosh(n\pi b/a)} \int_0^a g(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{a}\, dx$

(b) $c_n = \frac{4a \operatorname{sen}(n\pi/2)}{n^2\pi^2 \cosh(n\pi b/a)}$

13. (a) $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh} \frac{(2n-1)\pi x}{2b} \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi y}{2b}$,

$c_n = \frac{2/b}{\operatorname{senh}[(2n-1)\pi a/2b]} \int_0^b f(y) \operatorname{sen} \frac{(2n-1)\pi y}{2b}\, dy$

(b) $c_n = \frac{32b^2}{(2n-1)^3\pi^3 \operatorname{senh}[(2n-1)\pi a/2b]}$

14. (a) $u(x,y) = \frac{c_0 y}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{a}$,

$c_0 = \frac{2}{ab} \int_0^a g(x)\, dx, \quad c_n = \frac{2/a}{\operatorname{senh}(n\pi b/a)} \int_0^a g(x) \cos \frac{n\pi x}{a}\, dx$

(b) $c_0 = \frac{2}{b}\left(1 + \frac{a^4}{30}\right), \quad c_n = -\frac{24a^4(1 + \cos n\pi)}{n^4\pi^4 \operatorname{senh}(n\pi b/a)}$

16. (a) $u(x,z) = b + \frac{\alpha a}{2} - \frac{4\alpha a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)\pi x/a] \cosh[(2n-1)\pi z/a]}{(2n-1)^2 \cosh[(2n-1)\pi b/a]}$

CAPÍTULO 11 Seção 11.1

1. Homogênea.
2. Não-homogênea.
3. Não-homogênea.
4. Homogênea.
5. Não-homogênea.
6. Homogênea.

7. $\phi_n(x) = \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\,x$, onde $\sqrt{\lambda_n}$ satisfaz $\sqrt{\lambda} = -\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}\,\pi$;
$\lambda_1 \cong 0{,}6204$, $\lambda_2 \cong 2{,}7943$, $\lambda_n \cong (2n-1)^2/4$ para n grande.
8. $\phi_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}\,x$, onde $\sqrt{\lambda_n}$ satisfaz $\sqrt{\lambda} = \operatorname{cotg}\sqrt{\lambda}$;
$\lambda_1 \cong 0{,}7402$, $\lambda_2 \cong 11{,}7349$, $\lambda_n \cong (n-1)^2\pi^2$ para n grande.
9. $\phi_n(x) = \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\,x + \sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}\,x$, onde $\sqrt{\lambda_n}$ satisfaz
$(\lambda - 1)\operatorname{sen}\sqrt{\lambda} - 2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0$;
$\lambda_1 \cong 1{,}7071$, $\lambda_2 \cong 13{,}4924$, $\lambda_n \cong (n-1)^2\pi^2$ para n grande.
10. $\lambda_0 = 0$; $\phi_0(x) = 1 - x$
Para $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\phi_n(x) = \operatorname{sen}\mu_n x - \mu_n\cos\mu_n x$ e $\lambda_n = -\mu_n^2$, onde μ_n satisfaz $\mu = \operatorname{tg}\mu$.
$\lambda_1 \cong -20{,}1907$, $\lambda_2 \cong -59{,}6795$, $\lambda_n \cong -(2n+1)^2\pi^2/4$ para n grande.
12. $\mu(x) = e^{-x^2}$
13. $\mu(x) = 1/x$
14. $\mu(x) = e^{-x}$
15. $\mu(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$
16. $X'' + \lambda X = 0$, $T'' + cT' + (k + \lambda a^2)T = 0$
17. (a) $s(x) = e^x$ (b) $\lambda_n = n^2\pi^2$, $\phi_n(x) = e^x \operatorname{sen} n\pi x$; $n = 1, 2, 3, \ldots$
18. Os autovalores positivos são $\lambda = \lambda_n$, onde $\sqrt{\lambda_n}$ satisfaz $\sqrt{\lambda} = \frac{2}{3}\operatorname{tg} 3\sqrt{\lambda}\,L$; as autofunções correspondentes são $\phi_n(x) = e^{-2x}\operatorname{sen} 3\sqrt{\lambda_n}\,x$. Se $L = 1/2$, $\lambda_0 = 0$ é um autovalor, com autofunção correspondente $\phi_0(x) = xe^{-2x}$; se $L \neq 1/2$, $\lambda = 0$ não é autovalor. Se $L \leq 1/2$, não existem autovalores negativos; se $L > 1/2$, existe um autovalor negativo $\lambda = -\mu^2$, onde μ é uma raiz de $\mu = (2/3)\operatorname{tgh} 3\mu L$; a autofunção correspondente é $\phi_{-1}(x) = e^{-2x}\operatorname{senh} 3\mu x$.
19. Não tem autovalores reais.
20. O único autovalor é $\lambda = 0$; a autofunção correspondente é $\phi(x) = x - 1$.
21. (a) $2\operatorname{sen}\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0$; $\lambda_1 \cong 18{,}2738$, $\lambda_2 \cong 57{,}7075$
(b) $2\operatorname{senh}\sqrt{\mu} - \sqrt{\mu}\cosh\sqrt{\mu} = 0$, $\mu = -\lambda$; $\lambda_{-1} \cong -3{,}6673$
24. (a) $\lambda_n = \mu_n^4$, onde μ_n é uma raiz de $\operatorname{sen}\mu L \operatorname{senh}\mu L = 0$, logo $\lambda_n = (n\pi/L)^4$;
$\lambda_1 \cong 97{,}409/L^4$, $\phi_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/L)$
(b) $\lambda_n = \mu_n^4$, onde μ_n é uma raiz de $\operatorname{sen}\mu L\cosh\mu L - \cos\mu L\operatorname{senh}\mu L = 0$;
$\lambda_1 \cong 237{,}72/L^4$, $\phi_n = \dfrac{\operatorname{sen}\mu_n x \operatorname{senh}\mu_n L - \operatorname{sen}\mu_n L\operatorname{senh}\mu_n x}{\operatorname{senh}\mu_n L}$
(c) $\lambda_n = \mu_n^4$, onde μ_n é uma raiz de $1 + \cosh\mu L\cos\mu L = 0$; $\lambda_1 \cong 12{,}362/L^4$,
$$\phi_n(x) = \frac{[(\operatorname{sen}\mu_n x - \operatorname{senh}\mu_n x)(\cos\mu_n L + \cosh\mu_n L) + (\operatorname{sen}\mu_n L + \operatorname{senh}\mu_n L)(\cosh\mu_n x - \cos\mu_n x)]}{\cos\mu_n L + \cosh\mu_n L}$$
25. (c) $\phi_n(x) = \operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\,x$, onde λ_n satisfaz $\cos\sqrt{\lambda_n}\,L - \gamma\sqrt{\lambda_n}\,L\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}\,L = 0$;
$\lambda_1 \cong 1{,}1597/L^2$, $\lambda_2 \cong 13{,}276/L^2$

Seção 11.2

1. $\phi_n(x) = \sqrt{2}\operatorname{sen}(n - \frac{1}{2})\pi x$; $n = 1, 2, \ldots$
2. $\phi_n(x) = \sqrt{2}\cos(n - \frac{1}{2})\pi x$; $n = 1, 2, \ldots$
3. $\phi_0(x) = 1$, $\phi_n(x) = \sqrt{2}\cos n\pi x$; $n = 1, 2, \ldots$
4. $\phi_n(x) = \dfrac{\sqrt{2}\cos\sqrt{\lambda_n}\,x}{(1 + \operatorname{sen}^2\sqrt{\lambda_n})^{1/2}}$, onde λ_n satisfaz $\cos\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_n}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n} = 0$
5. $\phi_n(x) = \sqrt{2}\,e^x\operatorname{sen} n\pi x$; $n = 1, 2, \ldots$
6. $a_n = \dfrac{2\sqrt{2}}{(2n-1)\pi}$; $n = 1, 2, \ldots$
7. $a_n = \dfrac{4\sqrt{2}(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2\pi^2}$; $n = 1, 2, \ldots$
8. $a_n = \dfrac{2\sqrt{2}}{(2n-1)\pi}\{1 - \cos[(2n-1)\pi/4]\}$; $n = 1, 2, \ldots$
9. $a_n = \dfrac{2\sqrt{2}\operatorname{sen}(n - \frac{1}{2})(\pi/2)}{(n - \frac{1}{2})^2\pi^2}$; $n = 1, 2, \ldots$

Nos problemas de 10 até 13, $\alpha_n = (1 + \operatorname{sen}^2\sqrt{\lambda_n})^{1/2}$ e $\cos\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_n}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n} = 0$.

10. $a_n = \dfrac{\sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}\,\alpha_n}$; $n = 1, 2, \ldots$
11. $a_n = \dfrac{\sqrt{2}(2\cos\sqrt{\lambda_n} - 1)}{\lambda_n\alpha_n}$; $n = 1, 2, \ldots$
12. $a_n = \dfrac{\sqrt{2}(1 - \cos\sqrt{\lambda_n})}{\lambda_n\alpha_n}$; $n = 1, 2, \ldots$
13. $a_n = \dfrac{\sqrt{2}\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda_n}/2)}{\sqrt{\lambda_n}\,\alpha_n}$; $n = 1, 2, \ldots$

14. Não é auto-adjunto.
15. Auto-adjunto.
16. Não é auto-adjunto.
17. Auto-adjunto.
18. Auto-adjunto.
21. (a) Se $a_2 = 0$ ou $b_2 = 0$, então o termo-limite correspondente está ausente.
25. (a) $\lambda_1 = \pi^2/L^2$; $\phi_1(x) = \text{sen}(\pi x/L)$
(b) $\lambda_1 \cong (4{,}4934)^2/L^2$; $\phi_1(x) = \text{sen}\sqrt{\lambda_1}\,x - \sqrt{\lambda_1}\,x\cos\sqrt{\lambda_1}\,L$
(c) $\lambda_1 = (2\pi)^2/L^2$; $\phi_1(x) = 1 - \cos(2\pi x/L)$
26. $\lambda_1 = \pi^2/4L^2$; $\phi_1(x) = 1 - \cos(\pi x/2L)$
27. (a) $X'' - (v/D)X' + \lambda X = 0$, $X(0) = 0$, $X'(L) = 0$; $T' + \lambda DT = 0$
(e) $c(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n Dt} e^{vx/2D}\,\text{sen}\,\mu_n x$, onde $\lambda_n = \mu_n^2 + (v^2/4D^2)$;

$$a_n = \frac{4D\mu_n^2 \int_0^L e^{-vx/2D} f(x)\,\text{sen}\,\mu_n x\,dx}{(2LD\mu_n^2 + v\,\text{sen}^2\,\mu_n L)}$$

28. (a) $u_t + vu_x = Du_{xx}$, $u(0,t) = 0$, $u_x(L,t) = 0$, $u(x,0) = -c_0$
(b) $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n Dt} e^{vx/2D}\,\text{sen}\,\mu_n x$, onde $\lambda_n = \mu_n^2 + (v^2/4D^2)$;

$$b_n = \frac{8c_0 D^2\mu^2(2D\mu_n e^{-vL/2D}\cos\mu_n L + ve^{-vL/2D}\,\text{sen}\,\mu_n L - 2D\mu_n)}{(v^2 + 4D^2\mu_n^2)(2LD\mu_n^2 + v\,\text{sen}^2\,\mu_n L)}$$

Seção 11.3

1. $y = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,\text{sen}\,n\pi x}{(n^2\pi^2 - 2)n\pi}$
2. $y = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,\text{sen}(n - \frac{1}{2})\pi x}{[(n - \frac{1}{2})^2\pi^2 - 2](n - \frac{1}{2})^2\pi^2}$
3. $y = -\frac{1}{4} - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{[(2n-1)^2\pi^2 - 2](2n-1)^2\pi^2}$
4. $y = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\cos\sqrt{\lambda_n} - 1)\cos\sqrt{\lambda_n}\,x}{\lambda_n(\lambda_n - 2)(1 + \text{sen}^2\sqrt{\lambda_n})}$
5. $y = 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi/2)\,\text{sen}\,n\pi x}{(n^2\pi^2 - 2)n^2\pi^2}$

6-9. Para cada problema, a solução é

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n - \mu}\phi_n(x), \qquad c_n = \int_0^1 f(x)\phi_n(x)\,dx, \qquad \mu \neq \lambda_n,$$

onde $\phi_n(x)$ é dada nos Problemas 1, 2, 3 e 4, respectivamente, da Seção 11.2, e λ_n é o autovalor correspondente. No Problema 8, o somatório começa em $n = 0$.

10. $a = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2\pi^2}\cos\pi x + \frac{1}{\pi^2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + c\,\text{sen}\,\pi x$
11. Não tem solução
12. a é arbitrário, $y = c\cos\pi x + a/\pi^2$
13. $a = 0$, $y = c\,\text{sen}\,\pi x - (x/2\pi)\,\text{sen}\,\pi x$
17. $v(x) = a + (b - a)x$
18. $v(x) = 1 - \frac{3}{2}x$
19. $u(x,t) = \sqrt{2}\left[-\frac{4c_1}{\pi^2} + \left(\frac{4c_1}{\pi^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)e^{-\pi^2 t/4}\right]\text{sen}\,\frac{\pi x}{2}$

$$- \sqrt{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4c_n}{(2n-1)^2\pi^2}[1 - e^{-(n-1/2)^2\pi^2 t}]\,\text{sen}(n - \tfrac{1}{2})\pi x,$$

$$c_n = \frac{4\sqrt{2}(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

20. $u(x,t) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{c_n}{\lambda_n - 1}(e^{-t} - e^{-\lambda_n t}) + \alpha_n e^{-\lambda_n t}\right]\frac{\cos\sqrt{\lambda_n}\,x}{(1 + \text{sen}^2\sqrt{\lambda_n})^{1/2}}$,

$$c_n = \frac{\sqrt{2}\,\text{sen}\sqrt{\lambda_n}}{\sqrt{\lambda_n}(1 + \text{sen}^2\sqrt{\lambda_n})^{1/2}}, \quad \alpha_n = \frac{\sqrt{2}(1 - \cos\sqrt{\lambda_n})}{\lambda_n(1 + \text{sen}^2\sqrt{\lambda_n})^{1/2}},$$

e λ_n satisfaz $\cos\sqrt{\lambda_n} - \sqrt{\lambda_n}\,\text{sen}\sqrt{\lambda_n} = 0$.

21. $u(x,t) = 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi/2)}{n^4\pi^4}(1 - e^{-n^2\pi^2 t})\,\text{sen}\,n\pi x$

22. $u(x,t) = \sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_n(e^{-t} - e^{-(n-1/2)^2\pi^2 t})\operatorname{sen}(n-\frac{1}{2})\pi x}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2 - 1}$,

$c_n = \dfrac{2\sqrt{2}(2n-1)\pi + 4\sqrt{2}(-1)^n}{(2n-1)^2\pi^2}$

23. (a) $r(x)w_t = [p(x)w_x]_x - q(x)w, \quad w(0,t) = 0, \quad w(1,t) = 0, \quad w(x,0) = f(x) - v(x)$

24. $u(x,t) = x^2 - 2x + 1 + \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-(2n-1)^2\pi^2 t}\operatorname{sen}(2n-1)\pi x}{2n-1}$

25. $u(x,t) = -\cos\pi x + e^{-9\pi^2 t/4}\cos(3\pi x/2)$

31–34. Em todos os casos, a solução é $y = \int_0^1 G(x,s)f(s)\,ds$, onde $G(x,s)$ é dada abaixo.

31. $G(x,s) = \begin{cases} 1-x, & 0 \le s \le x \\ 1-s, & x \le s \le 1 \end{cases}$

32. $G(x,s) = \begin{cases} s(2-x)/2, & 0 \le s \le x \\ x(2-s)/2, & x \le s \le 1 \end{cases}$

33. $G(x,s) = \begin{cases} \cos s \operatorname{sen}(1-x)/\cos 1, & 0 \le s \le x \\ \operatorname{sen}(1-s)\cos x/\cos 1, & x \le s \le 1 \end{cases}$

34. $G(x,s) = \begin{cases} s, & 0 \le s \le x \\ x, & x \le s \le 1 \end{cases}$

Seção 11.4

1. $y = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_n}{\lambda_n - \mu} J_0(\sqrt{\lambda_n}\,x), \quad c_n = \int_0^1 f(x)J_0(\sqrt{\lambda_n}\,x)\,dx \Big/ \int_0^1 xJ_0^2(\sqrt{\lambda_n}\,x)\,dx$,

$\sqrt{\lambda_n}$ satisfaz $J_0(\sqrt{\lambda}) = 0$

2. (c) $y = -\dfrac{c_0}{\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_n}{\lambda_n - \mu} J_0(\sqrt{\lambda_n}\,x)$;

$c_0 = 2\int_0^1 f(x)\,dx; \quad c_n = \int_0^1 f(x)J_0(\sqrt{\lambda_n}\,x)\,dx \Big/ \int_0^1 xJ_0^2(\sqrt{\lambda_n}\,x)\,dx, \; n = 1, 2, \ldots$;

$\sqrt{\lambda_n}$ satisfaz $J_0'(\sqrt{\lambda}) = 0$

3. (d) $a_n = \int_0^1 xJ_k(\sqrt{\lambda_n}\,x)f(x)\,dx \Big/ \int_0^1 xJ_k^2(\sqrt{\lambda_n}\,x)\,dx$

(e) $y = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_n}{\lambda_n - \mu} J_k(\sqrt{\lambda_n}\,x), \quad c_n = \int_0^1 f(x)J_k(\sqrt{\lambda_n}\,x)\,dx \Big/ \int_0^1 xJ_k^2(\sqrt{\lambda_n}\,x)\,dx$

4. (b) $y = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{c_n}{\lambda_n - \mu} P_{2n-1}(x), \quad c_n = \int_0^1 f(x)P_{2n-1}(x)\,dx \Big/ \int_0^1 P_{2n-1}^2(x)\,dx$

Seção 11.5

1. (b) $u(\xi, 2) = f(\xi + 1), \quad u(\xi, 0) = 0, \quad 0 \le \xi \le 2$

$u(0,\eta) = u(2,\eta) = 0, \quad 0 \le \eta \le 2$

2. $u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n J_0(\lambda_n r)\operatorname{sen}\lambda_n at, \quad k_n = \dfrac{1}{\lambda_n a}\int_0^1 rJ_0(\lambda_n r)g(r)\,dr \Big/ \int_0^1 rJ_0^2(\lambda_n r)\,dr$

3. Superponha a solução do Problema 2 e a do exemplo [Eq. (21)] no texto.

6. $u(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n z} J_0(\lambda_n r), \quad c_n = \int_0^1 rJ_0(\lambda_n r)f(r)\,dr \Big/ \int_0^1 rJ_0^2(\lambda_n r)\,dr$,

e λ_n satisfaz $J_0(\lambda) = 0$.

7. (b) $v(r,\theta) = \frac{1}{2}c_0 J_0(kr) + \sum_{m=1}^{\infty} J_m(kr)(b_m \operatorname{sen} m\theta + c_m \cos m\theta)$,

$b_m = \dfrac{1}{\pi J_m(kc)}\int_0^{2\pi} f(\theta)\operatorname{sen} m\theta\,d\theta; \quad m = 1, 2, \ldots$

$c_m = \dfrac{1}{\pi J_m(kc)}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos m\theta\,d\theta; \quad m = 0, 1, 2, \ldots$

8. $c_n = \int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_n r)\, dr \Big/ \int_0^1 r J_0^2(\lambda_n r)\, dr$

10. $u(\rho, s) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \rho^n P_n(s)$, onde $c_n = \int_{-1}^{1} f(\text{arccos}\, s) P_n(s)\, ds \Big/ \int_{-1}^{1} P_n^2(s)\, ds$;
P_n é o n-ésimo polinômio de Legendre e $s = \cos\phi$

Seção 11.6

1. $n = 21$
2. (a) $b_m = (-1)^{m+1}\sqrt{2}/m\pi$ (c) $n = 20$
3. (a) $b_m = 2\sqrt{2}(1 - \cos m\pi)/m^3\pi^3$ (c) $n = 1$
7. (a) $f_0(x) = 1$ (b) $f_1(x) = \sqrt{3}(1 - 2x)$ (c) $f_2(x) = \sqrt{5}(-1 + 6x - 6x^2)$
(d) $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = 2x - 1$, $g_2(x) = 6x^2 - 6x + 1$
8. $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$, $P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$

Índice

E

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

W



LTC LIVROS TÉCNICOS E CIENTÍFICOS EDITORA

www.ltceditora.com.br